ANALISI MATEMATICA I

Soluzioni Foglio 5

30 aprile 2009

5.1. Esercizio. *Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste finito l'integrale*

$$\int_0^2 |x-1|^\alpha \, dx$$

SOLUZIONE:

Se $\alpha \geq 0$ allora la funzione $|x-1|^\alpha$ é continua in $[0,2]$ e quindi l'integrale assegnato esiste nel senso di Riemann.

Se $\alpha < 0$ la funzione $|x-1|^\alpha$ non é definita nel punto $x_0 = 1$: l'integrale assegnato deve essere considerato in senso improprio ed esiste se e solo se esistono, in senso improprio, i due integrali

$$\int_0^1 |x-1|^\alpha \, dx, \qquad \int_1^2 |x-1|^\alpha \, dx$$

ovvero se esistono i due limiti

$$\lim_{L \to 1} \int_0^L \frac{1}{(1-x)^{-\alpha}} \, dx, \qquad \lim_{M \to 1} \int_M^2 \frac{1}{(x-1)^{-\alpha}} \, dx$$

É noto che tali due limiti esistono se e solo se

$$-\alpha < 1 \quad \to \quad \alpha > -1$$

Riassumendo: l'integrale assegnato esiste, nel senso di Riemann o nel senso generalizzato, se e solo se

$$\alpha > -1$$

5.2. Esercizio. *Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste l'integrale improprio*

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x^\alpha} \, dx$$

SOLUZIONE:

Qualunque sia α la funzione integranda assegnata é positiva: quindi l'esistenza o meno dell'integrale improprio si decide *per confronto*.

Se $\alpha \leq 1$ la funzione assegnata é continua e limitata in $(0, \pi)$: infatti tenuto conto del limite notevole si ha

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \to \quad \left|\frac{\sin(x)}{x^\alpha}\right| = \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| |x|^{1-\alpha} \leq |x|^{1-\alpha} \leq \pi$$

.

Essendo la funzione integranda continua e limitata in $(0, \pi)$ esiste certamente

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\, dx = \lim_{L \to 0} \int_L^\pi \frac{\sin(x)}{x^\alpha}\, dx$$

Se $\alpha < 2$ riesce

$$\left|\frac{\sin(x)}{x^\alpha}\right| \leq |x|^{1-\alpha}$$

e la funzione

$$|x|^{1-\alpha}$$

per via dell'esponente $\gamma = 1 - \alpha > -1$ é dotata di integrale improprio in $(0, \pi)$: quindi, per confronto esiste anche l'integrale improprio assegnato.

Se $2 \leq \alpha$ invece, scritta la funzione integranda come

$$\frac{\sin(x)}{x^\alpha} = \frac{\sin(x)}{x} \frac{1}{x^{\alpha-1}}$$

e riconosciuto che per $x \approx 0$ riesce

$$\frac{\sin(x)}{x} \geq \frac{1}{2}$$

si ha

$$\frac{\sin(x)}{x^\alpha} \geq \frac{1}{2} \frac{1}{x^{\alpha-1}}$$

Essendo $\alpha > 2$ l'esponente $\gamma = \alpha - 1$ della espressione a destra, minorante la nostra funzione integranda, é maggiore di 1, e quindi non esiste finito l'integrale improprio.

Per confronto non esiste neanche quindi l'integrale assegnato.

Riassumendo: l'integrale assegnato esiste nel senso di Riemann o in senso improprio se e solo se

$$\alpha < 2$$

5.3. Esercizio. *Provare che esiste l'integrale improprio*

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,dx$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

L'esistenza dell'integrale assegnato equivale all'esistenza dei due integrali

$$\int_0^1 \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,dx$$

$\boxed{\text{Primo integrale:}}$

Tenuto conto che esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

si riconosce che la funzione integranda é continua e limitata in $(0,1)$ e, quindi, esiste l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,dx = \lim_{L\to 0}\int_L^1 \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,dx$$

$\boxed{\text{Secondo integrale:}}$

Tenuto conto che

$$\forall x \geq 1: \quad \left|\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right| \leq \frac{2}{x^2}$$

e tenuto conto che la funzione maggiorante

$$\frac{2}{x^2}$$

é dotata, per via dell'esponente 2, di integrale improprio finito su $[1,+\infty)$, se ne deduce, per confronto che esiste anche l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right|\,dx$$

e, quindi, anche l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,dx$$

5.4. Esercizio. *Indicata con $[x]$ la funzione parte intera e con*

$$f(x) = \frac{1}{1+[x]^2}$$

- *provare che sono ben definite le due quantitá*

$$A = \int_0^{+\infty} f(x)dx, \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

