ANALISI MATEMATICA I

Soluzioni Foglio 6

6 maggio 2009

6.1. Esercizio. *Siano $f_k(x) = x^k$ definite nell'intervallo $[0,1]$.*

- *Dimostrare che $\lim_k f_k(x)$ esiste per ogni punto dell'intervallo, ma che la convergenza non è uniforme.*
- *Dimostrare invece che la convergenza è uniforme sull'intervallo $[0,b]$, se $0 < b < 1$.*

SOLUZIONE:

$$\forall x_0 \in [0,1] \quad \lim_{n\to\infty} x_0^n = \begin{cases} 0 & se \quad 0 \le x_0 < 1 \\ 1 & se \quad x_0 = 1 \end{cases}$$

Tenuto presente che le funzioni $\{x^n\}$ delle successione sono continue in $[0,1]$ mentre la funzione limite é discontinua nel punto $x_0 = 1$ si deduce che la convergenza della successione non puó essere uniforme in $[0,1]$.
La convergenza é uniforme in $[0,b]$, se $0 < b < 1$ in quanto

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon : \ n \ge n_\varepsilon \quad \to \quad b^n \le \varepsilon$$

e

$$\forall x \in [0,b], \ \forall n > n_\varepsilon : \ x^n \le b^n \le \varepsilon$$

6.2. Esercizio. *Siano*

$$f_k(x) = \frac{x^2}{x^2+k}, \qquad k = 1,\,2,\,3,\ldots$$

definite su $\mathbb{R}$:

- *studiare la convergenza delle $\{f_k(x)\}$ su un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$,*
- *studiare la convergenza puntuale e uniforme delle f_k su $\mathbb{R}$.*

SOLUZIONE:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ \lim_{k\to\infty} \frac{x^2}{x^2+k} = 0$$

La convergenza della successione $\{f_k(x)\}$ é uniforme in ogni insieme limitato, infatti

$$|x| \le M \quad \to \quad \frac{x^2}{x^2+k} \le \frac{M^2}{k}$$

Non é uniforme in tutto $\mathbb{R}$ infatti, tenuto presente che

$$\forall k: \quad |f_k(x)| \leq 1, \quad \lim_{|x|\to\infty} f_k(x) = 1$$

riesce

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_k(x)| = 1$$

contrariamente al carattere infinitesimo che tali estremi superiori dovrebbero avere in caso di convergenza uniforme.

6.3. Esercizio. *Assegnate le funzioni*

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}, \qquad x \in [0,1]$$

- *disegnare il grafico di* $f_1(x), \ f_2(x), \ f_3(x)$,
- *riconoscere che riesce* $\forall x \in [0,1]: \ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$
- *esaminare se* $\lim_n \int_0^1 f_n(x)dx \neq 0$
- *valutare se le* $\{f_n(x)\}$ *convergano uniformemente per* $x \in [0,1]$.

SOLUZIONE:

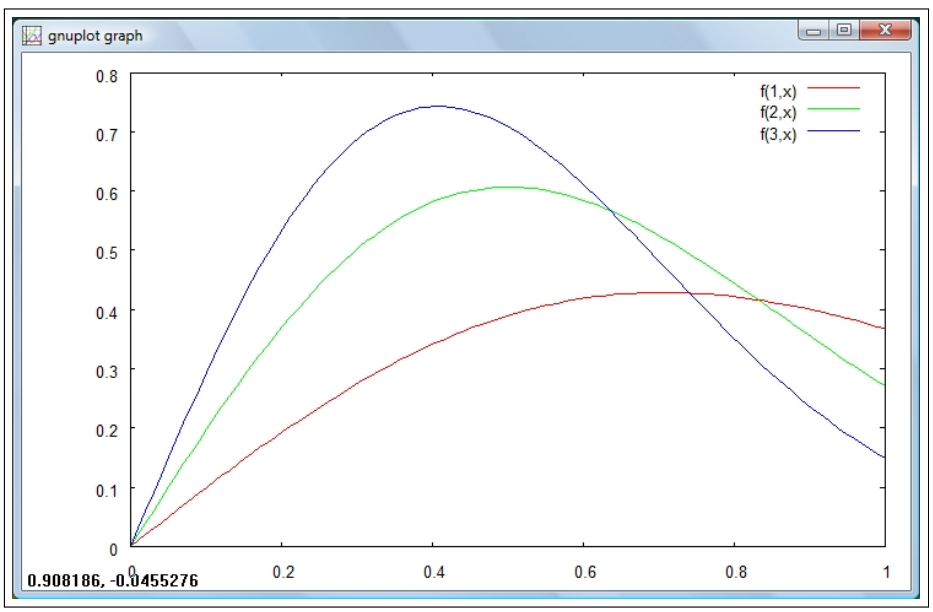

FIGURA 1. $f_n(x) = nxe^{-nx^2}, \qquad x \in [0,1], \ n = 1,2,3$

La nota disuguaglianza

$$\forall t \geq 0: \quad e^t \geq 1 + t + \frac{1}{2}t^2$$

implica

$$\forall x \neq 0: \quad nxe^{-nx^2} \leq \frac{nx}{1+nx^2+\frac{1}{2}n^2x^4} \leq \frac{2}{x^3}\frac{1}{n} \to 0$$

$$\int_0^1 nxe^{-nx^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{-nx^2}\right)' dx = 1 - e^{-n} \to 1$$

Tenuto conto che la successione $\{nxe^{-nx^2}\}$ ha limite $f(x) \equiv 0$ in $[0,1]$ e che

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

si riconosce che la convergenza della successione non é uniforme.

