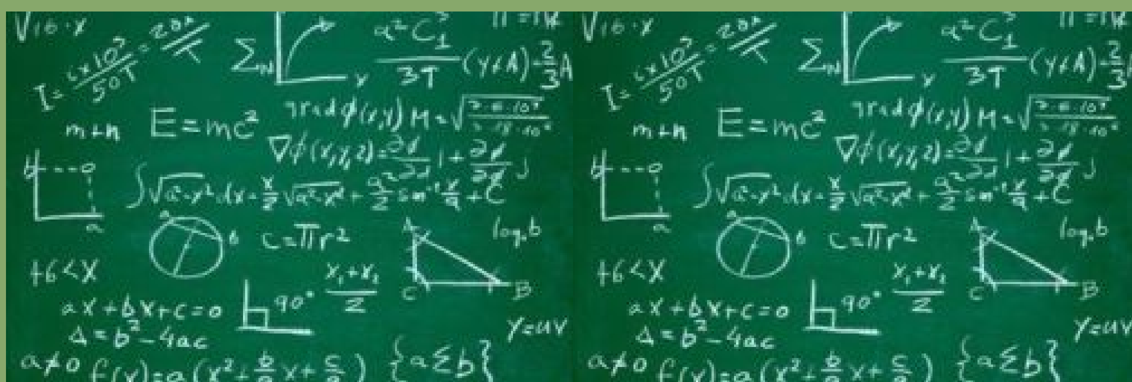
Universitá La Sapienza

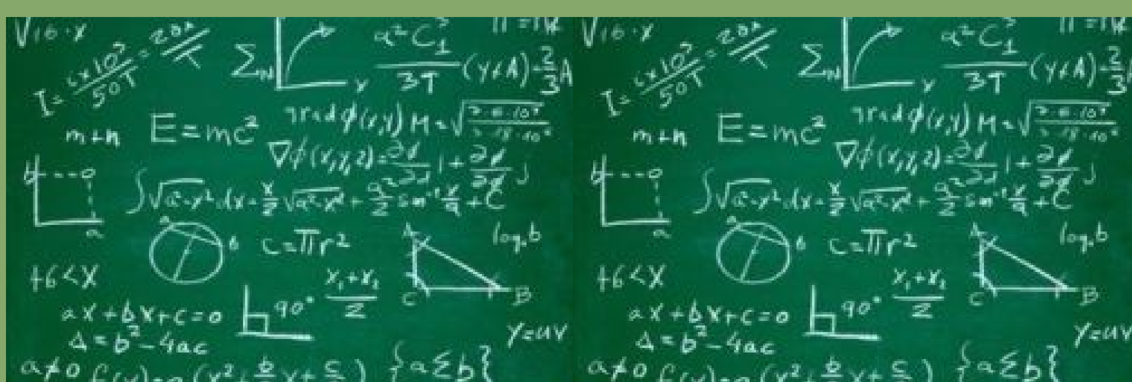
Corso di Laurea in Chimica

2015-2016

Istituzioni di Matematica I



ESERCIZI



Schede di esercitazioni
distribuite
settimanalmente agli studenti
dei corsi
di Istituzioni di Matematica
tenuti dai professori

Caterina Cassisa

Lamberto Lamberti

Corrado Mascia

Vincenzo Nesi

nel primo semestre
2015 - 2016

Ultima revisione 19 febbraio 2016

Indice

Indice analitico

CAPITOLO 1

Schede di Esercitazioni

1. I numeri reali

Capitolo 1 (*LambertiMascia1.pdf*)

(1) Numeri naturali, interi, razionali e irrazionali
(2) Ordine e disuguaglianze: il modulo
(3) Intervalli, insiemi limitati
(4) Estremi.

Esercizio 1.1. Provare per induzione che

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2\,,$$

(Vedi pagina: 21)

Esercizio 1.2. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ provare che

- $n^2 - n$ è divisibile per 2,
- $n^3 - n$ è divisibile per 3.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n^4 - n$ è divisibile per 4 ?

(Vedi pagina: 22)

Esercizio 1.3. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ sono verificate le seguenti condizioni

$$x - 2|x| + 2 > 0, \qquad \begin{cases} |x| \le 2 \\ |x-1| \le 1 \end{cases} .$$

(Vedi pagina: 22)

Esercizio 1.4. Dire quale dei seguenti insiemi è un intervallo e determinarne gli estremi:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 + 2x| < 1\}\,, \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-1}{x^2+1} < \frac{1}{2}\right\}, \quad A \cap B\,, \quad C = \{0\} \cup \left\{\frac{2}{n^2+1}\,, \forall n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Quale dei precedenti insiemi è limitato?

(Vedi pagina: 22)

Esercizio 1.5. Dire quali tra i seguenti insiemi sono limitati e quali non lo sono

$$\{0\} \cup \{1\}, \quad (-\infty, 0] \cup [1,2], \quad [-1,1] \cap [0,+\infty), \quad \mathbb{N}\,,$$

(Vedi pagina: 24)

Esercizio 1.6. Dire quale tra i seguenti insiemi é limitato e quale é un intervallo

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2\}, \quad A \cup B, \quad A \cap B,$$
$$C = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 - 1 \geq |x^2 + 1| - |x^2|\}, \quad D = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| \leq 1\}, \quad C \cup D, \quad C \cap D.$$

(Vedi pagina: 24)

Esercizio 1.7. Dire per ciascuno dei seguenti insiemi se é limitato superiormente [inferiormente] e, in caso affermativo, calcolarne l'estremo superiore [inferiore], indicando se si tratta di massimo [rispettivamente minimo]

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ |x+2| > 4\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \ |x-1| \leq 3\}, \quad C = \mathbb{N} \cap \left(-\frac{10}{3}, 5\right),$$
$$D = \{x \in \mathbb{R} : \ |x+2| \leq 4, x^2 - 5x + 4 > 0\}.$$

(Vedi pagina: 24)

Esercizio 1.8. Per quali $x, y \in R$ vale la relazione $|x+y| = |x| + |y|$?

(Vedi pagina: 25)

Esercizio 1.9. Sia $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Provare che se $x^2 < 2$ allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $x^2 + \frac{1}{n} < 2$.

(Vedi pagina: 25)

2. Funzioni elementari

Capitolo 2 (*LambertiMascia1.pdf*)

(1) Operazioni elementari sui grafici
(2) Funzioni invertibili e funzioni monotone
(3) Classi di funzioni piú comuni
(4) Funzioni limitate.

