ANALISI MATEMATICA I

Soluzioni Foglio 9

21 maggio 2010

9.1. Esercizio. *Determinare la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x^2 y}{1+x^3} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

SOLUZIONE:

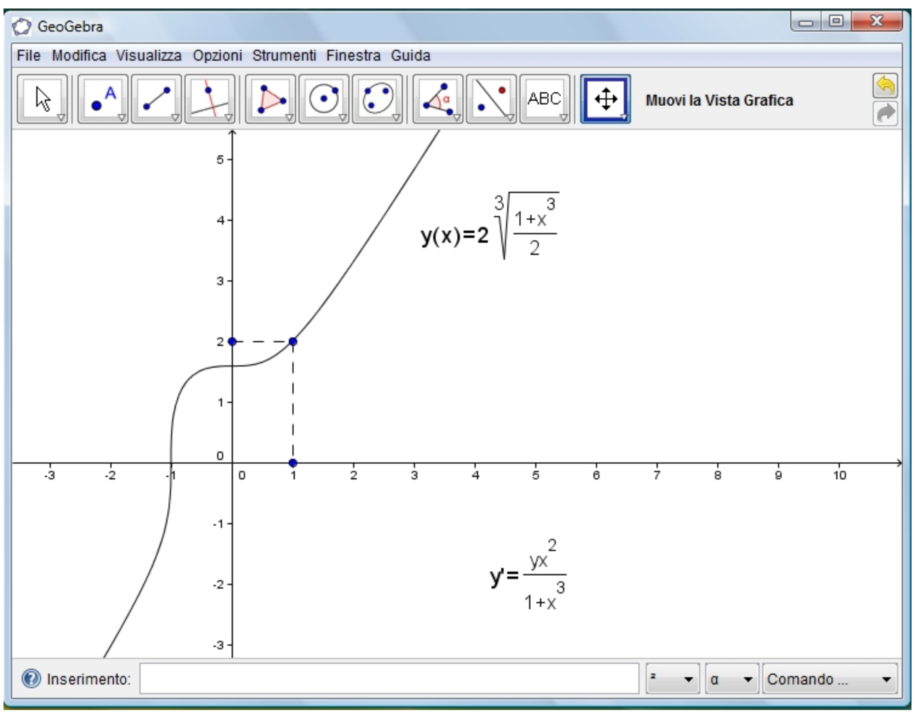

FIGURA 1. $y'(x) = \dfrac{x^2 y}{1+x^3}$

Si tratta di un'equazione a variabili separabili, definita per $x \neq -1$: dal momento che ammette la soluzione $y(x) \equiv 0$ si riconosce che ogni altra soluzione ha segno costante, in ciascuna delle semirette $(-\infty, -1)$ e $(-1, +\infty)$.
Quindi la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy assegnato é positiva per $x > -1$.

$$\int_2^y \frac{dy}{y} = \int_1^x \frac{x^2}{1+x^3} \quad \to \quad \log\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{3}\log\left(\frac{1+x^3}{2}\right)$$

Da cui

$$\frac{y}{2} = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{2}} \quad \to \quad y(x) = 2\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{2}}$$

Si noti in Figura **??** la pendenza del grafico della soluzione in corrispondenza di $x = 0$ e di $x = -1$.

9.2. Esercizio. *Determinare tutte le soluzioni dell'equazione*

$$y' = (y - 4x)^2$$

Determinare inoltre la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 4$

SOLUZIONE:

L'equazione assegnata si studia vantaggiosamente eseguendo il cambio di variabile

$$y - 4x = z \quad \to \quad y' = z' + 4$$

che trasforma l'equazione assegnata nell'equazione autonoma

$$z' = z^2 - 4$$

che ha due soluzioni d'equilibrio

$$z_1(x) = -2, \quad z_2(x) = 2$$

mentre tutte le altre soluzioni si deducono dalla formula

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{z^2 - 4} = x - x_0$$

In particolare il problema di Cauchy assegnato

$$y(0) = 4 \quad \to \quad z(0) = 4$$

corrisponde a

$$\int_4^z \frac{dz}{z^2 - 4} = x \quad \to \quad \log\left(\frac{z-2}{z+2}\right) = 4x - \log(3)$$

avendo osservato che la condizione $z(0) = 4$ implica $z(x) > 2$ per ogni x.

