ANALISI MATEMATICA I

Soluzioni Foglio 7

14 maggio 2009

7.1. Esercizio. *Assegnata l'equazione differenziale lineare di primo ordine*

$$y' + y = 1$$

- *determinarne tutte le soluzioni,*
- *determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy relativo alla condizione iniziale $y(0) = 2$,*
- *determinare $\inf_{x \in \mathbb{R}} y(x)$.*

Soluzione:

-

  soluzioni della omogenea: $y_0(x) = ce^{-x}$
  soluzione della completa: $\overline{y}(x) = 1$
  Tutte le soluzioni dell'equazione completa:

$$y(x) = y_0(x) + \overline{y}(x) = ce^{-x} + 1$$

- $y(0) = 2: \quad \to \quad c + 1 = 2 \quad \to \quad y(x) = e^{-x} + 1,$
- $\inf_{x \in \mathbb{R}} y(x) = \inf_{x \in \mathbb{R}} (e^{-x} + 1) = 1.$

7.2. Esercizio. *Assegnato il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) + x\,y(x) = 0 \\ y(0) = 10 \end{cases}$$

- *determinare la soluzione $y(x)$,*
- *determinare i punti ξ nei quali riesce $y(\xi) = 5$*
- *determinare $\inf_{x \in \mathbb{R}} y(x)$ e $\sup_{x \in \mathbb{R}} y(x)$.*

Soluzione:

- Le soluzioni sono $y(x) = ce^{-x^2/2}$ da cui $y(0) = 10 \quad \to \quad y(x) = 10e^{-x^2/2}$
- $10e^{-x^2/2} = 5 \quad \to \quad \frac{x^2}{2} = \log(2) \quad \to \quad \xi = \pm\sqrt{2\log(2)}$
- $\inf_{x \in \mathbb{R}} 10e^{-x^2/2} = 0, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} 10e^{-x^2/2} = 10$

7.3. Esercizio. *Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale lineare omogenea*

$$y'(x) + |x|\, y(x) = 0$$

- *disegnare il grafico della soluzione del problema di Cauchy* $y(0) = 1$
- *provare che le soluzioni sono tutte funzioni monotone,*
- *determinare*

$$\lim_{x \to -\infty} y'(x)$$

essendo $y(x)$ *una qualsiasi soluzione dell'equazione.*

SOLUZIONE:

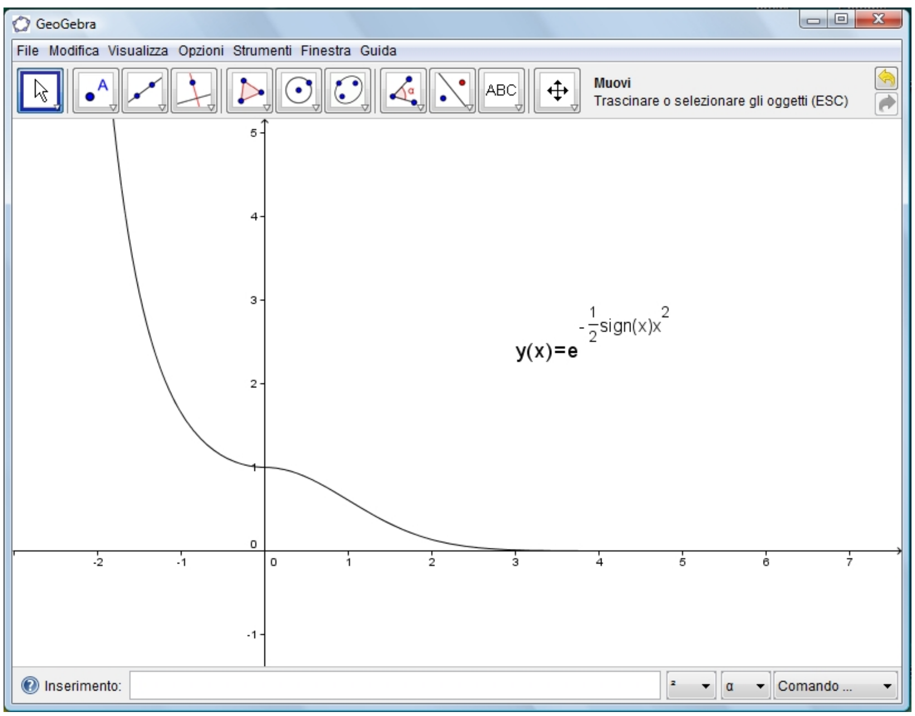

FIGURA 1. $y(x) = e^{-A(x)}$

- Una primitiva di $|x|$ é

$$A(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x)}{2} x^2$$

pertanto tutte le soluzioni dell'equazione sono

$$y_0(x) = ce^{-A(x)}$$

La soluzione richiesta é pertanto $y(x) = e^{-A(x)}$

- La funzione $A(x)$ é crescente, quindi $-A(x)$ é decrescente, quindi $e^{-A(x)}$ é decrescente.

  Le soluzioni $y_0(x) = ce^{-A(x)}$ sono pertanto monotone, decrescenti se $c \geq 0$, crescenti se $c < 0$
- $$\lim_{x\to-\infty} -|x|\, e^{-A(x)} = \lim_{x\to-\infty} -|x|\, e^{x^2/2} = -\infty$$

7.4. Esercizio. *Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale lineare non omogenea*

$$y'(x) + x^2 y(x) = x^2$$

- *determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy $y(0) = 1$,*
- *valutare se si tratta di una funzione pari, cioé $y(-x) = y(x)$*
- *calcolare $y'(0)$.*

SOLUZIONE:

- Le soluzioni dell'omogenea sono $y_0(x) = ce^{-x^3/3}$, una soluzione della completa é $y(x) = 1$, pertanto tutte le soluzioni dell'equazione completa sono

  $$y(x) = ce^{-x^3/3} + 1$$

  La soluzione che soddisfa la condizione $y(0) = 1$ é pertanto la soluzione d'equilibrio stessa

  $$y(x) \equiv 1$$
- $y(x) \equiv 1$ é ovviamente pari,
- $y'(0) = 0$

7.5. Esercizio. *Assegnata l'equazione differenziale*

$$y'(x) + 2y(x) = \sin(x)$$

- *determinare tutte le soluzioni,*
- *verificare se esistono soluzioni periodiche,*
- *detta $y_0(x)$ la soluzione che verifica la condizione iniziale $y(0) = 0$ determinare*

  $$\inf_{x\in\mathbb{R}} y_0(x), \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} y_0(x)$$

SOLUZIONE:

- Le soluzioni dell'omogenea sono $y_0(x) = ce^{-2x}$, una soluzione della completa si trova nella famiglia
$$\overline{y}(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$$
Sostituendo si perviene al sistema
$$\begin{cases} A + 2B = 0 \\ 2A - B = 1 \end{cases} \quad \to \quad A = \frac{2}{5},\ B = -\frac{1}{5}$$
Tutte le soluzioni sono pertanto
$$y(x) = ce^{-2x} + \frac{2}{5}\sin(x) - \frac{1}{5}\cos(x)$$
- esiste una sola soluzione periodica quella che si ottiene nella precedente famiglia prendendo $c = 0$
- la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 0$ é quella relativa alla scelta $c = \frac{1}{5}$
-

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{5}e^{-2x} + \frac{2}{5}\sin(x) - \frac{1}{5}\cos(x)\right) = \min_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{2}{5}\sin(x) - \frac{1}{5}\cos(x)\right)$$
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{5}e^{-2x} + \frac{2}{5}\sin(x) - \frac{1}{5}\cos(x)\right) = +\infty$$

7.6. Esercizio. *Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale lineare di secondo ordine, omogenea a coefficienti costanti*
$$y''(x) - y(x) = 0$$

- *disegnare i grafici di tre soluzioni diverse dell'equazione,*
- *esaminare se esistano soluzioni limitate in* $\mathbb{R}$*,*
- *esaminare quali soluzioni sono convesse.*

Soluzione:

- Le soluzioni dell'equazione del secondo ordine assegnate sono tutte e sole le funzioni della famiglia
$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$$
- L'unica soluzione limitata é quella identicamente nulla.
- Le soluzioni, vedi Figura 2, sono convesse negli intervalli in cui sono positive, sono concave negli intervalli in cui sono negative, infatti
$$y''(x) - y(x) = 0 \quad \to \quad y'' = y$$

