ANALISI MATEMATICA I

Soluzioni Foglio 4

7 aprile 2009

4.1. Esercizio. *Assegnata la funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *che ad ogni* $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ *fa corrispondere*

$$f(P) = (x + y,\ x - y)$$

- *riconoscere che é continua,*
- *assegnato* $\varepsilon > 0$ *determinare un corrispondente* δ_ε *tale che*
$$|P - Q| \le \delta_\varepsilon \quad \to \quad |f(P) - f(Q)| \le \varepsilon$$
avendo indicato con $|A - B|$ *la distanza tra i due punti* A *e* B *del piano* $\mathbb{R}^2$*,*
- *esaminare se* f *é uniformemente continua.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La continuitá di $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ equivale alla continuitá delle due funzioni

$$\begin{cases} f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} & (x, y) \to x + y \\ f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} & (x, y) \to x - y \end{cases}$$

continuitá evidente osservato che

$$\begin{cases} |f_1(x, y) - f_1(x_0, y_0)| \le |x - x_0| + |y - y_0| \le 2\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \\ \\ |f_2(x, y) - f_2(x_0, y_0)| \le |x - x_0| + |y - y_0| \le 2\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \end{cases}$$

Tenuto conto che

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x - x_0, y - y_0) = \begin{pmatrix} (x - x_0) + (y - y_0) \\ \\ (x - x_0) - (y - y_0) \end{pmatrix}$$

si ha

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = \sqrt{2}\,\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

funzione lipschitziana con $L = \sqrt{2}$, da cui

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \le \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad \to \quad |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \le \varepsilon$$

La funzione f assegnata é uniformemente continua, infatti la soglia

$$\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

trovata é adatta ad ogni coppia di punti (x, y) e (x_0, y_0).

Osservazione 4.1. *La funzione f introdotta é una trasformazione lineare di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$, trasformazione determinata dalla matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Tutte le funzioni lineari sono lipschitziane e quindi uniformemente continue.

4.2. Esercizio. *Assegnata la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che ad ogni $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ fa corrispondere*

$$f(P) = \max\{x, y\}$$

- *riconoscere che é continua,*
- *assegnato $\varepsilon > 0$ determinare un corrispondente δ_ε tale che*

  $$|P - Q| \leq \delta_\varepsilon \quad \to \quad |f(P) - f(Q)| \leq \varepsilon$$

  avendo indicato con $|A - B|$ la distanza tra i due punti A e B,
- *esaminare se f é uniformemente continua,*
- *assegnato $\Omega_R \subset \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq R^2$ determinare*

  $$\min_{P \in \Omega_R} f(P), \quad \max_{P \in \Omega_R} f(P)$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Scelti due punti $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$ la differenza

$$f(P_0) - f(P_1) = \max\{x_0, y_0\} - \max\{x_1, y_1\}$$

vale uno dei seguenti quattro valori

$$x_0 - x_1, \quad y_0 - y_1, \quad x_0 - y_1, \quad y_0 - x_1$$

Tenuto conto che

$$|x_0 - x_1| \leq |P_0 - P_1|, \quad |y_0 - y_1| \leq |P_0 - P_1|$$

e che si ottengono gli altri due possibili valori quando i due punti P_0 e P_1 non stanno nello stesso dei due semipiani determinati dalla retta $y = x$, si riconosce, vedi Figura 1, che

