ANALISI MATEMATICA I

Soluzioni Foglio 8

21 maggio 2009

8.1. Esercizio. *Assegnata l'equazione lineare non omogenea*

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = e^{3x}$$

- *determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata,*
- *determinare $\overline{y}(x)$ sotto forma di esponenziale che soddisfi l'equazione non omogenea,*
- *indicare tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea,*
- *esaminare se l'equazione non omogenea possieda soluzioni limitate in $\mathbb{R}$.*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono costruite tramite le radici dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \to \quad \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

Tutte le soluzioni $y_0(x)$ dell'omogenea sono pertanto

$$y_0(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$$

Soluzioni particolari dell'equazione completa possono essere determinate nella forma esponenziale ce^{3x}: sostituendo si ricava la condizione che determina c

$$9\,c\,e^{3x} - 3\,c\,e^{3x} - 2\,c\,e^{3x} = e^{3x} \quad \to \quad c = \frac{1}{4}$$

Tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea sono pertanto

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{4} e^{3x}$$

L'equazione differenziale assegnata non ha soluzioni limitate in $\mathbb{R}$: infatti, qualunque siano le costanti $c_1,\ c_2$ riesce

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$$

8.2. Esercizio. *Assegnata l'equazione lineare non omogenea*

$$y''(x) - y(x) = e^x$$

- *determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata,*
- *determinare* $\overline{y}(x)$ *sotto forma di* polinomio per esponenziale *che soddisfi l'equazione non omogenea,*
- *indicare tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea.*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Le soluzioni dell'equazione omogenea $y''(x) - y(x) = 0$ si calcolano tramite le radici dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \to \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

Tutte le soluzioni $y_0(x)$ dell'equazione omogenea associata sono pertanto

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

Una soluzione $\overline{y}(x)$ dell'equazione completa non puó essere ottenuta nella forma semplice ce^x in quanto tali funzioni sono, qualunque sia c, soluzioni dell'omogenea: occorre pertanto cercare soluzioni della non omogenea nella forma *polinomio per esponenziale* cxe^x.
Sostituendo si ha

$$c(2e^x + xe^x) - ce^x = e^x \quad \to \quad c = \frac{1}{2} \quad \to \quad \overline{y}(x) = \frac{1}{2}xe^x$$

Tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea sono pertanto

$$y(x) = y_0(x) + \overline{y}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x$$

8.3. Esercizio. *Assegnata l'equazione lineare non omogenea*

$$(D^2 + 5D + 6)y(x) = x^2 + 2x$$

- *determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata,*
- *determinare* $\overline{y}(x)$ *sotto forma di polinomio che soddisfi l'equazione non omogenea,*
- *indicare tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea.*

SOLUZIONE:

L'equazione assegnata é la seguente:

$$y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = x^2 + 2x$$

Le soluzioni dell'equazione omogenea $y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = 0$ si calcolano tramite le radici dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \quad \to \quad \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

Tutte le soluzioni $y_0(x)$ dell'equazione omogenea associata sono pertanto

$$y_0(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x}$$

Soluzioni particolari dell'equazione completa possono essere determinate nella forma polinomiale $\overline{y}(x) = Ax^2 + Bx + c$: sostituendo si ricavano le condizioni che determinano i tre coefficienti A, B, C

$$2A+5(2Ax+B)+6(Ax^2+Bx+C) = x^2+2x \quad \to \quad \begin{cases} 6A & = 1 \\ 10A + 6B & = 2 \\ 2A + 5B + 6C & = 0 \end{cases} \quad \to$$

$$\to \quad \begin{cases} A = & \dfrac{1}{6} \\ \\ B = & \dfrac{1}{18} \\ \\ C = & -\dfrac{11}{108} \end{cases} \quad \to \quad \overline{y}(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{18}x - \frac{11}{108}$$

Tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea sono pertanto

$$y(x) = y_0(x) + \overline{y}(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{18}x - \frac{11}{108}$$

8.4. Esercizio. *Determinare tutte le soluzioni dell'equazione lineare non omogenea*

$$y''(x) + y(x) = x \sin(x)$$

SOLUZIONE:

Le soluzioni dell'equazione omogenea $y''(x) + y(x) = 0$ si calcolano tramite le radici dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \to \quad \begin{cases} \lambda_1 = -i \\ \lambda_2 = i \end{cases}$$

Soluzioni dell'equazione omogenea associata sono pertanto sia la parte reale che la parte immaginaria delle due funzioni complesse e^{-ix}, e^{ix}, cioé sono soluzioni dell'equazione omogenea le funzioni $\cos(x)$ e $\sin(x)$. Tutte le soluzioni $y_0(x)$ dell'equazione omogenea associata sono pertanto

$$y_0(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

Soluzioni particolari $\overline{y}(x)$ dell'equazione non omogenea che, servendosi dell'espressione