Si ricava quindi

$$z(x) = 2\,\frac{3 + e^{4x}}{3 - e^{4x}} \quad \to \quad y(x) = 4x + 2\,\frac{3 + e^{4x}}{3 - e^{4x}}$$

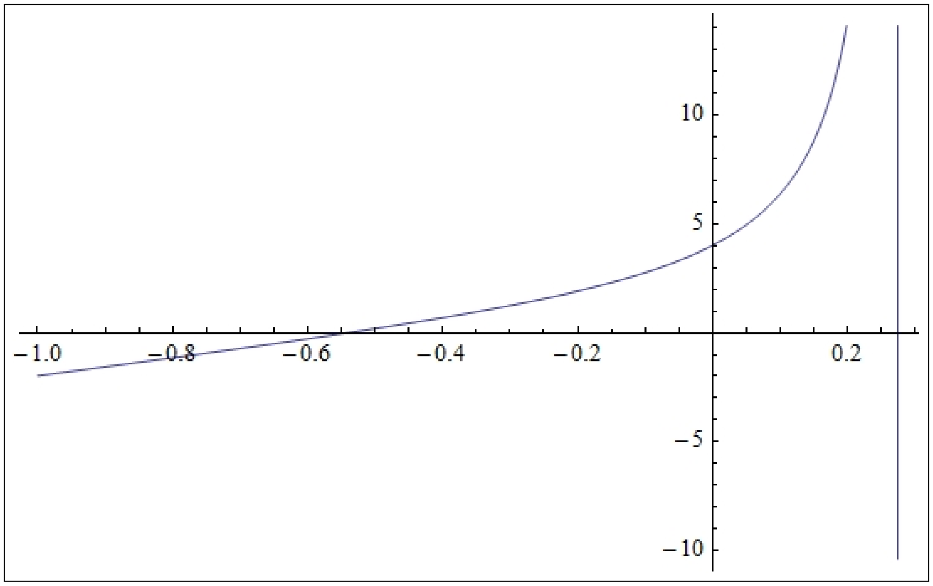

FIGURA 2. $y' = (y - 4x)^2, y(0) = 4$

Si osservi, vedi Figura **??** come la soluzione $y(x)$ cresca rapidamente avvicinandosi ad $x \approx 0.2$: si tratta in effetti di una soluzione *in piccolo*, cioé esistente - come il teorema delle approssimazioni successive faceva temere - in un intervallo assai piccolo intorno al valore iniziale $x_0 = 0$.

9.3. Esercizio. *Determinare le soluzioni dell'equazione*

$$y' + \frac{x^2 + y^2}{xy} = 0$$

Determinare inoltre la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(1) = 1$

SOLUZIONE:

Si tratta di un'equazione con espressione omogenea

$$y' + \frac{x^2 + y^2}{xy} = 0 \quad \rightarrow \quad y' + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 0$$

Posto

$$\frac{y}{x} = z \quad \rightarrow \quad y = z\,.\,x \quad \rightarrow \quad y' = z + z'\,.\,x$$

L'equazione assegnata si riduce pertanto a

$$z + z'x + \frac{1}{z} + z = 0 \quad \rightarrow \quad xz' + 2z + \frac{1}{z} = 0$$

ovvero

$$\frac{zz'}{2z^2+1} = -\frac{1}{x}$$

Le cui soluzioni sono

$$z(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{c-x^4}{x^4}}$$

da cui

$$y(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{c-x^4}{x^2}}$$

La soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(1) = 1$ é quella positiva, relativa alla scelta $c = 3$