Esercizio 2.1. Determinare l'insieme di definizione delle funzioni seguenti

$$\frac{2x^2-3}{x^4-5x^2+4}, \qquad \frac{10^x}{2\cos x-1}, \qquad \frac{10^x}{\cos x-2}, \qquad \frac{1}{|x+6|\sqrt{x^2+2x-15}}, \qquad \sin(\pi x^2), \qquad \tan(\pi x^2).$$

(Vedi pagina: 26)

Esercizio 2.2. Disegnare i grafici delle funzioni seguenti

$$f(x)=3|x-1|-2, \qquad g(x)=1+2\cos(x-\frac{\pi}{2}), \qquad h(x)=|3-4x-x^2|.$$

(Vedi pagina: 27)

Esercizio 2.3. Per ciascuna delle seguenti funzioni

$$a(x):=\frac{1}{x+1},\ b(x):=\sqrt{4-x},\ c(x):=|x|-x,\ d(x):=\cos(2x),\ f(x):=\min\{0,\cos x\},$$

- determinare il dominio di definizione;
- disegnarne approssimativamente il grafico;
- dire se si tratta di funzione periodica.

(Vedi pagina: 27)

Esercizio 2.4. Scrivere la funzione composta $h=f\circ g$ e $k=g\circ f$ nei seguenti casi:

(i) $f(x)=x+1$, $\quad g(x)=x^2-2x$;
(ii) $f(x)=x^2$, $\quad g(x)=\sqrt{x}$, $\quad x\geq 0$.

(Vedi pagina: 29)

Esercizio 2.5. Data la funzione $f(x)=x^3$, disegnare il grafico di

$$f_0(x)=f(x)+1, \quad f_1(x)=f(x+2), \quad f_2(x)=3f(x), \quad f_3(x)=f(3x),$$
$$f_4(x)=f_0(-x) \quad f_5(x)=-f_0(x), \quad f_6(x)=|f_0(x)|, \quad f_7(x)=f_0(|x|).$$

[Osservare che le ultime 4 funzioni dipendono da f_0 e non da f].

(Vedi pagina: 29)

Esercizio 2.6. Provare che la funzione $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ è limitata e dire se è iniettiva.
[Non si richiede di disegnare il grafico ma solo di rispondere alle domande]

(Vedi pagina: 30)

Esercizio 2.7. Determinare il dominio D di $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ e dire se $f:D\to\mathbb{R}$ è limitata, se è iniettiva, se è suriettiva. *[Non si richiede di disegnare il grafico ma solo di rispondere alle domande]*

(Vedi pagina: 30)

Esercizio 2.8. Provare che: se f e g sono limitate $\Rightarrow$ $f+g$ e $f\cdot g$ sono limitate.

(Vedi pagina: 30)

Esercizio 2.9. Provare che: se f e g sono crescenti $\Rightarrow$ $f+g$ è crescente ma $f-g$ in generale non lo è.
Pensate che $f\cdot g$ sia monotona?

(Vedi pagina: 31)

3. Successioni

Capitolo 3 (*LambertiMascia1.pdf*)

(1) Limiti di successioni numeriche
(2) Successioni limitate
(3) Successioni definite per ricorrenza.

Esercizio 3.1. Mostrare **usando la definizione** la validità di

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{n^2+3n}=0,$$

(Vedi pagina: 32)

Esercizio 3.2. Calcolare, se esiste, il limite delle seguenti successioni

$$\frac{3n^3+2n+1}{4n^4+3n^3+2},\qquad (-1)^n+2,\qquad n+(-1)^n,\qquad \frac{n^2+n\sin(n)}{2n^2+3n+1},\qquad \frac{3^n+n}{n^3+1},$$
$$(-1)^n n^2+n\qquad \frac{3^n}{2^n+4^n},\qquad \frac{1+\cos^2(1+n^2)}{n^2},\qquad \frac{3^n}{n^{100}},\qquad \frac{4n^4-n^3+4n^2}{2n^4+3},$$
$$\frac{3^n+n}{4^n+n^2\sin(n)},\qquad \frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n},\qquad \frac{n^2}{n+1}-\frac{n^2+1}{n},\qquad \sqrt{n^2+n}-n$$
$$\frac{2n^3+n+1}{4n^2+3n+2},\qquad \frac{3^n-n^2}{2^n+n^5},\qquad \frac{\ln n-2^n+\sin(n)}{n^3-n!},\qquad \frac{\sqrt{n^2-n+1}-2n}{n+1},$$

(Vedi pagina: 33)

Esercizio 3.3. Sia a_n una successione convergente al numero reale L. Fare un esempio di un caso in cui $1/a_n$ non tende ad $1/L$."

(Vedi pagina: 37)

Esercizio 3.4. Sia a_n una successione limitata di numeri reali, con $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dire se esistono i seguenti limiti, motivando le risposte con esempi e controesempi:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n+1},\qquad \lim_{n\to+\infty} na_n,\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{na_n+1}{n^2+2},\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{a_n}.$$

(Vedi pagina: 37)

Esercizio 3.5. Dati $A,B\in\mathbb{R}$, sia $a_n := n^2+An+B$. Per quali scelte di A e B, la successione a_n è monotona? Per quali scelte di A e B, la successione a_n è definitivamente monotòna?

(Vedi pagina: 38)

Esercizio 3.6. (*impegnativo*) Sia a_n la successione definita per ricorrenza nel seguente modo:

$$a_1=0,\qquad a_{n+1}=1+\frac{{a_n}^2}{4}$$

i. Dimostrare per induzione che la successione è crescente e limitata superiormente;
ii. controllare che se il limite di a_n esiste e vale L, allora $L=1+L^2/4$;
iii. calcolare il limite di a_n.

(Vedi pagina: 38)

Esercizio 3.7. (*impegnativo*) Sia a_n la successione definita per ricorrenza nel seguente modo:

$$a_0 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

i. dimostrare che la successione è a termini positivi;
ii. mostrare che la successione è monotona decrescente;
iii. calcolare il limite di a_n per $n \to \infty$.

(Vedi pagina: 39)

4. Serie - Limiti

Capitolo 3 (*LambertiMascia1.pdf*)

(1) Serie numeriche.

Capitolo 1 (*LambertiMascia2.pdf*)

(1) Limite di funzioni
(2) Continuitï¿½
(3) Esempi di discontinuitï¿½
(4) Teoremi sulle funzioni continue.

Esercizio 4.1. Discutere il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{3n+8},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+n^2+n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n^2+n)^n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+n^3}{2^n+n!}$$

(Vedi pagina: 41)

Esercizio 4.2. Studiare la convergenza assoluta delle serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3^n+1}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n^2)\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

(Vedi pagina: 42)

Esercizio 4.3. Date $\{a_n\}$ una successione limitata e $\sum_n b_n$ una serie assolutamente convergente, provare che la serie $\sum_n a_n b_n$ è assolutamente convergente.

(Vedi pagina: 42)

Esercizio 4.4. Sia $\sum_n a_n$ una serie assolutamente convergente, dimostrare che anche $\sum\limits_n a_n^2$ é assolutamente convergente.

(Vedi pagina: 42)

Esercizio 4.5. Determinare l'insieme di definizione e l'insieme di continuità delle funzioni $\sqrt{x^2-x^3}$, $\quad \operatorname{sgn}(x)$, $\quad x\operatorname{sgn}(\sin x)$.