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

puó essere scritta al modo seguente

$$y''(x) + y(x) = \frac{1}{2i} x e^{ix} - \frac{1}{2i} x e^{-ix}$$

possono essere cercate nella forma *polinomio per esponenziale*

$$\overline{y}(x) = (ax^2 + bx)e^{ix} + (cx^2 + dx)e^{-ix}$$

dove non sono stati inclusi i termini in e^{-ix} e in e^{ix} giá riconosciuti soluzioni dell'omogenea.
Calcolata

$$\overline{y}'(x) = e^{-ix}\left(-iax^2 + 2ax - ibx + b\right) + e^{ix}\left(icx^2 + 2cx + idx + d\right)$$

$$y''(x) = e^{-ix}\left(-ax^2 - 4iax + 2a - bx - 2ib\right) + e^{ix}\left(-cx^2 + 4icx + 2c - dx + 2id\right)$$

da cui

$$y''(x) + y(x) = e^{-ix}(-4iax + 2a - 2ib) + e^{ix}(4icx + 2c + 2id)$$

sostituendo si perviene al sistema

$$\begin{cases} (-4iax + 2a - 2ib) & = -\dfrac{1}{2i}x \\ \\ (4icx + 2c + 2id) & = \dfrac{1}{2i}x \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$a = -\frac{1}{8}, \; b = \frac{i}{8}, \; c = -\frac{1}{8}, \; d = -\frac{i}{8}$$

ne segue

$$\overline{y}(x) = (-\frac{1}{8}x^2 + \frac{i}{8}x)e^{ix} + (-\frac{1}{8}x^2 - \frac{i}{8}x)e^{-ix} = -\frac{x^2}{4}\cos(x) + \frac{x}{4}\sin(x)$$

Tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea assegnata sono pertanto

$$y(x) = y_0(x) + \overline{y}(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) - \frac{x^2}{4} \cos(x) + \frac{x}{4} \sin(x)$$

8.5. Esercizio. *Assegnata l'equazione lineare non omogenea*

$$(D^2 - 3D + 2)y(x) = x^2 + 2x$$

- *determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata,*
- *determinare la soluzione $Y_0(x)$ del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} (D^2 + 5D + 6)y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

- *verificare che la funzione*

$$y(x) = \int_0^x Y_0(x - s)(s^2 + 2s)ds$$

  é soluzione dell'equazione non omogenea sopra assegnata,
- *indicare tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea.*

SOLUZIONE:

Le soluzioni dell'equazione omogenea $(D^2-3D+2)y(x) = 0$ si calcolano tramite le radici dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \to \quad \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

Tutte le soluzioni $y_0(x)$ dell'equazione omogenea associata sono pertanto

$$y_0(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x$$

La soluzione $Y_0(x)$ del problema di Cauchy assegnato richiede che le costanti c_1 e c_2 verifichino il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 + c_2 = 1 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{cases}$$

Si ha pertanto

$$Y_0(x) = e^{2x} - e^x$$

La funzione definita come

$$\int_0^x Y_0(x - s)(s^2 + 2s)ds$$

é pertanto

$$\overline{y}(x)=\int_0^x \left(e^{2(x-s)}-e^{(x-s)}\right)(s^2+2s)ds=\frac{1}{4}\left(2x^2+2x-e^{2x}+1\right)$$

Per controllare che la funzione determinata sia effettivamente soluzione dell'equazione assegnata si sostituisce e si verifica

$$y''+5y'+6y=-2x+x^2$$

Tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea sono

$$y(x)=y_0(x)+\overline{y}(x)=c_1e^{2x}+c_2e^x+\frac{1}{4}\left(2x^2+2x-e^{2x}+1\right)$$

8.6. Esercizio. *Determinare tutte le soluzioni dell'equazione lineare non omogenea*

$$y''(x)+y(x)=\sin(x)$$

- *determinare la soluzione del relativo problema di Cauchy con condizioni iniziali*

$$y(0)=0,\quad y'(0)=1$$

- *disegnare il grafico di tale soluzione* $x\in[0,10\pi]$.