$$|f(P_0) - f(P_1)| \leq |f(P_0) - f(T)| + |f(T) - f(P_1)| =$$

$$= |B - T| + |P_1 - A| \leq |P_0 - T| + |T - P_1| = |P_0 - P_1|$$

Quindi, in ogni caso, si riconosce che

$$|f(P_0) - f(P_1)| \leq |P_0 - P_1|$$

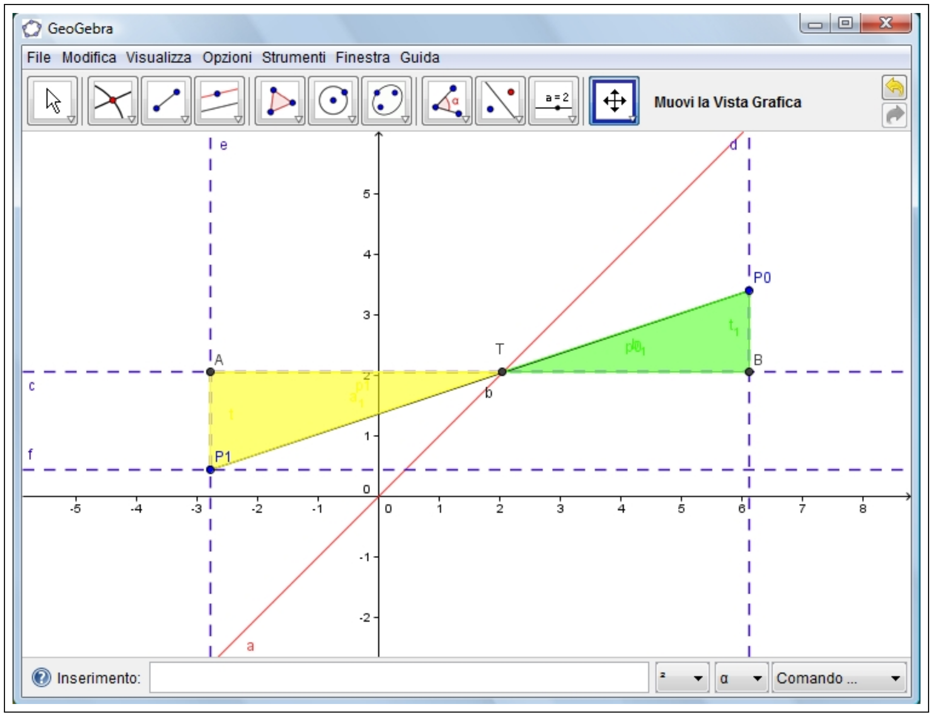

FIGURA 1. $|f(P_0) - f(P_1)| \leq |P_0 - P_1|$

Cioé la funzione assegnata é lipschitziana con costante di Lipschitz $L = 1$: si tratta quindi di una funzione uniformemente continua.
Per quanto concerne il minimo e il massimo nel cerchio assegnato si consideri la Figura 2

4.3. Esercizio. *Determinare l'insieme dei punti dove é continua la funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \\ \\ 0 & altrove \end{cases}$$

SOLUZIONE:

La funzione f assegnata é continua in tutti i punti non appartenenti all'insieme chiuso

$$E : \ \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ..., 0\}$$

Infatti

- nei punti $\frac{1}{n}$ non é continua poiché vale $f(1/n) = 1$ mentre f vale zero in tutto un intorno di tale $1/n$,