- *confrontare le due precedenti quantitá A e B con la*

$$C = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

- *confrontare le tre quantitá A, B, C con $\pi/2$.*

Soluzione:

La funzione $[x]$ é una funzione costante a tratti:

- in tutto l'intervallo $[0, 1)$ vale 0,
- in tutto l'intervallo $[1, 2)$ vale 1,
- ecc.

quindi anche la funzione $f(x)$ é una funzione costante a tratti:

- in tutto l'intervallo $[0, 1)$ $f(x)$ vale 1,
- in tutto l'intervallo $[1, 2)$ $f(x)$ vale $1/2$,
- ecc.

Quindi $f(x)$ é integrabile nel senso di Riemann in ogni intervallo $[0, L]$.

Le due quantitá $A,\ B$ assegnate esistono per (almeno) due motivi:

$$x - 1 \leq [x] \quad \to \quad |f(x)| \leq \frac{1}{1+(x-1)^2}$$

da cui

$$\forall x > 1 \quad |f(x)| \leq \frac{1}{2x^2}$$

da cui essendo la funzione maggiorante dotata di integrale improprio su $[1, +\infty)$ esisterá anche l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} |f(x)|dx$$

e quindi anche

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

e, tenuto conto che $f(x)$ é continua in $[0, 1]$ allora esiste l'integrale

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx$$

Il secondo motivo riguarda il fatto che $f(x)$ é positiva, decrescente e infinitesima per $x \to +\infty$: é infatti noto che, in questo caso,

$$A = \int_0^{+\infty} f(x)dx \qquad B = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

o sono entrambe infiniti o sono entrambi finiti.
Tenuto conto che

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

é convergente (i suoi termini sono maggiorati dai $1/n^2$) allora B é finito e, quindi anche A é finito.
Tenuto conto che

$$\forall x \in [n, n+1) \quad \to \quad \int_n^{n+1} f(x)dx = f(n) \int_n^{n+1} dx = f(n)$$

riesce

$$A = B$$

Tenuto conto che

$$f(x) \geq \frac{1}{1+(x-1)^2}$$

riesce

$$A = B \geq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(x-1)^2} dx = \arctan(x-1)|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

5.5. Esercizio. *Assegnata la funzione*

$$f(x) = \frac{1+x}{x^2(1-x)}$$

- *determinare l'insieme di definizione,*
- *determinare in quali intervalli o in quali semirette é limitata,*
- *determinare in quali intervalli (a, b) é integrabile in senso classico o improprio.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La funzione razionale $f(x)$ assegnata é definita in tutto $\mathbb{R}$ privato dei due soli valori 0 e 1 nei quali il polinomio a denominatore si annulla.

$f(x)$ é limitata in ogni intervallo chiuso e limitato che non contenga né 0 né 1.

É anche limitata in ogni semiretta $E : \{x \leq \alpha\}$ o $F : \{x \geq \beta\}$ con $\alpha < 0$ e $\beta > 1$.

$f(x)$ é integrabile nel senso di Riemann in ogni intervallo chiuso e limitato che non contenga né 0 né 1.

É integrabile in senso improprio in ogni semiretta $E : x\{\leq \alpha\}$ o $F : \{x \geq \beta\}$ con $\alpha < 0$ e $\beta > 1$.

$f(x)$ non é integrabile, neanche in senso improprio, in alcun intervallo limitato o illimitato che contenga all'interno o ad un estremo uno dei due valori 0 o 1.

5.6. Esercizio. *Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste l'integrale improprio*

$$\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) dx$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La funzione integranda

$$\sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$$

é limitata e continua in $(0, \pi]$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
Quindi l'integrale assegnato esiste, come integrale improprio, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

5.7. Esercizio. *Determinare quale dei seguenti integrali esiste finito in senso improprio*

$$\int_0^{+\infty} \sin^2(x)\, dx, \quad \int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x} \sin(x)\, dx$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$\boxed{\int_0^{+\infty} \sin^2(x)\, dx}$

La funzione integranda, $\sin^2(x)$, é periodica e positiva: posto

$$A = \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\, dx > 0$$

riesce

$$\int_0^{2n\pi} \sin^2(x)\, dx = nA \uparrow +\infty$$

quindi non esiste l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \sin^2(x)\, dx$.