(Vedi pagina: 43)

Esercizio 4.6. In ciascuno dei casi seguenti, dire se è possibile determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la corrispondente funzione sia continua in $x = 0$

$$f(x) := \begin{cases} 2x+x^2+6 & x<0 \\ a(x-2) & x \geq 0 \end{cases}, \qquad h(x) := \begin{cases} \arctan(1/x) & x \neq 0 \\ a & x = 0\,. \end{cases}$$

(Vedi pagina: 43)

Esercizio 4.7. Calcolare, o stabilire se non esistono, i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{3x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{x^2},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{\sin(2x)}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x},\qquad \lim_{x\to+\infty}\cos(x)$$

(Vedi pagina: 44)

Esercizio 4.8. Calcolare, se esistono, i limiti delle seguenti funzioni, sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$

$$\sqrt{x^2-3x}-x,\qquad \frac{x}{\sqrt{x^2+4}},\qquad \ln(2x^2+1)-\ln(x^2+3)\,.$$

(Vedi pagina: 44)

Esercizio 4.9. Sia $f(x) = x(x-e^{-x})$: dimostrare che l'equazione $f(x) = 1$ ammette almeno una soluzione nell'intervallo $[0,2]$.

(Vedi pagina: 45)

Esercizio 4.10. Si determini l'immagine delle funzioni $\arctan(e^x)$ e $e^{|x-1|}$ per $x \in (-1,2]$, e si dica se si tratta di funzioni iniettive.

(Vedi pagina: 45)

Esercizio 4.11. *(impegnativo)* Sia $p(x)$ un polinomio di grado pari con coefficiente di grado massimo positivo: mostrare che $p(x)$ ha minimo.

(Vedi pagina: 46)

Esercizio 4.12. *(impegnativo)* Sia $f : I \to I$ continua in $I = [a,b]$. Dimostrare che esiste un $\bar{x} \in I$ tale che $f(\bar{x}) = \bar{x}$. [*Suggerimento: applicare il teorema di esistenza degli zeri alla funzione* $f(x) - x$ *in* $[a,b]$.]

(Vedi pagina: 47)

5. Derivate

Capitolo 2 (*LambertiMascia2.pdf*)

(1) Definizione di derivata
(2) Regole fondamentali di derivazione
(3) Derivabilitï¿½ in un punto
(4) Rette tangenti al grafico
(5) Derivate successive.

Esercizio 5.1. Dire se esistono massimo e minimo della funzione $f(x) = x^7 - \pi x^4 + \ln 2$ in $[2,11]$. Cosa si può dire in $\mathbb{R}$? Rispondere alle stesso domande nel caso $f(x) = x^6 - 2\sqrt{2}x^5 + 77$.

(Vedi pagina: 48)

Esercizio 5.2. Utilizzando le regole per prodotto e rapporto, calcolare le derivate prime di

$$e^x \sin x, \qquad \frac{x+1}{x^2+1}, \qquad \frac{\cos x}{1+\sin x}, \qquad x \ln x, \qquad x \arctan x.$$

(Vedi pagina: 49)

Esercizio 5.3. Utilizzando la regole di derivazione di funzione composta, calcolare la derivata prima di

$$\cos(1-x^2), \qquad \ln(1+e^{x^2}), \qquad \sin(\sqrt{x^2+1}), \qquad \arctan(e^{-x^2}).$$

(Vedi pagina: 50)

Esercizio 5.4. Utilizzando le regole di derivazione, calcolare nell'insieme sono definite, le derivate di

$$x(1-x^2), \qquad \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}, \qquad \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}, \qquad \frac{1+\cos^2 x}{2\sin x}, \qquad x(\ln x + \sin x), \qquad (x^2+1)\arctan x.$$

(Vedi pagina: 50)

Esercizio 5.5. Dire quale delle seguenti funzioni è derivabile in $x = 0$

$$|x| \sin x, \qquad |x|\,(x^2+1), \qquad \sqrt{x}\sin x, \qquad (x^2+1)\sqrt{x}.$$

(Vedi pagina: 51)

Esercizio 5.6. Supponendo κ, T, b costanti assegnate, ricavare dalle seguenti equazioni di stato

$$pV = \kappa T, \qquad p(V-nb) - \kappa T = 0$$

il volume V come funzione della pressione p. Usare tali espressioni per determinare le derivate $\dfrac{dV}{dp}$.

(Vedi pagina: 52)

Esercizio 5.7. Studiare la continuità e derivabilità in $x = 0$ delle funzioni

$$f(x) := \begin{cases} x\sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) := \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

La derivata della funzione g è continua in 0?

(Vedi pagina: 52)

Esercizio 5.8. In $x_0 = 0$, studiare la continuità, la derivabilità, l'esistenza della derivata seconda di

$$f(x) := \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ e^x - 1 & x \geq 0, \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} \cos x & x < 0 \\ e^{-x^2/2} & x \geq 0, \end{cases}$$

(Vedi pagina: 53)

Esercizio 5.9. Sia $f(x) = \sqrt{1+4x^2}$ definita in $x \in \mathbb{R}$.
i. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nei punti $(1, f(1))$ e $(-2, f(-2))$.
ii. Trovata l'equazione della retta tangente in un punto generico $(x_0, f(x_0))$, dire per quali valori x_0 la tangente è orizzontale e per quali è parallela ad una delle bisettrici $y = x$ e $y = -x$.

(Vedi pagina: 56)

Esercizio 5.10. Fissati $a, b > 0$, la funzione $U(R) := aR^{-12} - bR^{-6}$ definita per $R > 0$ prende il nome di **potenziale di Lennard–Jones**. Determinare la derivata U', gli intervalli in cui U è monotona, il minimo di U in $(0, +\infty)$.

(Vedi pagina: 57)

Esercizio 5.11. Sia $\omega > 0$. Dimostrare che tutte le funzioni della forma $f(x) = A\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$ verificano la relazione $f'' + \omega^2 f = 0$.

(Vedi pagina: 58)

6. Teoremi di Lagrange, Höpital, Taylor

Capitolo 2 (*LambertiMascia2.pdf*)

(1) Teorema di Lagrange
(2) Funzioni monotone.

Capitolo 1 (*LambertiMascia3.pdf*)

(1) Punti stazionari
(2) Massimi e minimi assoluti.

Capitolo 2 (*LambertiMascia3.pdf*)

(1) Teorema di de l'Höpital
(2) Polinomi di Taylor
(3) Espressione di Lagrange per il resto.

Esercizio 6.1. Dimostrare che la funzione $f(x) = e^x(x^2 - 2x + 4)$ è strettamente crescente.

(Vedi pagina: 59)

Esercizio 6.2. Determinare massimo e minimo delle seguenti funzioni negli intervalli indicati

$$f(x) = \frac{x - x^2}{2 + x^2} \quad \text{in } [0,1] \qquad g(x) = (x^2 - 1)\, e^x \quad \text{in } [-1,1] \qquad h(x) = 2x(1 - x^2) \quad \text{in } [0,1].$$

(Vedi pagina: 59)

Esercizio 6.3. Dimostrare, usando il Teorema di Lagrange, che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ riesce

$$\left|\sin^2(x) - \sin^2(y)\right| \le |x - y|, \qquad |\arctan x - \arctan y| \le |x - y|, \qquad \left|e^{-x^2/2} - e^{-y^2/2}\right| \le \frac{1}{\sqrt{e}}|x - y|$$

(Vedi pagina: 61)

Esercizio 6.4. La probabilità che una molecola di massa m in un gas a temperatura T abbia velocità v è data dalla **distribuzione di Maxwell–Boltzmann**

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

dove k è la costante di Boltzmann. Trovare la velocità v_* di massima probabilità.