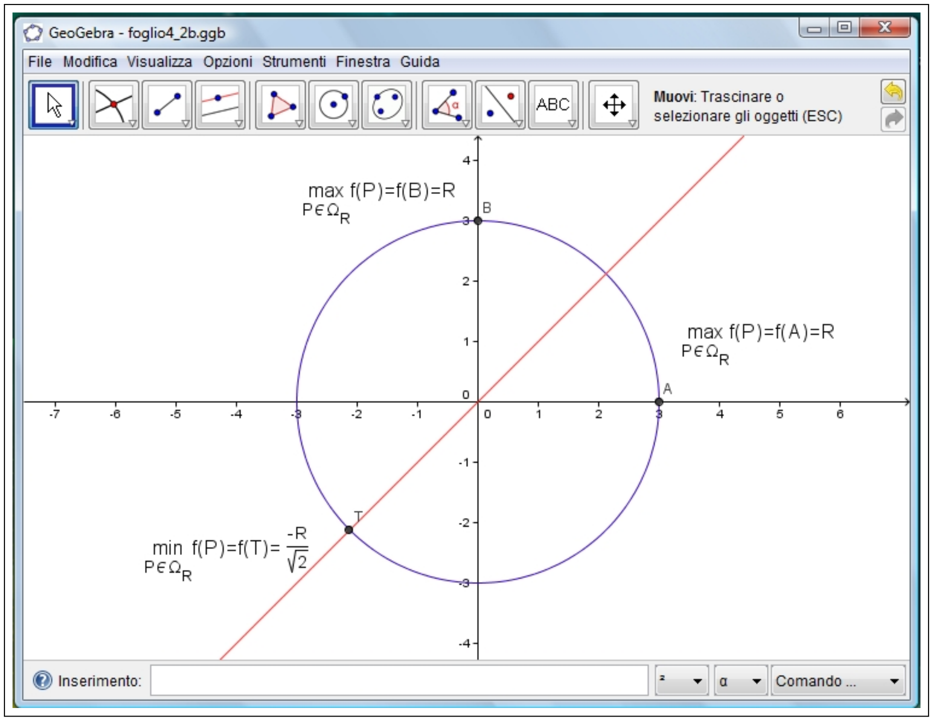

FIGURA 2. $\min_{P\in\Omega_R} f(P), \quad \max_{P\in\Omega_R} f(P)$

- nel punto 0 non é continua perché a sinistra, nei negativi, vale zero, mentre sulla successione $\{1/n\}$ convergente a zero vale 1
- per ciascun punto $\xi \notin E$ si puó ovviamente costruire un intervallo $(\xi - \rho, \xi + \rho)$, che non contenga alcun punto di E, e sul quale quindi la funzione sia costantemente nulla, quindi continua.

4.4. Esercizio. *Assegnata la funzione di Dirichlet definita come*

$$d : [0, 1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad d(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ \\ 0 & se \quad x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

si determini l'insieme dei punti in cui é continua.

SOLUZIONE:

La funzione di Dirichlet é discontinua in tutto $\mathbb{R}$.
Infatti sia l'insieme dei razionali che l'insieme degli irrazionali sono densi in $\mathbb{R}$, quindi per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ esistono successioni $\{x_n\}$ di razionali e $\{y_n\}$ di irrazionali convergenti a ξ: ma allora, tenuto presente che

$$\forall n \;\; d(x_n) = 1, \quad d(y_n) = 0$$

non riesce in nessun caso

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n) = d(\xi) = \lim_{n\to\infty} d(y_n)$$

4.5. Esercizio. Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dimostrare che

$$f \quad \textit{continua} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, A \quad \textit{aperto} \quad f^{-1}(A) \quad \textit{è} \quad \textit{aperto}$$

Soluzione:

cfr. Rudin, Capitolo 4, Teorema 4.8, pag. 84.

4.6. Esercizio. *Stabilire quali delle seguenti funzioni*

$$f, g, h, k:\ (0, +\infty) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \cos^2(x), \quad g(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad h(x) = \ln(x), \quad k(x) = \sin(x^2)$$

sono uniformemente continue in $(0, +\infty) \subset \mathbb{R}$.

Soluzione:

$\boxed{f(x) = \cos^2(x)}$

Tenuto conto che

$$f'(x) = -2\cos(x)\,\sin(x) \quad \to \quad |f'(x)| \leq 2$$

si riconosce, servendosi del teorema di Lagrange, che

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \quad \to \quad |f(x) - f(y)| \leq\ 2\,|x - y|$$

quindi f, lipschitziana, é uniformemente continua.

$\boxed{g(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}}$

Scelto $\varepsilon > 0$ decomponiamo l'intervallo illimitato $(0, +\infty)$ come segue

$$(0, +\infty) = \left(0, \frac{1}{2\varepsilon}\right] \bigcup \left(\frac{1}{2\varepsilon}, +\infty\right)$$

Considerato che esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

si riconosce che la funzione assegnata é uniformemente continua nell'intervallo chiuso e limitato $\left[0, \dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$: sia δ_ε la soglia corrispondente in tale intervallo al valore ε scelto.