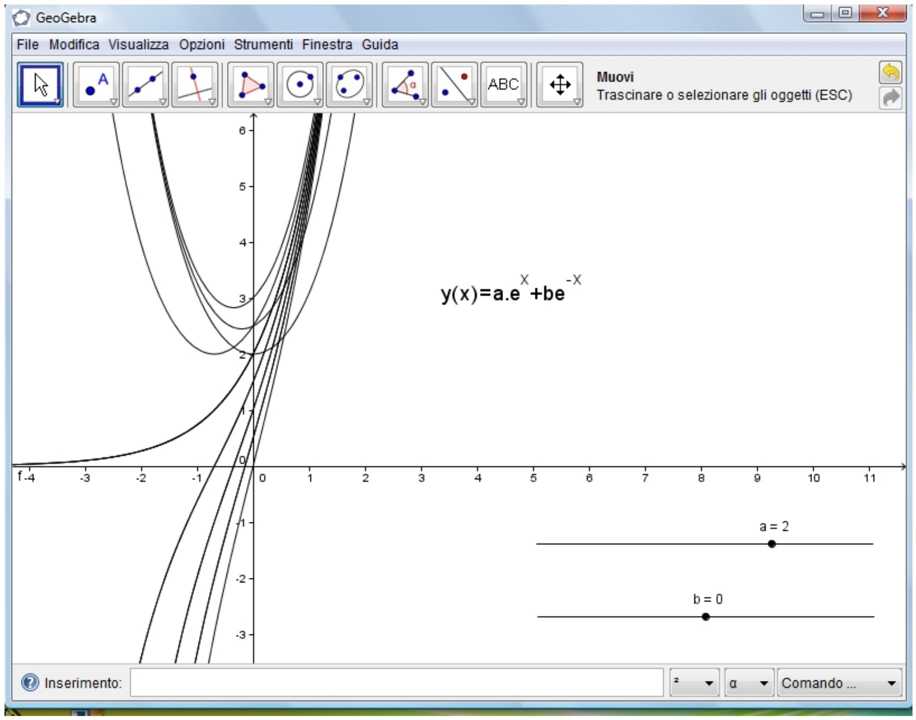

FIGURA 2. $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

7.7. Esercizio. *Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale lineare di secondo ordine, omogenea a coefficienti costanti*

$$y''(x) + y'(x) + 4y(x) = 0$$

- *disegnare i grafici di tre soluzioni diverse dell'equazione,*
- *esaminare se le soluzioni siano, o meno, limitate in* $\mathbb{R}_+ : \{x \geq 0\}$
- *esaminare se esistano soluzioni periodiche.*

SOLUZIONE:

- Le radici dell'equazione caratteristica sono
$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{15}}{2}$$
Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea assegnata sono pertanto
$$y_0(x) = e^{-x/2}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}x\right)\right)$$