$\boxed{\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx}$

La funzione integranda, $\sin(x^2)$, non é né periodica né positiva: quindi non possiamo escludere l'esistenza dell'integrale su $[0, +\infty)$ con il ragionamento del caso precedente.
Servendosi della sostituzione $x^2 = t,\;\; x = \sqrt{t}$ si ha, per ogni $L > 1$,

$$\int_1^L \sin(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{L^2} \sin(t) t^{-1/2} dt$$

integrando per parti si ha, del resto,

$$\int_0^{L^2} \sin(t)t^{-1/2}dt = -\cos(t)t^{-1/2}\Big|_1^{L^2} - \frac{1}{2}\int_0^{L^2} \cos(t)t^{-3/2}dt$$

da cui

$$(1) \qquad \int_1^L \sin(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\left\{\cos(1) - \frac{\cos(L^2)}{L} - \frac{1}{2}\int_0^{L^2} \frac{\cos(t)}{t^{3/2}}dt\right\}$$

Tenuto presente che la funzione integranda nell'ultimo integrale a secondo membro verifica la maggiorazione

$$\forall t > 1 : \quad \left|\frac{\cos(t)}{t^{3/2}}\right| \le \frac{1}{t^{3/2}}$$

si riconosce che esiste il limite per $L \to +\infty$ dell'espressione a secondo membro della (1) e, quindi, esiste l'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\, dx$.

(cfr. Note, Cap.4, pag. 18, Integrale di Fresnel)

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x} \sin(x)\, dx}$$

L'esistenza dell'integrale improprio deriva, piú in generale, dall'esistenza degli integrali impropri

$$\int_0^{+\infty} f(x)\sin(x)dx$$

relativi a funzioni $f(x)$

- positive,
- decrescenti,
- infinitesime per $x \to +\infty$

Infatti nel caso assegnato

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

soddisfa tutti e tre tali requisiti.

Il risultato puó, del resto, essere ottenuto anche direttamente come segue

$$\int_0^L \frac{1}{1+x}\sin(x)\,dx = -\cos(x)(1+x)^{-1}\Big|_0^L - \int_0^L \cos(x)(1+x)^{-2}\,dx$$

da cui

$$\int_0^L \frac{1}{1+x}\sin(x)\,dx = -1+\cos(L)(1+L)^{-1} - \int_0^L \cos(x)(1+x)^{-2}\,dx$$

e osservando, con gli stessi ragionamenti precedenti che esiste certamente il limite per $L \to +\infty$ dell'espressione a secondo membro.

5.8. Esercizio. *Assegnata la funzione*

$$U(x) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x-y|}}\,dy \qquad x \in \mathbb{R}$$

- *provare che l'integrale che definisce $U(x)$ esiste in senso improprio $\forall x \in \mathbb{R}$*
- *calcolare il valore $U(0)$*
- *calcolare $\lim\limits_{|x|\to+\infty} U(x)$.*

SOLUZIONE:

La funzione integranda, come funzione di y, é continua in $[-1,1]$ se $x \notin [-1,1]$: quindi l'integrale che definisce $U(x)$ esiste, nel senso di Riemann, per ogni $x \notin [-1,1]$.
Ove invece $x \in [-1,1]$ l'integrale esiste se e solo se esistono i due integrali impropri

$$\int_{-1}^{x} \frac{1}{\sqrt{|x-y|}}\,dy, \qquad \int_{x}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x-y|}}\,dy$$

cioé esistano i due integrali

$$\int_{-1}^{x} \frac{1}{(x-y)^{1/2}}\,dy, \qquad \int_{x}^{1} \frac{1}{(y-x)^{1/2}}\,dy$$

Tenuto conto che le due funzioni integrande divergono per $y \to x$ con l'esponente

$$1/2 \, < \, 1$$

si riconosce che esistono i due integrali impropri e, quindi che $U(x)$ é definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

$$U(0) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|y|}}\,dy = 2\int_0^1 y^{1/2}\,dy = \frac{4}{3}$$

Per calcolare $\lim_{|x|\to+\infty} U(x)$ ovviamente consideriamo $x \notin [-1,1]$: riesce quindi

$$\begin{cases} x > 1 \quad \to \quad |x-y| \geq |x-1| \\ x < -1 \quad \to \quad |x-y| \geq |x+1| \end{cases}$$