6.4. Esercizio. *Assegnata la successione*

$$f_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{k}}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad k = 1,\, 2,\, 3, \ldots$$

riconoscere che

- *la successione* $\{f_n(x)\}$ *converge uniformemente a* $f(x) = |x|$
- *esaminare se la successione delle derivate* $\{f_n'(x)\}$ *converga uniformemente.*

Soluzione:

Tenuto conto che

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \lim_{k\to\infty}\left(x^2+\frac{1}{k}\right) = x^2$$

se ne ricava, stante la continuitá della funzione *radice quadrata* che

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \lim_{k\to\infty}\sqrt{x^2+\frac{1}{k}} = \sqrt{x^2} = |x|$$

La successione delle derivate non puó essere uniformemente convergente in $\mathbb{R}$: se lo fosse infatti dovrebbe essere derivabile in $\mathbb{R}$ anche la funzione limite $|x|$, mentre, come ben noto, essa non é derivabile in $x_0 = 0$.

6.5. Esercizio. *Trovare una successione di funzioni $f_n(x)$ continue in $\mathbb{R}$ tale che,*

- *riesca $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, essendo $\chi_{[a,b]}(x)$ la funzione caratteristica dell'intervallo $[a,b]$*
- *valutare se tale successione puó risultare uniformemente convergente in $\mathbb{R}$.*

SOLUZIONE:

La funzione stessa $\chi_{[a,b]}(x)$ non é continua in $\mathbb{R}$ per via delle due discontinuitá che presenta in a e in b.
Le funzioni lineari a tratti

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \leq a - \frac{1}{n} \\ n(x - a + \frac{1}{n}) & se \quad a - \frac{1}{n} < x < a \\ 1 & se \quad a \leq x \leq b \\ -n(x - b - \frac{1}{n}) & se \quad b < x < b + \frac{1}{n} \\ 0 & se \quad b + \frac{1}{n} < x \end{cases}$$

sono continue e convergono a $\chi_{[a,b]}(x)$ in ogni $x \in \mathbb{R}$.
La convergenza delle $\{f_n(x)\}$ tuttavia non puó essere uniforme in $\mathbb{R}$ perché la loro funzione limite $\chi_{[a,b]}(x)$ non é continua come invece avrebbe dovuto essere se la convergenza fosse stata uniforme.

6.6. Esercizio. *Assegnata la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ assolutamente convergente, provare che la serie di funzioni*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

è uniformemente convergente per $x \in [-1, 1]$.

SOLUZIONE:

La serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

verifica per ogni $x \in [-1, 1]$ il test di Weierstrass: infatti

- $\forall x \in [-1, 1]: \quad |a_k x^k| \leq |a_k|$
- la serie $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ é, per ipotesi, assolutamente convergente.

Quindi la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

è uniformemente convergente per $x \in [-1, 1]$.

6.7. Esercizio. *Assegnata la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{1+k^4}$$

- *dimostrare che è convergente in tutto* $\mathbb{R}$*,*
- *dimostrare che la sua somma è continua e derivabile con derivata continua in tutto* $\mathbb{R}$*.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

Tenuto conto che gli addendi verificano

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \left| \frac{\sin(kx)}{1+k^4} \right| \leq \frac{1}{1+k^4} \tag{1}$$

si deduce, per confronto con la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k^4}$$

la assoluta convergenza della serie assegnata in tutto $\mathbb{R}$ e, quindi di conseguenza anche la convergenza della stessa serie in tutto $\mathbb{R}$:

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{1+k^4}$$

Tenuto conto della (1) si riconosce anche che la serie assegnata, serie di addendi continui, verifica il test di Weierstrass, quindi é uniformemente convergente: quindi la sua somma $S(x)$ é continua in $\mathbb{R}$
Considerato che la serie delle derivate

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\,\cos(kx)}{1+k^4}$$

ha addendi che soddisfano una disuguaglianza analoga

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \left| \frac{k\,\cos(kx)}{1+k^4} \right| \leq \frac{k}{1+k^4} \tag{2}$$

si riconosce che anche la serie derivata soddisfa il test di Weierstrass e quindi é anch'essa uniformemente convergente: pertanto $S(x)$ é derivabile e riesce

$$S'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\ \cos(kx)}{1+k^4}$$

6.8. Esercizio. *Assegnate le tre serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2kx^{2k-1}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

determinare

- *in quali intervalli esse sono convergenti,*
- *in quali sono uniformemente convergenti,*
- *quali relazioni intercorrano fra le loro somme.*

Soluzione:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}}$$

Si tratta della nota serie di potenze *geometrica*, riferita a x^2, che converge in $(-1, 1)$, converge uniformemente in ogni intervallo $[a, b] \subset (-1, 1)$.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} 2kx^{2k-1}}$$