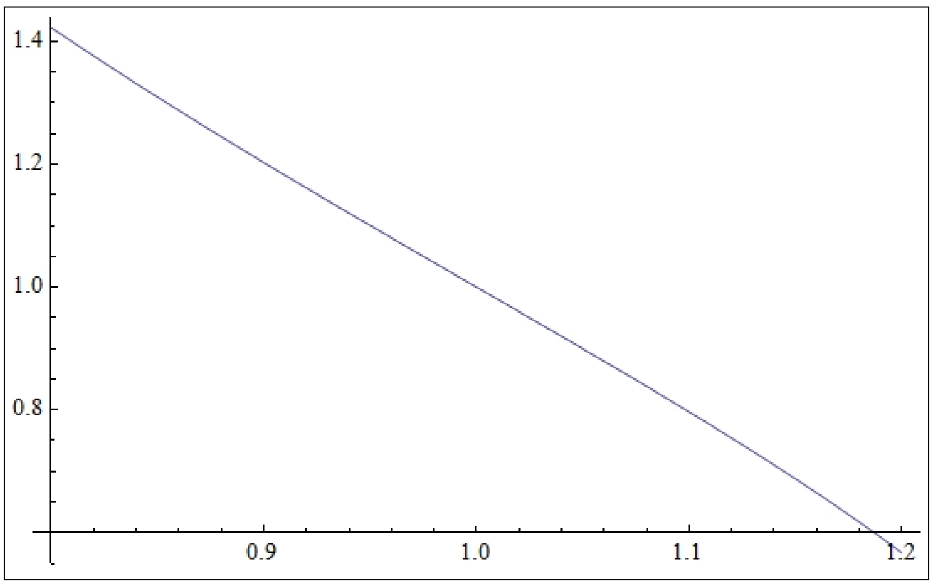

Figura 3. $y' + \dfrac{x^2+y^2}{xy} = 0$

Si osservi in Figura **??** come il grafico della soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(1) = 1$ sia in discesa.

9.4. Esercizio. *Determinare le soluzioni dell'equazione di Bernouilli*

$$y' + y = (\cos(x) - \sin(x))y^2$$

Determinare inoltre la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(0) = 1$

Soluzione:

L'equazione possiede la soluzione nulla, quindi le altre soluzioni non si annullano mai.
Dividendo membro l'equazione assegnata si ottiene

$$y'y^{-2} + y^{-1} = \cos(x) - \sin(x) \quad \to \quad \left(-\frac{1}{y}\right)' + \frac{1}{y} = \cos(x) - \sin(x)$$

Posto

$$z = \frac{1}{y}$$

si ha pertanto l'equazione nella nuova incognita z:

$$z' - z = \sin(x) - \cos(x)$$

Si tratta di un'equazione lineare di primo ordine non omogenea.
Le soluzioni dell'omogenea associata sono $z_0(x) = ce^x$ e una soluzione particolare dell'equazione completa si puó trovare nella forma

$$\overline{y}(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$$

Sostituendo si ottengono le condizioni $A = 0, \ B = -1$ Tutte le soluzioni dell'equazione lineare non omogenea in x sono pertanto

$$z(x) = ce^x - \sin(x)$$

Le soluzioni $y(x)$ dell'equazione assegnata sono pertanto

$$y(x) = \frac{1}{ce^x - \sin(x)}$$

La soluzione che soddisfa la condizione $y(0) = 1$ si ottiene pertanto per $c = 1$.

9.5. Esercizio. *Assegnata la successione di funzioni*

$$\{\sin^k(x)\}, \quad x \in [0, 2\pi]$$

- *determinarne il limite per* $k \to \infty$*,*
- *esaminare se la successione converga o meno uniformemente,*
- *esaminare se converga la successione numerica*

$$\left\{\int_0^{2\pi} \sin^k(x)\,dx\right\}$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La successione assegnata converge in $E: \ [0, 2\pi] - \frac{3}{2}\pi$

$$\forall x \in E: \lim_{k\to\infty} \sin^k(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ 1 & se \quad x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Osservato che il limite non é continuo in E si riconosce che la convergenza non puó essere uniforme.
La successione tuttavia converge uniformemente in ogni intervallo chiuso e limitato $E \subset [0, 2\pi]$ che non contenga (neanche come estremo) né $\pi/2$ né $3\pi/2$
La successione di integrali assegnata é convergente a zero: infatti, scelto $\delta > 0$ riesce

$$\int_0^{2\pi} \sin^k(x)dx = \int_0^{\pi/2-\delta} \sin^k(x)dx + \int_{\pi/2-\delta}^{\pi/2+\delta} \sin^k(x)dx +$$
$$+ \int_{\pi/2+\delta}^{3\pi/2-\delta} \sin^k(x)dx + \int_{3\pi/2-\delta}^{3\pi/2+\delta} \sin^k(x)dx + \int_{3\pi/2+\delta}^{2\pi} \sin^k(x)dx$$

Dei 5 integrali che compaiono a secondo membro

- i due relativi ai due intervallini centrati in $\pi/2$ e $3\pi/2$ hanno modulo minore di 2δ ciascuno,
- i tre altri sono relativi ad intervalli chiusi e limitati sui quali la successione $\sin^k(x)$ converge uniformemente a zero.