In ogni caso quindi se $x \notin [-1,1]$ riesce

$$\frac{1}{\sqrt{|x-y|}} \leq \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} + \frac{1}{\sqrt{|x+1|}}$$

e, quindi,

$$U(x) \leq \left(\frac{1}{\sqrt{|x-1|}} + \frac{1}{\sqrt{|x+1|}} \right) \int_{-1}^{1} dy = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{|x-1|}} + \frac{1}{\sqrt{|x+1|}} \right)$$

Riesce pertanto

$$\lim_{|x|\to+\infty} U(x) = 0$$

5.9. Esercizio. *Determinare quale dei seguenti integrali esiste (finito) in senso improprio*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin(x)}\, dx, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2(x)}\, dx, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin(x)}}\, dx$$

corredando le risposte con i grafici delle tre funzioni proposte in $(0, \pi/2)$.

Soluzione:

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin(x)}\, dx}$$

La funzione integranda puó essere scritta come

$$\frac{1}{\sin(x)} = \frac{x}{\sin(x)} \frac{1}{x}$$

da cui, tenuto conto che

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$$

si riconosce che

$$x \approx 0 \quad \to \quad \frac{1}{\sin(x)} \approx \frac{1}{x}$$

e che pertanto, tenuto conto che non esiste l'integrale improprio di $1/x$ su $[0,\pi]$ non esiste neanche, sullo stesso intervallo, l'integrale improprio di $1/\sin(x)$.

$\boxed{\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2(x)}\, dx}$

Con lo stesso procedimento del caso precedente

$$\frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{x^2}{\sin^2(x)}\,\frac{1}{x^2}$$

implica che

$$x \approx 0 \quad \to \quad \frac{1}{\sin^2(x)} \approx \frac{1}{x^2}$$

e che pertanto, tenuto conto che non esiste l'integrale improprio di $1/x^2$ su $[0, \pi]$ non esiste neanche, sullo stesso intervallo, l'integrale improprio di $1/\sin^2(x)$.

$\boxed{\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin(x)}}\, dx}$

Con lo stesso procedimento del caso precedente

$$\frac{1}{\sqrt{\sin(x)}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin(x)}}\,\frac{1}{\sqrt{x}}$$

implica che

$$x \approx 0 \quad \to \quad \frac{1}{\sqrt{\sin(x)}} \approx \frac{1}{\sqrt{x}}$$

e che pertanto, tenuto conto che esiste l'integrale improprio di $1/\sqrt{x}$ su $[0, \pi]$ esiste anche, sullo stesso intervallo, l'integrale improprio di $1/\sqrt{\sin(x)}$.

5.10. Esercizio. *Determinare quale dei seguenti integrali esiste (finito) in senso improprio*

$$\int_0^{\pi/2} \tan(x)dx, \quad \int_0^{\pi/2} \tan^2(x)dx, \quad \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(x)}dx$$

corredando le risposte con i grafici delle tre funzioni proposte in $(0, \pi/2)$.

SOLUZIONE:

$\boxed{\int_0^{\pi/2} \tan(x)dx}$

La funzione $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ diverge per $x \to \pi/2$: tenuto conto che

$$\forall x \in [\pi/4, \pi/2] : \ \cos(x) \leq \frac{\pi}{2} - x, \qquad \sin(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

riesce

$$\forall x \in [\pi/4, \pi/2] : \ \tan(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}$$

e quindi poiché la funzione minorante non possiede integrale improprio su $[0, \pi/2]$ non lo possiede neanche $\tan(x)$.

Riassumendo: non esiste l'integrale improprio $\int_0^{\pi/2} \tan(x)dx$.

$\boxed{\int_0^{\pi/2} \tan^2(x)dx}$

Tenuto presente che

$$\forall x \in [\pi/4, \pi/2] : \ \ \tan^2(x) \geq \tan(x)$$

e tenuto conto che non esiste l'integrale improprio $\int_0^{\pi/2} \tan(x)dx$ allora non esiste neanche l'integrale improprio $\int_0^{\pi/2} \tan^2(x)dx$

$\boxed{\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(x)}dx}$

Tenuto conto che

$$\forall x \in [0, \pi/2] : \ \cos(x) \geq \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

come si riconosce facilmente confrontando il grafico di $\cos(x)$ con la retta $y = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ riesce, per ogni $x \in [0, \pi/2]$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \quad \to \quad \sqrt{\tan(x)} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}$$

si riconosce quindi che, poiché la funzione maggiorante é dotata di integrale improprio su $[0, \pi/2]$, esiste anche, sullo stesso intervallo, l'integrale improprio di $\sqrt{\tan(x)}$.