(Vedi pagina: 62)

Esercizio 6.5. Determinare tra i rettangoli di perimetro p assegnato quello di area massima. Ripetere l'esercizio per i triangoli rettangoli.

(Vedi pagina: 63)

Esercizio 6.6. Dire per quali $a > 0$, la funzione $f(x) = \dfrac{e^{-3x^2}}{1 + ax}$ non ha né massimi, né minimi relativi.

(Vedi pagina: 64)

Esercizio 6.7. Individuare il minimo assoluto e tutti i punti di minimo assoluto delle funzioni

$$f(x) = |x - 1| + |x + 1|, \qquad g(x) = |x - 1| + |x| + |x + 1|, \qquad h(x) = \sum_{k=-3}^{3} |x - k|$$

(Vedi pagina: 64)

Esercizio 6.8. Calcolare servendosi del Teorema di de l'Hôpital i limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - \cos(x)}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{3x^2}}{x \sin(2x)}, \qquad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}\right),$$

(Vedi pagina: 66)

Esercizio 6.9. Scrivere i polinomi di Taylor delle seguenti funzioni, con punti iniziali e ordini assegnati,

i. $f(x) = x - \sin x, \quad x_0 = 0,\ n = 5,$ **ii.** $f(x) = e^x - \cos(2\pi x), \quad x_0 = 1,\ n = 4,$

iii. $f(x) = \arctan x, \quad x_0 = 0,\ n = 2,$ **iv.** $f(x) = \dfrac{1}{1-x}, \quad x_0 = 2,\ n = 2,$

v. $f(x) = \sqrt{1+x}, \quad x_0 = 0,\ n = 3,$ **vi.** $f(x) = \sqrt{1+x}, \quad x_0 = 2,\ n = 3$

(Vedi pagina: 66)

Esercizio 6.10. Siano $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \ln(1+x)$ con $x \in I = [0,1]$,
i. scrivere i due rispettivi polinomi di Taylor T_f e T_g con $x_0 = 0, n = 3$;
ii. rappresentare i resti $R_f := f - T_f$ e $R_g := g - T_g$ nella forma di Lagrange;
iii. stimare gli errori di approssimazione $|R_f|$ e $|R_g|$ ed il loro massimo.

(Vedi pagina: 70)

7. Integrali

Capitolo 3 (*LambertiMascia3.pdf*)

(1) Area di un sottografico e somme integrali
(2) Il teorema della media
(3) Il teorema di Torricelli
(4) Formula di Taylor per funzioni integrali

Capitolo 4 (*LambertiMascia3.pdf*)

(1) Integrazione per parti
(2) Integrazione per sostituzione
(3) Integrazione di funzioni razionali

Esercizio 7.1. Assegnata la funzione $f(x) = 1 - x^2$ e l'intervallo $I = [-1, 1]$

- calcolare la somma integrale inferiore relativa alla suddivisione di I in $n = 6$ parti uguali,
- calcolare la somma integrale superiore relativa alla suddivisione di I in $n = 6$ parti uguali,
- calcolare l'integrale $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

(Vedi pagina: 71)

Esercizio 7.2. Assegnata la funzione $f(x) = [x]$, parte intera, determinare l'integrale $\displaystyle\int_{-2}^{1.5} f(x)\,dx$

(Vedi pagina: 72)

Esercizio 7.3. Assegnata la funzione $f(t) = t\,\sin(t)$, e posto $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$

- determinare i punti stazionari di $F(x)$,
- classificare quali siano di massimo e quali di minimo relativi.

(Vedi pagina: 72)

Esercizio 7.4. Assegnata la funzione $f(t) = t\,(t-1)$, calcolare l'integrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} |f(t)|\,dt$.

(Vedi pagina: 72)

Esercizio 7.5. Assegnata la funzione $f(t) = t \cdot e^{-t^2}$, calcolare gli integrali $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt, \quad \int_{-1}^{1} |f(t)|\,dt$

(Vedi pagina: 73)

Esercizio 7.6. Calcolare, servendosi della regola di integrazione per parti, gli integrali

$$\int_0^{2\pi} \sin^m(x)\,dx,\ m = 1,2,3, \qquad \int_0^{\pi} (x + 2x^2)\,\cos(x)\,dx,, \qquad \int_0^1 (2x + x^2) \cdot e^x\,dx$$

(Vedi pagina: 73)

Esercizio 7.7. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ servendosi della sostituzione $x = \sin(t)$.

(Vedi pagina: 74)

Esercizio 7.8. Si determini il polinomio di Taylor di ordine $n = 3$ e punto iniziale $x_0 = 0$ della funzione

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

(Vedi pagina: 74)

Esercizio 7.9. Calcolare gli integrali seguenti

$$\int_0^1 \frac{1}{4+9x^2}\, dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^2+5x+6}\, dx, \qquad \int_0^4 \frac{1}{(x+1)^2}\, dx$$

(Vedi pagina: 75)

Esercizio 7.10. Stimare, servendosi del teorema della media, il seguente integrale $\displaystyle\int_{10}^{20} \left(5+e^{-x^2}\right) dx$

(Vedi pagina: 75)

Esercizio 7.11. Calcolare l'area della regione piana $A : \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\right\}$.

(Vedi pagina: 76)

Esercizio 7.12. Sia $f(x) = 1/x^\alpha$ scelti $0 < r < R$ dire per quali $\alpha > 0$ esistono, finiti, i limiti $\lim_{r\to 0^+} \int_r^R f(x)\, dx$,
$\lim_{R\to +\infty} \int_r^R f(x)\, dx$ e commentare i risultati ottenuti in termini di sottografico di $f(x)$.

(Vedi pagina: 76)

8. Numeri complessi - Eq. differenziali

Capitolo 1 (*LambertiMascia4.pdf*)

(1) Operazioni sui numeri complessi
(2) Esponenziale complesso
(3) Serie geometrica e serie esponenziale nel campo complesso

Capitolo 2 (*LambertiMascia4.pdf*)

(1) Equazioni lineari di primo ordine omogenee
(2) Equazioni lineari di secondo ordine omogenee
(3) Problemi di Cauchy per equazioni omogenee e non omogenee particolari.

Capitolo 3 (*LambertiMascia4.pdf*)

(1) Domini del piano definiti da disuguaglianze
(2) Insiemi di definizione di $f(x,y)$ particolari.