SOLUZIONE:

Le soluzioni dell'equazione omogenea $y''(x)+y(x)=0$ si calcolano tramite le radici dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2+1=0\quad\to\quad\begin{cases}\lambda_1=-i\\ \lambda_2=i\end{cases}$$

Soluzioni dell'equazione omogenea associata sono pertanto sia la parte reale che la parte immaginaria delle due funzioni complesse e^{-ix}, e^{ix}, cioé sono soluzioni dell'equazione omogenea le funzioni $\cos(x)$ e $\sin(x)$. Tutte le soluzioni $y_0(x)$ dell'equazione omogenea associata sono pertanto

$$y_0(x)=c_1\cos(x)+c_2\sin(x)$$

Soluzioni particolari $\overline{y}(x)$ dell'equazione non omogenea

$$y''(x)+y(x)=\sin(x)$$

si possono cercare nella forma

$$y(x)=Ax\sin(x)+Bx\cos(x)$$

sostituendo nell'equazione assegnata si deve avere

$$2A\cos(x) + 2B\sin(x) = \sin(x) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} A = 0 \\ B = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Tutte le soluzioni dell'equazione data sono pertanto

$$y(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) - \frac{1}{2}x\cos(x)$$

La soluzione del problema di Cauchy assegnato é pertanto

$$y_1(x) = \frac{3}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}x\cos(x)$$

Il grafico, oscillazioni di ampiezza via via maggiore, per via della risonanza, é riportato in Figura 1.

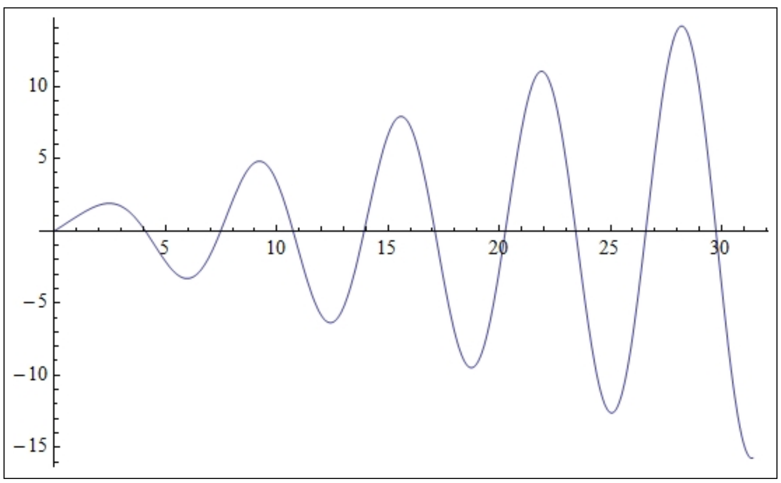

FIGURA 1. $y_1(x) = \dfrac{3}{2}\sin(x) - \dfrac{1}{2}x\cos(x)$

8.7. Esercizio. *Determinare tutte le soluzioni dell'equazione lineare non omogenea*

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = \sin(\omega\, x)$$

- *determinare la soluzione $Y_\omega(x)$ del relativo problema di Cauchy con condizioni iniziali nulle*

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

- *determinare per quale $\omega \in \mathbb{R}$ riesce maggiore il*

$$\max_{x\in\mathbb{R}} |Y_\omega(x)|$$

SOLUZIONE:

Le soluzioni dell'equazione omogenea $y''(x)+2y'(x)+2y(x)=0$ si calcolano tramite le radici dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2+2\lambda+2=0 \quad \to \quad \begin{cases} \lambda_1=-1+i \\ \lambda_2=-1-i \end{cases}$$

Le parti reali $e^{-x}\cos(x)$ e le parti immaginarie $e^{-x}\sin(x)$ delle due funzioni complesse

$$e^{(-1+i)x}, \quad e^{(-1-i)x}$$

permettono di determinare tutte le soluzioni $y_0(x)$ dell'equazione omogenea associata

$$y_0(x)=e^{-x}(c_1\cos(x)+c_2\sin(x))$$

Una soluzione particolare dell'equazione non omogenea si determina nella forma

$$\overline{y}(x)=A\cos(\omega x)+B\sin(\omega x)$$

sostituendo nell'equazione si ha

$$(2A+2B\omega-A\omega^2)\cos(\omega x)+(2B-2A\omega-B\omega^2)\sin(\omega x)=\sin(\omega x)$$

da cui

$$A=\frac{-2\omega}{4+\omega^4}, \quad B=\frac{2-\omega^2}{4+\omega^4}$$

Tutte le soluzioni dell'equazione assegnata sono pertanto

$$y(x)=e^{-x}(c_1\cos(x)+c_2\sin(x))-\frac{2\omega}{4+\omega^4}\cos(\omega x)+\frac{2-\omega^2}{4+\omega^4}\sin(\omega x)$$

La soluzione del problema di Cauchy assegnato é pertanto

$$y(x)=e^{-x}\left\{\frac{2\omega\cos(x)}{\omega^4+4}+\frac{\omega^3\sin(x)}{\omega^4+4}\right\}+\frac{(2-\omega^2)\sin(x\omega)}{\omega^4+4}-\frac{2\omega\cos(x\omega)}{\omega^4+4}$$