Osserviamo ora che presi due punti $x, y \in (0, +\infty)$ e che verifichino la condizione

$$|x - y| \leq \delta_\varepsilon$$

possono succedere solo tre alternative:

- stanno tutti e due nell'intervallo $\left[0, \dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$ e allora riesce
$$|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$$
- stanno tutti e due nell'intervallo $\left(\dfrac{1}{2\varepsilon}, +\infty\right)$ e allora riesce
$$|g(x) - g(y)| \leq |g(x)| + |g(y)| \leq \varepsilon$$
- stanno uno nel primo e l'altro nel secondo e allora riesce
$$|g(x) - g(y)| \leq |g(x) - g(\frac{1}{2\varepsilon})| + |g(\frac{1}{2\varepsilon}) - g(y)| \leq 2\varepsilon$$

Riesce pertanto provata l'uniforme continuitá di g in $(0, +\infty)$.

$\boxed{h(x) = \ln(x)}$

Tenuto conto che $\ln(x)$ é illimitata nell'intervallo $(0, 1)$ allora non puó essere in tale intervallo uniformemente continua: quindi non puó esserlo in tutto $(0, +\infty)$.
Lo é invece, in quanto lipschitziana, in ogni intervallo $[a, +\infty)$ con $a > 0$.

$\boxed{k(x) = \sin(x^2)}$

La funzione $\sin(x^2)$ non puó essere uniformemente continua in alcun intervallo illimitato: infatti i punti

$$x_n = \sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2}}, \quad y_n = \sqrt{(2n+3)\frac{\pi}{2}}$$

distano fra loro

$$|x_n - y_n| = \left|\sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2}} - \sqrt{(2n+3)\frac{\pi}{2}}\right| = \frac{\pi}{\sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2}} + \sqrt{(2n+3)\frac{\pi}{2}}}$$

da cui

$$|x_n - y_n| \leq \frac{\pi}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}$$

e su di essi tuttavia riesce

$$k(x_n) - k(y_n) = \sin(x_n^2) - \sin(y_n^2) = 2$$

4.7. Esercizio. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitziana, cioé tale che esista una costante $L \geq 0$ tale che*

$$\forall x, y : \ |f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|$$

- *dimostrare che anche la funzione in modulo $|f(x)|$ é lipschitziana,*
- *assegnato $\varepsilon > 0$ determinare un corrispondente δ_ε tale che*

$$|x - y| \leq \delta_\varepsilon \quad \to \quad ||f(x)| - |f(y)|| \leq \varepsilon$$

- *esaminare se la funzione f^2 sia necessariamente uniformemente continua.*

Soluzione:

La nota disuguaglianza

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

implica che

$$||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$$

e quindi

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \to \quad ||f(x)| - |f(y)|| \leq L|x - y|$$

ovvero che anche $|f(x)|$ é lipschitziana.
Dalla disuguaglianza precedente segue inoltre che, scelto $\varepsilon > 0$ la corrispondente soglia δ_ε relativa alla f é buona anche per la $|f|$.
La funzione quadrato di una uniformemente continua puó, naturalmente su insiemi non compatti, essere non uniformemente continua: esempio $f(x) = x$ é uniformemente continua in tutto $\mathbb{R}$, mentre il suo quadrato x^2 non lo é.

4.8. Esercizio. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita come*

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

assegnato $\varepsilon > 0$ determinare δ_ε tale che

$$|x - y| \leq \delta_\varepsilon \quad \to \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Esaminare per quali scelte dei naturali m ed n le funzioni

$$g(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x^{2m} + 1}$$

siano uniformemente continue.

Soluzione:

Tenuto conto che

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1}$$

e che

$$f'(x) = \left(\frac{2}{x^2+1}\right)' = \frac{-4x}{(x^2+1)^2} \quad \to \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{x^2+1} \leq 2$$

si riconosce che $f(x)$ é lipschitziana, con $L = 2$, quindi uniformemente continua in $\mathbb{R}$.
Scelto $\varepsilon > 0$ riesce

$$\delta_\varepsilon = \varepsilon$$

Le funzioni $g(x)$ si comportano analogamente alla precedente f se

$$n \leq m$$

Infatti in tal caso esiste

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)$$

e l'uniforme continuitá in tutto $\mathbb{R}$ si riconosce dal fatto che

- in ogni intervallo chiuso e limitato $[-M, M]$ c'é uniforme continuitá,
- nel complementare, cioé per $|x| > M$ la funzione $g(x)$ prende valori prossimi al valore del limite.