Esercizio 8.1. Assegnati i due numeri complessi $z_1 = 4+3i$ e $z_2 = -3+4i$

- disegnarli sul piano,
- determinare i loro moduli $|z_1|,\ |z_2|$
- disegnare i loro coniugati $\overline{z_1},\ \overline{z_2}$
- determinare $z_1+z_2,\ z_1-z_2,\ z_1\cdot z_2,\ 1/z_2,\ z_1/z_2$ e disegnare sul piano i risultati ottenuti.

(Vedi pagina: 79)

Esercizio 8.2. Determinare e disegnare sul piano complesso le due radici seconde, le tre radici terze e le quattro radici quarte dei numeri $z_1 = 16,\ z_2 = -16,\ z_3 = 81$.

(Vedi pagina: 80)

Esercizio 8.3. Assegnati i numeri complessi $z_1 = \log(3)+i\pi/4$ e $z_2 = -\log(3)+i\pi/4$,

- disegnare sul piano z_1 e z_2,
- determinare i numeri complessi $w_1 = e^{z_1},\ w_2 = e^{z_2}$
- determinare moduli e argomenti di w_1, e w_2,

(Vedi pagina: 82)

Esercizio 8.4. Calcolare, e disegnare sul piano complesso, le somme delle due serie

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\pi)^k}{k!}$$

(Vedi pagina: 82)

Esercizio 8.5. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y'+y=1,\ y(0)=2$ e disegnarne il grafico per $t \geq 0$.

(Vedi pagina: 83)

Esercizio 8.6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy $y'+y=2e^{-t}$, $y(0)=1$ e disegnarne il grafico per $t \geq 0$.

(Vedi pagina: 83)

Esercizio 8.7. Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale del secondo ordine $y''+9y=0$ e disegnare i grafici di tre di esse.

(Vedi pagina: 84)

Esercizio 8.8. Determinare la soluzione $y(x)$ dell'equazione differenziale del secondo ordine $y''+y'-2y=0$ che verifica le condizioni iniziali $y(0)=1,\ y'(0)=-2$ e determinare $\lim_{x\to+\infty} y(x)$.

(Vedi pagina: 84)

Esercizio 8.9. Determinare le soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale del secondo ordine $y''+2y'+5y=0$, successivamente determinare quelle che soddisfano la condizione iniziale $y(0)=0$, e successivamente quella che soddisfa anche la condizione $y'(0)=1$

(Vedi pagina: 86)

Esercizio 8.10. Determinare le soluzioni complesse $y(t)$ dell'equazione differenziale del secondo ordine non omogenea $4y''+3y'=e^{it}$

(Vedi pagina: 86)

Esercizio 8.11. Determinare la soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy $y''+4y=\sin(t),\ y(0)=0,\ y'(0)=0$.

(Vedi pagina: 87)

Esercizio 8.12. Assegnati i punti del piano $A=(0,0),\ B=(3,4),\ C=(6,0)$:

- disegnare il triangolo T del piano da essi determinato,
- determinare il perimetro e l'area di T,
- determinare i tre semipiani la cui intersezione è il triangolo T.

(Vedi pagina: 87)

Esercizio 8.13. Detto R il dominio rettangolare determinato dalle limitazioni $1<x<4,\ -1<y<5$

- determinare il perimetro e l'area,
- scegliere tre punti in R e costruire tre loro intorni circolari interamente contenuti in R,
- disegnare l'intersezione di R con il semipiano $x+y<3$.

(Vedi pagina: 88)

Esercizio 8.14. Disegnare il dominio del piano determinato dalla disuguaglianza $(x+1)^2+(y-2)^2\leq 9$.

(Vedi pagina: 88)

Esercizio 8.15. Determinare il dominio di definizione della funzione $f(x,y)=\log(1-|x|-|y|)$

(Vedi pagina: **??**)

Esercizio 8.16. Posto $f(x,y)=e^{x^2+y^2}-4$ determinare

- l'insieme del piano determinato dalla disuguaglianza $f(x,y)\leq 0$,
- l'insieme del piano determinato dalla disuguaglianza $|f(x,y)|\leq 2$,
- la linea di livello $f(x,y)=e-4$.

(Vedi pagina: **??**)

9. Funzioni di due variabili

Istituzioni di Matematica I (C. Cassisa, L. Lamberti, C. Mascia, V. Nesi)

Scheda 9 – 15 gennaio 2016

Esercizio 9.1. Assegnata la successione di punti del piano $\left\{ P_n = \left(\frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n} \right),\ n = 1, 2, \ldots \right\}$

- esaminare se costituisca un insieme limitato del piano,
- determinare il suo limite,
- detti z_n i numeri complessi $\quad z_n = \frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n} i \quad$ determinare il $\lim_{n\to\infty} z_n$.

(Vedi pagina: 90)

Esercizio 9.2. Assegnato l'insieme del piano $A := \left\{ (x, y) |\ 9x^2 + 4y^2 \leq 36 \right\}$

- esaminare se A é contenuto nel cerchio di centro l'origine e raggio $r = 6$,
- determinare un cerchio di centro l'origine che sia interamente contenuto in A,
- determinare la distanza massima che possono avere due punti P e Q appartenenti ad A.

(Vedi pagina: 90)

Esercizio 9.3. Sia $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$

- determinare l'insieme d'esistenza di f,
- determinare il profilo altimetrico relativo alla curva del piano $x + y = 1$
- determinare l'insieme del piano $f(x, y) \leq 1$.

(Vedi pagina: 91)

Esercizio 9.4. Sia $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}$

- riconoscere che si tratta di una funzione radiale,
- determinare il profilo altimetrico relativo alla curva del piano $x^2 + y^2 = 1$
- determinare l'insieme del piano $\frac{1}{2} \leq f(x, y) \leq 1$.

(Vedi pagina: 92)

Esercizio 9.5. Siano $f(x, y) = 3x + 2y + 1$ e $g(x, y) = x^2 - 4y^2$

- determinare gli insiemi di livello $f(x, y) = 1$ e $g(x, y) = 1$,
- determinare i profili altimetrici di f e di g relativi alla curva del piano $x = \cos(\vartheta),\ y = \sin(\vartheta),\ \vartheta \in [0, 2$

(Vedi pagina: 92)

Esercizio 9.6. Sia $f(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^2$

- esaminare se $f(x, y)$ é limitata inferiormente,
- disegnare i grafici delle funzioni di una variabile $f(t, 0)$ e $f(t, t)$
- determinare le linee di livello $f(x, y) = 4$ e $f(x, y) = 1$,
- determinare i punti stazionari e riconoscere quali siano punti di minimo, di massimo, di sella.

(Vedi pagina: 93)

Esercizio 9.7. Sia $\mathscr{C}$ il profilo altimetrico relativo alla funzione $f(x,y) = x^2 + 3y^2$ e alla curva piana $x = \cos(\vartheta),\ y = \sin(\vartheta),\ \vartheta \in [0, 2\pi]$

- determinare il minimo e il massimo di $f(x,y)$ nel dominio $A : (x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1$,
- determinare la quota minima e la quota massima dei punti di $\mathscr{C}$,
- determinare un dominio D rettangolare dello spazio $\mathbb{R}^3$ che contenga $\mathscr{C}$ al suo interno.