Considerato che dei due addendi che rappresentano $y(x)$ il primo, moltiplicato per e^{-x} é infinitesimo per $x\to+\infty$, si riconosce che per $x>0$ i valori maggiori di $y(x)$ sono quelli ottenuti dal secondo addendo, periodico,

$$\frac{(2-\omega^2)\sin(x\omega)}{\omega^4+4}-\frac{2\omega\cos(x\omega)}{\omega^4+4}$$

L'ampiezza delle oscillazioni di quest'ultimo

$$\sqrt{\left(\frac{(2-\omega^2)}{\omega^4+4}\right)^2+\left(\frac{2\omega}{\omega^4+4}\right)^2}=\frac{\omega^2+1}{\omega^4+1}$$

é massima per

$$|\omega| = \sqrt{\sqrt{5} - 1}$$

8.8. Esercizio. *Determinare tutte le soluzioni dell'equazione lineare non omogenea*

$$2y''(x) - y'(x) - y(x) = 4xe^{2x}$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Le soluzioni dell'equazione omogenea $2y''(x) - y'(x) - y(x) = 0$ si calcolano tramite le radici dell'equazione caratteristica

$$2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Tutte le soluzioni $y_0(x)$ dell'equazione omogenea associata sono pertanto

$$y_0(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x/2}$$

Una soluzione particolare dell'equazione completa si cerca nella forma *polinomio per esponenziale* $\overline{y}(x) = (Ax + B)e^{2x}$: sostituendo si determinano i fattori $A,\ B$ e si ricava

$$\overline{y}(x) = \frac{4}{25} e^{2x}(5x - 7)$$

Tutte le soluzioni dell'equazione assegnata sono pertanto

$$y(x) = y_0(x) + \overline{y}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x/2} + \frac{4}{25} e^{2x}(5x - 7)$$

8.9. Esercizio. *Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale lineare*

$$y'(x) + \frac{1}{x}\, y(x) = x$$

Servendosi del risultato precedente determinare le soluzioni dell'equazione lineare del secondo ordine

$$xy''(x) + y'(x) = x^2$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

Le soluzioni dell'equazione lineare di primo ordine a coefficienti variabili omogenea $y'(x) + \dfrac{1}{x}\,y(x) = 0$ sono

$$y_0(x) = c_1\frac{1}{x}$$

Una soluzione particolare dell'equazione completa si cerca nella forma $\overline{y}(x) = A(x)\dfrac{1}{x}$: sostituendo si ottiene

$$A'(x)\frac{1}{x} = x \quad\to\quad A(x) = \frac{1}{3}x^3 \quad\to\quad \overline{y}(x) = \frac{1}{3}x^2$$

Le soluzioni della prima equazione assegnata sono pertanto

$$y(x) = c_1\frac{1}{x} + \frac{1}{3}x^2$$

La seconda equazione assegnata $xy''(x)+y'(x) = x^2$ equivale, per $x \neq 0$ alla

$$y''(x) + \frac{1}{x}\,y'(x) = x$$

e pertanto le $y'(x)$ sono soluzioni della precedente equazione

$$y'(x) = c_1\frac{1}{x} + \frac{1}{3}x^2 \quad\to\quad y(x) = c_1\log(|x|) + \frac{1}{9}x^3 + c_2$$

8.10. Esercizio. *Assegnata l'equazione lineare non omogenea*

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \frac{e^x}{x}$$

- *determinare tutte le soluzioni dell'omogenea associata,*
- *determinare la soluzione $Y_0(x)$ del problema di Cauchy relativo all'equazione omogenea con le condizioni iniziali*

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

- *determinata la funzione*

$$y(x) = \int_1^x Y_0(x-s)\frac{e^s}{s}\,ds$$

  verificare che soddisfa l'equazione non omogenea,
- *indicare tutte le soluzioni dell'equazioni non omogenea.*

Soluzione:

Le soluzioni dell'equazione omogenea $2y''(x) - y'(x) - y(x) = 0$ si calcolano tramite le radici dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad\to\quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata sono pertanto

$$y_0(x) = e^x(c_1 + c_2 x)$$

La soluzione $Y_0(x)$ del problema di Cauchy relativo alle condizioni iniziali $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ é pertanto

$$Y_0(x) = xe^x$$

La funzione

$$\int_1^x Y_0(x-s)\frac{e^s}{s}\,ds$$

é quindi

$$\overline{y}(x) = \int_1^x (x-s)e^{x-s}\frac{e^s}{s}\,ds = xe^x(\log(x) - 1), \quad (x > 0)$$

Tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea sono, per $x \neq 0$

$$y(x) = e^x(c_1 + c_2 x) + xe^x \log(|x|)$$