Pertanto

$$\limsup_{k\to\infty} \left| \int_0^{2\pi} \sin^k(x)\, dx \right| \leq 4\delta$$

proprietá che, tenuto conto dell'arbitrarietá di δ implica

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} \sin^k(x)\, dx = 0$$

9.6. Esercizio. *Assegnata la successione di funzioni*

$$\left\{ 1 - \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}} \right\}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- *determinare in quali intervalli sia convergente,*
- *determinare la funzione limite,*
- *determinare in quali intervalli la convergenza é uniforme.*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

La successione

$$1 - \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}} = \frac{1}{1 + x^{2n}}$$

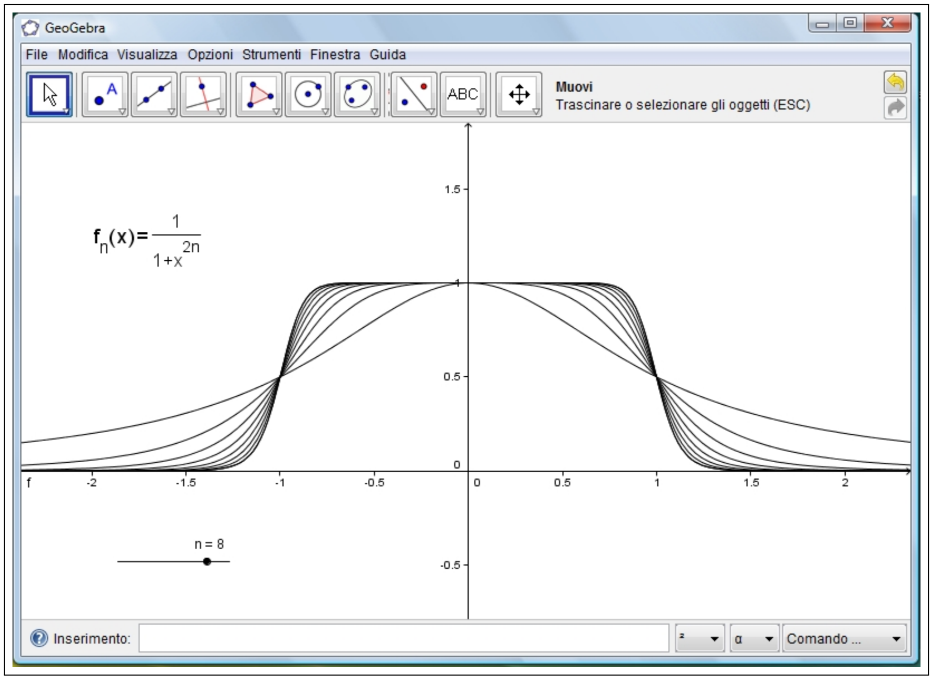

FIGURA 4. $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^{2n}}$

é convergente in tutto $\mathbb{R}$ e riesce

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^{2n}} = \begin{cases} 1 & se \quad |x|<1 \\ 1/2 & se \quad |x|=1 \\ 0 & se \quad |x|>1 \end{cases}$$

Scelto comunque $\delta > 0$, la convergenza é uniforme in

$$\mathbb{R} - \{(-1-\delta, -1+\delta) \cup (1-\delta, 1+\delta)\}$$

9.7. Esercizio. *Assegnata la successione di funzioni*

$$\left\{ f_n(x) = \int_0^x e^{-n^2t^2}\, dt \right\}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- *determinare se le $f_n(x)$ sono limitate in $\mathbb{R}$,*
- *esaminare se costituiscono una successione convergente,*
- *esaminare in quali intervalli costituiscono una successione uniformemente convergente.*

SOLUZIONE:

Tenuto conto che

$$e^{-n^2t^2} \leq e^{-t^2} \quad \rightarrow \quad |f_n(x)| \leq \left| \int_0^x e^{-t^2} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

quantitá limitata in quanto é noto che la funzione e^{-t^2} é dotata di integrale improprio su tutto $\mathbb{R}$.
Consideriamo la successione $e^{-n^2t^2}$ delle funzioni integrande: esse costituiscono una successione di funzioni convergente in tutto $\mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n^2t^2} = \begin{cases} 1 & se \quad t = 0 \\ 0 & se \quad t \neq 0 \end{cases}$$