(Vedi pagina: 94)

Esercizio 9.8. Sia $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2 + 5x + 6y + 7$

- determinare le derivate parziali prime f'_x e f'_y,
- determinare le derivate parziali seconde $f''_{x,x},\ f''_{x,y},\ f''_{y,y}$,
- determinare il gradiente nell'origine.

(Vedi pagina: 95)

Esercizio 9.9. Sia $f(x,y) = \dfrac{3x^2 + 4y^2}{1 + x^2 + y^2}$

- determinare le derivate parziali prime nell'origine.
- determinare la derivata della funzione di t

$$F(t) = f\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

- verificare la relazione $F'(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} f_x(0,0) + \dfrac{1}{\sqrt{2}} f_y(0,0)$.

(Vedi pagina: 95)

Esercizio 9.10. Sia $f(x,y) = (x^2 + y^2) \cdot (1 - x^2 - y^2)$

- determinare il gradiente $\nabla f(x,y)$,
- determinare i punti stazionari,
- determinare il piano tangente in ciascun punto stazionario.

(Vedi pagina: 96)

Esercizio 9.11. Siano $A = (1,0,0),\ B = (0,2,0),\ C = (0,0,3)$, detta $z = f(x,y)$ l'equazione del piano passante per tali punti

- determinare $f(x,y)$,
- determinare il gradiente $\nabla f(x,y)$,
- determinare la derivata della funzione di t $F(t) = f(1 - t, 2t)$.

(Vedi pagina: 97)

Esercizio 9.12. Sia $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2 - y^2}$

- esaminare se $f(x,y)$ é limitata,
- determinare il gradiente $\nabla f(x,y)$,e quindi determinare i punti stazionari,
- classificare i punti stazionari riconoscendo quali siano punti di minimo, di massimo, di sella.

(Vedi pagina: 97)

Esercizio 9.13. Sia $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^3$

- esaminare se $f(x,y)$ é limitata inferiormente,

- determinare i punti stazionari,
- classificare i punti stazionari riconoscendo quali siano punti di minimo, di massimo, di sella.

(Vedi pagina: 98)

Esercizio 9.14. Determinare i polinomi di Taylor di punto iniziale $(0,0)$ e ordine $n=2$ per le funzioni

$$e^x \cdot \cos(y), \quad \sin(x+y), \quad \ln(1+x^2+y^2)$$

(Vedi pagina: 99)

CAPITOLO 2

Soluzioni

1. I numeri reali

Corso di laurea in *Chimica*, a.a. 2015/16

Istituzioni di Matematica I (V. Nesi, C. Mascia, L. Lamberti, C. Cassisa)

Soluzioni Scheda 1 – 28 settembre 2015

Esercizio 1.1. Provare per induzione che

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2,$$

Soluzione:

La formula proposta nell'esercizio contiene un parametro $n\in\mathbb{N}$: si tratta quindi di una famiglia (infinita) di formule

- quella per $n=0$,
- quella per $n=1$,
- ecc. ecc.

Provare la validitá di tutte tali formule *per induzione* significa:

- provare che la prima, quella per $n=0$, è vera,
- provare che se è vera la formula per un ***qualsiasi*** grado n è, di conseguenza, vera anche quella per il grado $n+1$ successivo.

Il *meccanismo dell'induzione* conduce quindi ovviamente a che

- essendo vera la prima formula è vera anche la seconda,
- essendo vera la seconda formula è vera anche la terza,
- ecc. ecc.

fino a riconoscere che sono sicuramente vere tutte.

$$\left\{\begin{array}{lll} 0: & \sum_{k=0}^{0}(2k+1)=(0+1)^2 & \\ n_0: & \textit{ammesso che} & \sum_{k=0}^{n_0}(2k+1)=(n_0+1)^2 \\ n_0+1: & \textit{occorre riconoscere che} & \sum_{k=0}^{n_0+1}(2k+1)=\{(n_0+1)+1\}^2 \end{array}\right.$$

Infatti

$$\sum_{k=0}^{n_0+1}(2k+1)=\sum_{k=0}^{n_0}(2k+1)+2(n_0+1)+1=(n_0+1)^2+2n_0+2=\{(n_0+1)+1\}^2$$

Esercizio 1.2. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ provare che

- $n^2 - n$ è divisibile per 2,
- $n^3 - n$ è divisibile per 3.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n^4 - n$ è divisibile per 4 ?

Soluzione:

- $n^2 - n = n(n-1)$ si esprime come il prodotto di due numeri consecutivi, quindi prodotto di un numero pari per un numero dispari: prodotto quindi pari.
- $n^3 - n = n(n^2-1) = n(n-1)(n+1) = (n-1)\,n\,(n+1)$ si esprime come prodotto di tre numeri consecutivi. Comunque si prendano tre numeri consecutivi uno di essi è multiplo di 3.

  Quindi tale prodotto è divisibile per 3.
- $n^4 - n$ non è sempre divisibile per 4, basta provare $n = 2$: $n^4 - n = 14$ numero non divisibile per 4.

Esercizio 1.3. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ sono verificate le seguenti condizioni

$$x - 2|x| + 2 > 0, \qquad \begin{cases} |x| \le 2 \\ |x-1| \le 1 \end{cases}.$$

Soluzione:

Prima disuguaglianza:

$$x - 2|x| + 2 > 0 \to \left(\begin{cases} x + 2x + 2 > 0 \\ x < 0 \end{cases}\right) \cup \left(\begin{cases} x - 2x + 2 > 0 \\ x > 0 \end{cases}\right)$$

$$x - 2|x| + 2 > 0 \to \left(\begin{cases} 3x > -2 \\ x < 0 \end{cases}\right) \cup \left(\begin{cases} x < 2 \\ x > 0 \end{cases}\right)$$

$$x - 2|x| + 2 > 0 \to x \in (-2/3, 0] \cup [0, 2)$$

Seconda disuguaglianza:

$$\begin{cases} |x| \le 2 \\ |x-1| \le 1 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ 0 \le x \le 2 \end{cases} \quad \to \quad 0 \le x \le 2$$

Esercizio 1.4. Dire quale dei seguenti insiemi è un intervallo e determinarne gli estremi:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 + 2x| < 1\}, \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-1}{x^2+1} < \frac{1}{2}\right\}, \quad A \cap B,$$

$$C = \{0\} \cup \left\{\frac{2}{n^2+1}, \forall n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Quale dei precedenti insiemi è limitato?