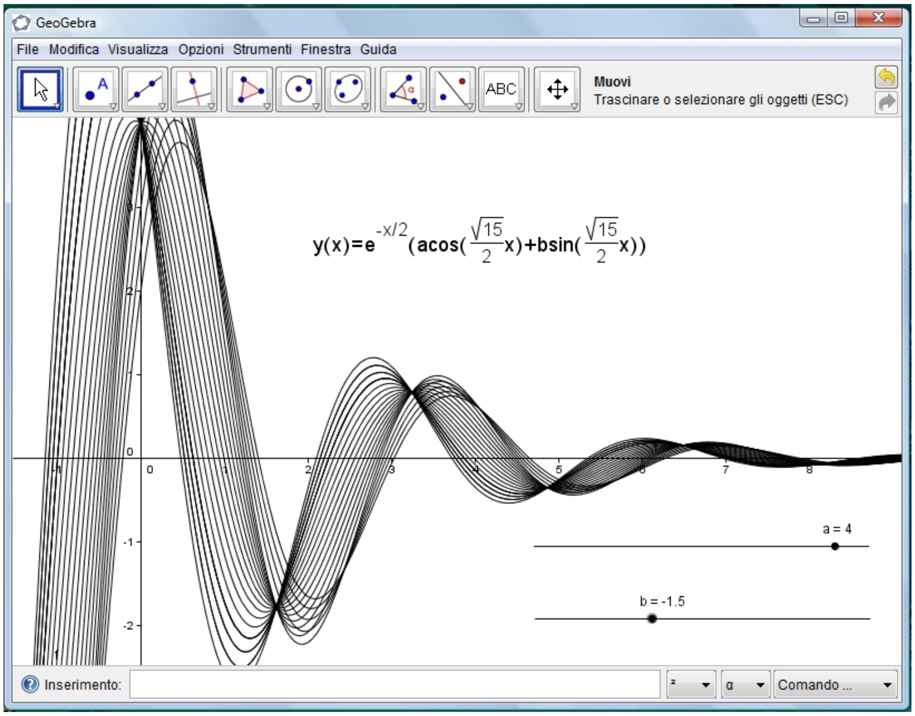

FIGURA 3. $y_0(x) = e^{-x/2}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}x\right)\right)$

- Tutte le soluzioni hanno limite zero a $+\infty$ e quindi sono limitate in $\mathbb{R}_+$
- Non esistono soluzioni periodiche, per via del fattore di smorzamento $e^{-x/2}$.

7.8. Esercizio. *Determinare le soluzioni dell'equazione lineare di secondo ordine non omogenea*

$$y''(x) = 1$$

- *disegnare i grafici di tre di esse,*
- *riconoscere che si tratta di funzioni convesse,*
- *detta $y(x)$ la soluzione che verifica le condizioni iniziali $y(0) = A$, $y'(0) = B$ determinare*

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} y(x)$$

SOLUZIONE:

- Le soluzioni sono
$$y_0(x) = \frac{1}{2}x^2 + c_1 x + c_2$$
- sono tutte parabole con la concavitá rivolta verso l'alto, sono quindi convesse: del resto
$$y'' = 1 \quad \to \quad y'' > 0$$
- la soluzione che verifica le condizioni iniziali $y(0) = A,\ y'(0) = B$ é
$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + Bx + A$$
$$\inf_{x\in\mathbb{R}} y(x) = \min_{x\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2}x^2 + Bx + A\right) = A - \frac{1}{2}B^2$$

7.9. Esercizio. *Assegnata l'equazione lineare di secondo ordine non omogenea*
$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 1$$
determinare

- *tutte le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata,*
- *le soluzioni dell'equazione lineare di secondo ordine non omogenea assegnata,*
- *la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali* $y(0) = 1/2,\ y'(0) = 0.$

SOLUZIONE:

- Le radici dell'equazione caratteristica associata all'equazione omogenea sono $-1 \pm i$ pertanto le soluzioni dell'omogenea sono
$$y_0(x) = e^{-x}\left(c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)\right)$$
- una soluzione dell'equazione completa é $\overline{y}(x) = \frac{1}{2}$, pertanto tutte le soluzioni dell'equazione assegnata sono
$$y(x) = e^{-x}\left(c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)\right) + \frac{1}{2}$$
- La soluzione cercata é la stessa soluzione d'equilibrio $\overline{y}(x) = \frac{1}{2}$.

7.10. Esercizio. *Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 0 \\ y(0) = A \\ y'(0) = B \end{cases}$$

- *determinare per quali A e B riesce*
$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$$
- *determinare per quali A e B riesce*
$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$$
- *determinare per quali A e B la soluzione $y(x)$ é limitata in $\mathbb{R}$.*

SOLUZIONE:

Le radici dell'equazione caratteristica sono $\lambda_1 = 3, \;\; \lambda_2 = -2$, tutte le soluzioni dell'equazione omogenea assegnata sono date pertanto da

$$y_0(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$$

quelle che soddisfano le condizioni $y(0) = A, \;\; y'(0) = B$ sono pertanto quelle con $c_1, \;\; c_2$ che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = A \\ 3c_1 - 2c_2 = B \end{cases} \quad \to \quad c_1 = \frac{2A+B}{5}, \quad \frac{3A-B}{5}$$

- $\dfrac{2A+B}{5} = 0 \quad \to \quad y(x) = \dfrac{3A-B}{5} e^{-2x} \quad \to \quad \lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$
- $\dfrac{2A+B}{5} > 0 \quad \to \quad \lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$
- l'unica soluzione limitata é quella nulla che corrisponde a $A = B = 0$