La convergenza della $e^{-n^2t^2}$, vista la discontinuitá della funzione limite, non é uniforme in $\mathbb{R}$: tuttavia, scelto comunque $\delta > 0$ la convergenza della $e^{-n^2t^2}$ é uniforme in $\mathbb{R} - (-\delta, \delta)$.
La successione $\{f_n(x)\}$ é convergente in tutto $\mathbb{R}$ a zero: infatti

$$|f_n(x)| \leq \int_0^\delta dt + \int_\delta^x e^{-n^2t^2} dt$$

da cui, tenuto conto che per la convergenza uniforme della $e^{-n^2t^2}$ riesce

$$\lim_{n\to\infty} \int_\delta^x e^{-n^2t^2} dt = 0,$$

si ricava

$$\limsup_{n\to\infty} |f_n(x)| \leq \delta$$

da cui, per l'arbitrarietá di δ segue

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x)| = 0$$

La convergenza della $\{f_n(x)\}$ é uniforme in $\mathbb{R}$ infatti il cambio di variabile

$$\left| \int_0^x e^{-n^2t^2} dt \right| = \frac{1}{n} \left| \int_0^{nx} e^{-u^2} du \right| \leq \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$$

mostra che

$$|f_n(x)| \leq \frac{M}{n}$$

avendo indicato con

$$M = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$$

9.8. Esercizio. *Assegnata la serie di potenze*

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^{2k}$$

- *determinare l'intervallo di convergenza,*
- *calcolare la somma,*
- *esaminare per quali intervalli* $[a,b]$ *riesca*

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} kx^{2k} \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left(k \int_a^b x^{2k}\, dx \right)$$

SOLUZIONE:

Il criterio del rapporto

$$\frac{\left|(k+1)x^{2(k+1)}\right|}{|kx^{2k}|} = x^2 \frac{k+1}{k} \to x^2$$

l'intervallo di convergenza é pertanto $x^2 < 1 \quad \to \quad -1 < x < 1$.
Negli estremi dell'intervallo non c'é convergenza in quanto i termini della serie non risultano infinitesimi.
L'uguaglianza

$$kx^{2k} = \frac{x}{2}\, 2kx^{2k-1}$$

implica

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^{2k} = \frac{x}{2} \sum_{k=0}^{\infty} 2kx^{2k-1}$$

e, tenuto conto che

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2kx^{2k-1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} \right)' = \left(\frac{1}{1-x^2} \right)' = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

riesce

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^{2k} = \frac{x}{2}\, \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

Lo scambio *serie - integrale* é lecito in tutti gli intervalli $[a,b] \subset (-1,\, 1)$ in cui la serie di potenze assegnata converge uniformemente.

9.9. Esercizio. *Assegnata la successione*

$$a_0 = 1, \quad a_{k+1} = \sin(a_k) \quad k = 1, 2, 3, ...$$

determinare in quale intervallo é convergente la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

SOLUZIONE:

I coefficienti verificano ovviamente la disuguaglianza

$$|a_k| \leq 1$$

che indica la assoluta convergenza della serie per tutti gli $|x| < 1$.
Tenuto presente che

$$0 \leq a_{k+1} \leq a_k$$

si riconosce che la serie assegnata converge anche nell'estremo -1 per via del teorema sulle serie a termini di segno alterno, decrescenti in modulo a zero.

9.10. Esercizio. *Assegnata la serie di potenze*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} \right) x^{2k}$$

- *determinare l'insieme di convergenza,*
- *determinare la somma,*
- *determinare in quali intervalli la serie converga uniformemente.*

SOLUZIONE:

L'intervallo di convergenza é, ovviamente, quello piú piccolo tra i due che le due serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} \right) x^{2k}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^k} \right) x^{2k}$$

possiedono.
Pertanto l'intervallo di convergenza é

$$\frac{x^2}{2} < 1 \quad \rightarrow \quad -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

Nei due estremi non c'é convergenza perché gli addendi non sono infinitesimi.

Tenuto conto che

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}\right)\, x^{2k} = \frac{1}{1-\dfrac{x^2}{2}}, \quad \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^k}\right)\, x^{2k} = \frac{1}{1-\dfrac{x^2}{3}}$$

da cui segue,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}\right)\, x^{2k}\frac{1}{1-\dfrac{x^2}{2}} + \frac{1}{1-\dfrac{x^2}{3}}$$

La convergenza é uniforme in ogni intervallo $[a,b] \subset (-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$.