Si tratta della serie di potenze derivata della nota serie di potenze *geometrica*, riferita a x^2, che converge in $(-1, 1)$, converge uniformemente in ogni intervallo $[a, b] \subset (-1, 1)$.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}}$$

Si tratta della serie di potenze primitiva della nota serie di potenze *geometrica*, riferita a x^2, che converge in $(-1, 1)$, converge uniformemente in ogni intervallo $[a, b] \subset (-1, 1)$.
Le relazioni fra le somme delle tre serie sono pertanto

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} & = \frac{1}{1-x^2} \\ \sum_{k=0}^{\infty} 2k x^{2k-1} & = \frac{2x}{(1-x^2)^2} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} & = \sqrt{\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} \end{cases}$$

6.9. Esercizio. *Assegnata la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

- *provare che è uniformemente convergente in ogni intervallo chiuso e limitato* $[a, b]$*,*
- *provare inoltre che la serie non è uniformemente convergente in tutto* $\mathbb{R}$*,*
- *detta* e^x *la sua somma provare che riesce*

$$(e^x)' = e^x$$

SOLUZIONE:

La serie di potenze, detta *serie esponenziale*, assegnata ha intervallo di convergenza $(-\infty, +\infty)$: quindi, come tutte le serie di potenze converge uniformemente in ogni intervallo chiuso $[a, b]$ contenuto nell'intervallo aperto di convergenza: quindi, in questo caso, la *serie esponenziale* converge uniformemente in ogni intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.

La *serie esponenziale* non é uniformemente convergente in R: infatti le somme parziali, in quanto polinomi, divergono per $|x| \to \infty$, mentre, com'é noto, la funzione e^x, somma della *serie esponenziale* ha limite 0 per $x \to -\infty$, quindi

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |S_m(x) - e^x| = +\infty$$

condizione che esclude la convergenza uniforme.

Riesce, come per tutte le serie di potenze in ogni punto interno all'intervallo di convergenza,

$$(e^x)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

6.10. Esercizio. *Assegnata la successione*

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \leq 0 \\ nx & se \quad 0 \leq x \leq 1/n \\ 1 & se \quad 1/n \leq x \end{cases}$$

- *disegnare i grafici delle prime quattro funzioni,*
- *determinare il limite $f(x)$ della successione per $x \in \mathbb{R}$,*
- *decidere se la convergenza sia uniforme,*
- *verificare se*

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)dx$$

SOLUZIONE:

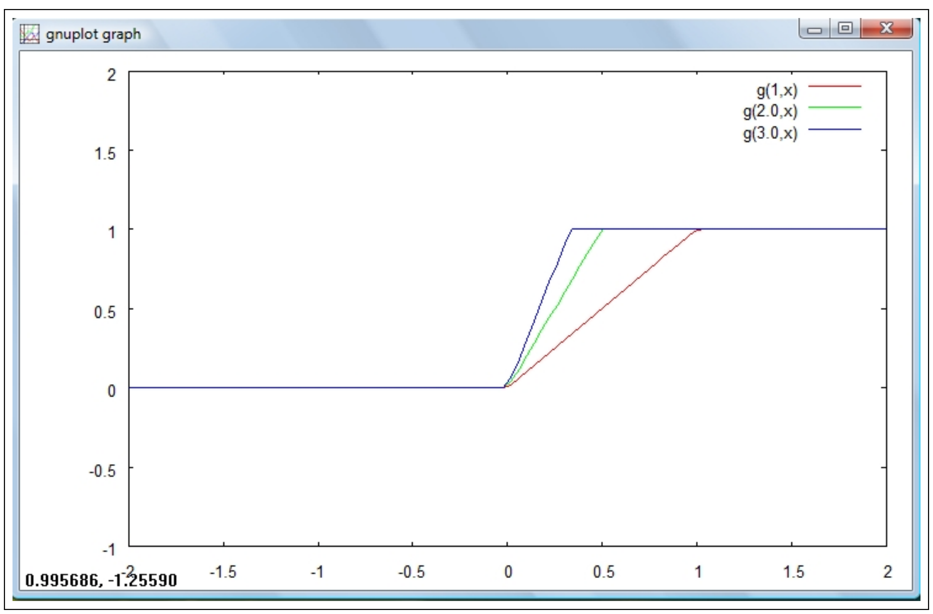

FIGURA 2. $g_n(x), \quad n = 1, 2, 3$

Riesce

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \leq 0 \\ 1 & se \quad x > 0 \end{cases}$$

Tenuto conto che:

- le funzioni $g_n(x)$ della successione sono continue in $\mathbb{R}$,

- il loro limite non é continuo in $\mathbb{R}$ (é discontinuo in $x_0 = 0$),

se ne conclude che la convergenza non puó essere uniforme in $\mathbb{R}$.

$$\int_0^1 f(x)dx = 1, \quad \int_0^1 g_n(x)dx = 1 - \frac{1}{n}$$

Nonostante che la convergenza in tutto $\mathbb{R}$ non sia uniforme riesce

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)dx$$