Se invece $n > m$ allora $g(x)$ si esprime, a quoziente effettuato, come un polinomio di grado ≥ 2 e di un addendo lipschitziano.
Tenuto presente che i polinomi di grado ≥ 2 non sono uniformemente continui in $\mathbb{R}$ si riconosce che, per $n > m$ le g non sono uniformemente continue in tutto $\mathbb{R}$.

4.9. Esercizio. *Sia $f : [0, +\infty) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua, provare che se $g : [0, +\infty) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é continua e verifica la relazione di limite*

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x) - g(x)| = 0$$

allora anche g é uniformemente continua[1].

SOLUZIONE:

La funzione g in quanto continua in $[0, +\infty)$ é, di conseguenza uniformemente continua in ogni intervallo chiuso e limitato $[0, M]$.

[1] La dimostrazione di questo risultato fa uso del Teorema 4.19 di pag.88 che stabilisce che ogni funzione continua $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uniformemente continua.

Nella parte illimitata $(M, +\infty)$ i valori della g sono del resto molto simili a quelli della f:

$$g(x) = f(x) + \{g(x) - f(x)\}$$

Scelto $\varepsilon > 0$ determiniamo M in modo che riesca

$$\forall x > M : \quad |g(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Indichiamo poi con δ_1 la soglia corrispondente relativa a g nell'intervallo $[0, M]$, e con δ_2 la soglia relativa a f in tutto $\mathbb{R}$.
Posto

$$\delta_\varepsilon = \min\{\delta_1,\ \delta_3\}$$

la quantitá positiva determinata é la soglia relativa a g in tutto $\mathbb{R}$: infatti se $|x - y| \leq \delta_\varepsilon$ e se

- se $x, y \in [0, M]$ allora $|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$
- se $x, y \in (M, +\infty)$ allora $|g(x) - g(y)| \leq 3\varepsilon$
- se $x \in [0, M]$ e $y \in (M, +\infty)$ allora $|g(x) - g(y)| \leq |g(x) - g(M)| + |g(M) - g(y)| \leq 4\varepsilon$

4.10. Esercizio. *Sia $f : [0, +\infty) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua, e sia $\forall\varepsilon > 0 \quad \delta_\varepsilon > 0$ tale che*

$$|x - y| \leq \delta_\varepsilon \quad \to \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

- *fornire una maggiorazione per $|f(\delta_\varepsilon)|$*
- *fornire una maggiorazione per $|f(n\delta_\varepsilon)|$ per $n \in \mathbb{N}$*
- *detto δ_1 il valore corrispondente ad $\varepsilon = 1$ determinare una maggiorazione per $|f(x)|$.*

Soluzione:

$$f(\delta_\varepsilon) = f(0) + f(\delta_\varepsilon) - f(0) \quad \to \quad |f(\delta_\varepsilon)| \leq |f(0)| + \varepsilon$$

$$f(n\delta_\varepsilon) = f(n\delta_\varepsilon) - f([n-1]\delta_\varepsilon) + f([n-1]\delta_\varepsilon) - f([n-2]\delta_\varepsilon) + ... + f(\delta_\varepsilon) - f(0) + f(0)$$

da cui

$$|f(n\delta_\varepsilon)| \leq n\varepsilon + |f(0)|$$

$$f(x) = f(x) - f(x-1) + f(x-1) - f(x-2) + ... + f(\xi) - f(0) + f(0)$$

da cui

$$|f(x)| \leq [x] + 1$$

4.11. Esercizio. *Dimostrare, o confutare tramite contresempio, le seguenti affermazioni per funzioni* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*:*

- *Se* f *é uniformemente continua allora é limitata.*
- *Se* f *é continua e limitata allora é uniformemente continua.*
- *Se* f *é derivabile e la sua derivata é limitata allora* f *é uniformemente continua.*
- *Se* f *é indefinitamente derivabile allora* f *é uniformemente continua.*
- *Se* f *é indefinitamente derivabile e limitata allora* f *é uniformemente continua.*
- *Se* f *é continua ed esistono finiti i due limiti*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x), \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

allora f *é uniformemente continua.*

SOLUZIONE:

(1) la funzione $f(x) = x$ é uniformemente continua in $\mathbb{R}$ ma non é limitata,
(2) la funzione $f(x) = \sin(x^2)$ é continua e limitata ma non é uniformemente continua,
(3) sí perché allora é lipschitziana,
(4) no, la funzione $f(x) = \sin(x^2)$ é continua e indefinitamente derivabile ma non é uniformemente continua,
(5) no, la funzione $f(x) = \sin(x^2)$ é indefinitamente derivabile e limitata ma non é uniformemente continua,
(6) si: é uniformemente continua in ogni $[a, b]$ e nelle due semirette restanti é prossima ai valori limite, cioé prossima a una costante.

4.12. Esercizio*. *Dimostrare che ogni* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *uniformemente continua, trasforma successioni* $\{x_n\}$ *di Cauchy in successioni* $\{f(x_n)\}$ *ancora di Cauchy.*

SOLUZIONE:

Essendo f uniformemente continua $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon$ tale che

$$|a - b| \le \delta_\varepsilon \quad \to \quad |f(a) - f(b)| \le \varepsilon$$

ma allora

$$|x_p - x_q| \le \delta_\varepsilon \quad \to \quad |f(x_p) - f(x_q)| \le \varepsilon$$

Tenuto presente che la $\{x_n\}$ é, per ipotesi, una successione di Cauchy esisterá ν_ε tale che

$$\forall p, q \ge \nu_\varepsilon \quad \to \quad |x_p - x_q| \le \delta_\varepsilon$$

e quindi

$$\forall p, q \geq \nu_\varepsilon \quad \to \quad |f(x_p) - f(x_q)| \leq \varepsilon$$

4.13. Esercizio*. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e periodica di periodo $T > 0$: posto $g(x) = f(x^2)$*

- *determinare una successione di punti $\{x_n\}$ distinti tali che*
$$g(0) = g(x_1) = g(x_2) = ...$$
- *detti m ed M il minimo e il massimo di $f(x)$ determinare due successioni $\{\xi_n\}$ e $\{\eta_n\}$ tali che*
$$m = g(\xi_1) = g(\xi_2) = ... \qquad M = g(\eta_1) = g(\eta_2) = ...$$
- *dimostrare che $g(x) = f(x^2)$ é uniformemente continua se e solo se f é costante.*

SOLUZIONE:

Indichiamo con T il periodo della f: allora

$$g(0) = g(\sqrt{T}) = g(\sqrt{2T}) = g(\sqrt{3T}) = ... = g(\sqrt{nT}) = ...$$

Ammesso che

$$m = \min f(x) = f(\xi), \quad M = \max f(x) = f(\eta)$$

allora riesce

$$m = g(\sqrt{\xi}) = g(\sqrt{\xi + T}) = g(\sqrt{\xi + 2T}) = ...g(\sqrt{\xi + nT}) = ...$$

$$M = g(\sqrt{\eta}) = g(\sqrt{\eta + T}) = g(\sqrt{\eta + 2T}) = ...g(\sqrt{\eta + nT}) = ...$$

Tenuto conto che

$$\left|\sqrt{\eta + nT} - \sqrt{\xi + nT}\right| = \frac{|\eta - \xi|}{\sqrt{\eta + nT} + \sqrt{\xi + nT}}$$

e quindi

$$\left|\sqrt{\eta + nT} - \sqrt{\xi + nT}\right| \leq \frac{k}{\sqrt{n}}$$

con una opportuna costante positiva k.
Se g fosse uniformemente continua scelto

$$\varepsilon = \frac{M - m}{2}$$

e detta δ_ε la soglia corrispondente riuscirebbe, dopo un certo n

$$\left|\sqrt{\eta + nT} - \sqrt{\xi + nT}\right| \leq \delta_\varepsilon$$

e quindi

$$M - m = g(\sqrt{\eta + nT}) - g(\sqrt{\xi + nT}) \leq \frac{M - m}{2}$$

da cui

$$M - m = 0$$

ovvero f costante.