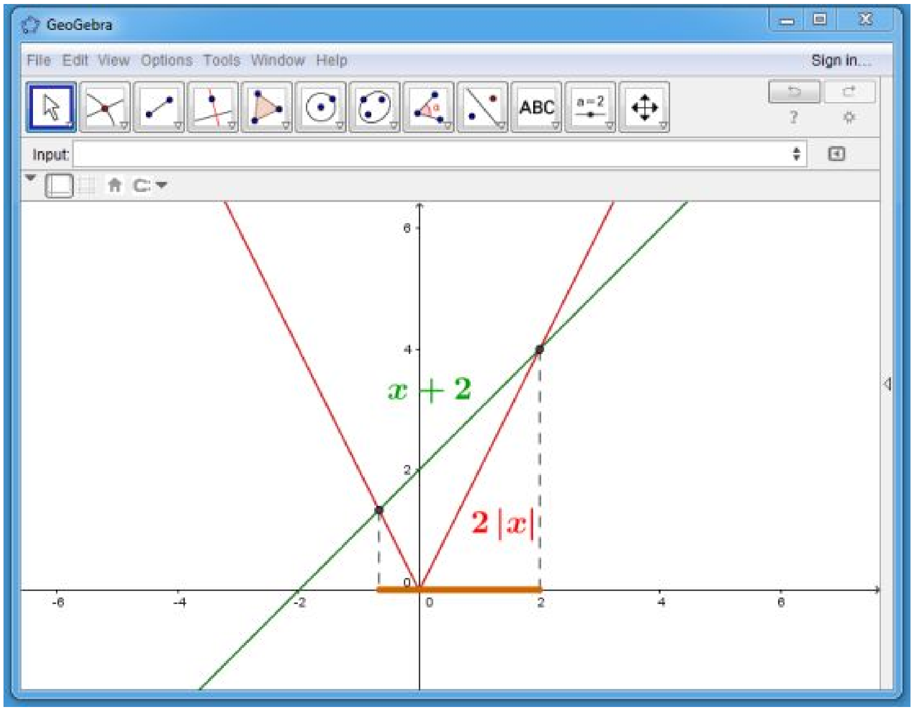


FIGURA 1. $x+2>2|x|$

Soluzione:

$\boxed{A=\{x\in\mathbb{R}\,:\,|x^2+2x|<1\}}$

$$A=\{-1<x^2+2x<1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x+1>0\\ x^2+2x-1<0\end{cases}$$

$$A=\{x\neq -1\}\cap\{-1-\sqrt{2}<x<-1+\sqrt{2}\}=(-1-\sqrt{2},-1)\cup(-1,-1+\sqrt{2})$$

$$\inf(A)=-1-\sqrt{2},\quad \sup(A)=-1+\sqrt{2}$$

A, unione di due intervalli aperti è limitato ma non è un intervallo.

$\boxed{B=\left\{x\in\mathbb{R}\,:\,\frac{x^2-1}{x^2+1}<\frac{1}{2}\right\}}$

$$B=\left\{x\in\mathbb{R}:x^2-1<\frac{1}{2}(x^2+1)\right\}=\{x\in\mathbb{R}:x^2<3)\}=(-\sqrt{3},\sqrt{3})$$

$$\inf(B)=-\sqrt{3},\quad \sup(B)=\sqrt{3}$$

B è un intervallo aperto, limitato.

$\boxed{A\cap B}$

$$A\cap B=(-\sqrt{3},-1)\cup(-1,-1+\sqrt{2})$$

$$\inf(A\cap B)=-\sqrt{3},\quad \sup(A\cap B)=-1+\sqrt{2}$$

$A\cap B$ è limitato ma non è un intervallo.

$\boxed{C=\{0\}\cup\left\{\frac{2}{n^2+1}\,,\ \forall n\in\mathbb{N}\right\}}$

$$C=\left\{0,2,\frac{2}{3},\frac{2}{5},\frac{2}{10},\ldots,\frac{2}{101},\ldots,\frac{2}{1000001},\ldots\right\}$$

C non è un intervallo ma una successione di numeri isolati uno dall'altro.
C è limitato: ovviamente limitato inferiormente perchè formato tutto da numeri non negativi, limitato anche superiormente perchè tutti i numeri $\frac{2}{n^2+1} \leq \frac{2}{1} = 2$.
$\min(C) = 0, \quad \max(C) = 2$.

Esercizio 1.5. Dire quali tra i seguenti insiemi sono limitati e quali non lo sono

$$\{0\} \cup \{1\}, \quad (-\infty, 0] \cup [1, 2], \quad [-1, 1] \cap [0, +\infty), \quad \mathbb{N},$$

Soluzione:

$\{0\} \cup \{1\}$ è un insieme finito (due elementi soltanto) quindi è limitato.
$(-\infty, 0] \cup [1, 2] \supset (-\infty, 0]$ contiene una semiretta, è illimitato.
$[-1, 1] \cap [0, +\infty) \subset [-1, 1]$ è contenuto in un intervallo, quindi è limitato.
$\mathbb{N}$, insieme dei naturali non è superiormente limitato, quindi non è limitato.

Esercizio 1.6. Dire quale tra i seguenti insiemi è limitato e quale è un intervallo

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2\},$$
$$A \cup B, \quad A \cap B,$$
$$C = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 - 1 \geq |x^2 + 1| - |x^2|\}, \quad D = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| \leq 1\},$$
$$C \cup D, \quad C \cap D.$$

Soluzione:

$A = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ è un insieme illimitato e non è un intervallo.
$B = [-2, 2]$ è un intervallo chiuso e limitato.
$A \cup B = (-\infty, +\infty)$ è tutta la retta reale, intervallo non limitato.
$A \cap B = [-2, -1] \cup [1, 2]$ è un insieme limitato formato da due intervalli.
$C = \{2x^2 - 1 \geq |x^2 + 1| - |x^2|\} = \{2x^2 - 1 \geq x^2 + 1 - x^2\} = \{2x^2 \geq 2\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ avendo tenuto conto che i quadrati sono sempre non negativi e quindi $|x^2 + 1| = x^2 + 1, \ |x^2| = x^2$.
C, formato da due semirette, non è un intervallo e non è limitato.
$D = [1, 3]$ è un intervallo chiuso e limitato.
$C \cup D = C$ è insieme non limitato.
$C \cap D = [1, 3]$ è un intervallo chiuso e limitato.

Esercizio 1.7. Dire per ciascuno dei seguenti insiemi se è limitato superiormente [inferiormente] e, in caso affermativo, calcolarne l'estremo superiore [inferiore], indicando se si tratta di massimo [rispettivamente minimo]

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ |x + 2| > 4\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \ |x - 1| \leq 3\}, \quad C = \mathbb{N} \cap \left(-\frac{10}{3}, 5\right),$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : \ |x + 2| \leq 4, x^2 - 5x + 4 > 0\}.$$

Soluzione:

$A = (-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$ insieme non limitato nè inferiormente nè superiormente.
$B = [-2, 4]$ intervallo chiuso e limitato $\min(B) = -2,\ \max(B) = 4$.
$C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ insieme finito, limitato. $\min(C) = -3,\ \ \max(C) = 5$.
$D = [-6, 2] \cap \{(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)\} = [-6, 1]$ intervallo chiuso e limitato. $\min(D) = -6,\ \max(D) = 1$.

Esercizio 1.8. Per quali $x, y \in R$ vale la relazione $|x+y| = |x| + |y| \quad ?$

Soluzione:

La relazione vale per

- $x \geq 0,\ y \geq 0$,
- $x \leq 0,\ y \leq 0$.

Mentre non vale se x ed y sono uno positivo e uno negativo.

Esercizio 1.9. Usando il postulato di Archimede verificare che per ogni $x > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $0 < 1/n < x$.

Soluzione:

Essendo $x > 0$

$$0 < \frac{1}{n} < x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} < n$$

La seconda disuguaglianza equivale al fatto che $\mathbb{N}$ è illimitato superiormente.

2. Funzioni elementari

Corso di laurea in *Chimica*, a.a. 2015/16

Istituzioni di Matematica I (V. Nesi, C. Mascia, L. Lamberti, C. Cassisa)

Soluzioni Scheda 2 – 5 ottobre 2015

Esercizio 2.1. Determinare l'insieme di definizione delle funzioni seguenti

$$\frac{2x^2-3}{x^4-5x^2+4}, \qquad \frac{10^x}{2\cos x-1}, \quad \frac{10^x}{\cos x-2}$$

$$\frac{1}{|x+6|\sqrt{x^2+2x-15}}, \quad \sin(\pi x^2), \quad \tan(\pi x^2)$$

Soluzione:

L'insieme di definizione della funzione f è l'insieme dei numeri x sui quali il calcolo $f(x)$ è eseguibile: così, ad esempio, se $f(x)$ include frazioni l'insieme di definizione non dovrá contenere alcun numero sul quale qualcuno dei denominatori presenti si annulli.
Analogamente se $f(x)$ include radici quadrate l'insieme di definizione non dovrá contenere alcun numero sul quale qualcuno dei radicandi sia negativo.

$$\frac{2x^2-3}{x^4-5x^2+4} \quad \to \quad x^4-5x^2+4 \neq 0 \quad \to \quad (x \neq \pm 2) \cap (x \neq \pm 1)$$

$$\frac{10^x}{2\cos x-1} \quad \to \quad 2\cos x-1 \neq 0 \quad \to \quad x \neq \pm\tfrac{\pi}{3}+2k\pi,\, k=0,\pm 1,,\ldots$$

$$\frac{10^x}{\cos x-2} \quad \to \quad \cos x-2 \neq 0 \quad \to \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{|x+6|\sqrt{x^2+2x-15}} \quad \to \quad |x+6|\sqrt{x^2+2x-15} \neq 0 \quad \to \quad (x \neq -6) \cap \{(x \leq -5) \cup (x \geq 3)\}$$

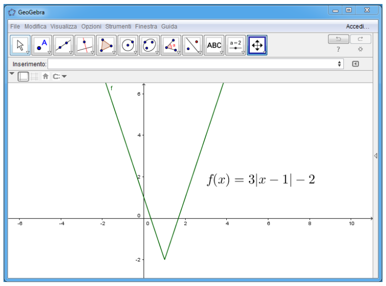
$$\sin(\pi x^2) \quad \to \quad x \in \mathbb{R}$$

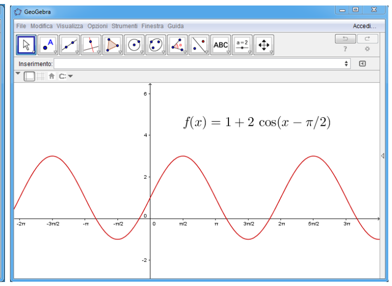
$$\tan(\pi x^2) \quad \to \quad x^2 \neq \tfrac{2k+1}{2} \quad \to \quad x \neq \pm\sqrt{\tfrac{2k+1}{2}}, k=0,1,2,\ldots$$

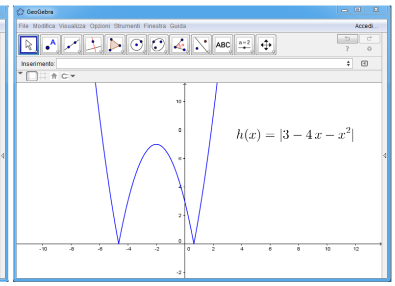
Esercizio 2.2. Disegnare i grafici delle funzioni seguenti

$$f(x) = 3|x-1|-2, \qquad g(x) = 1+2\cos(x-\frac{\pi}{2}), \qquad h(x) = |3-4x-x^2|.$$

Soluzione:







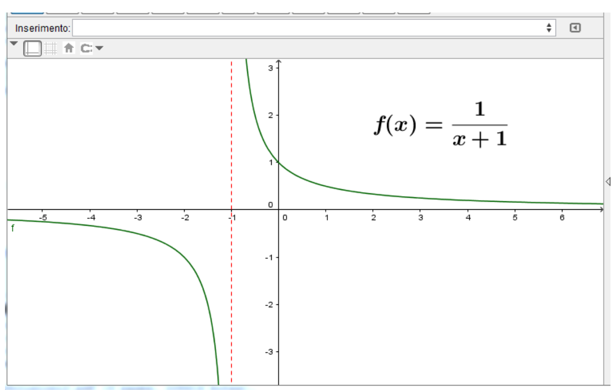
Esercizio 2.3. Per ciascuna delle seguenti funzioni

$$a(x) := \frac{1}{x+1}, \; b(x) := \sqrt{4-x}, \; c(x) := |x|-x, \; d(x) := \cos(2x), \; f(x) := \min\{0, \cos x\},$$

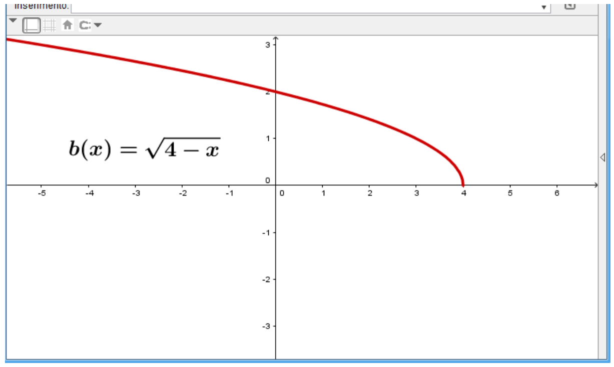
- determinare il dominio di definizione;
- disegnarne approssimativamente il grafico;
- dire se si tratta di funzione periodica.

Soluzione:

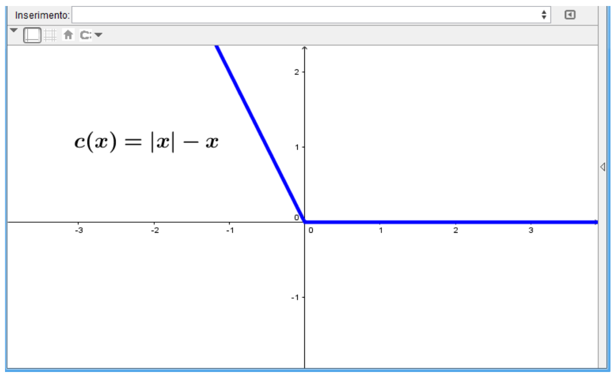
(1) $a(x) := \frac{1}{x+1}$, $\quad D = \{x \neq -1\}$, non periodica:



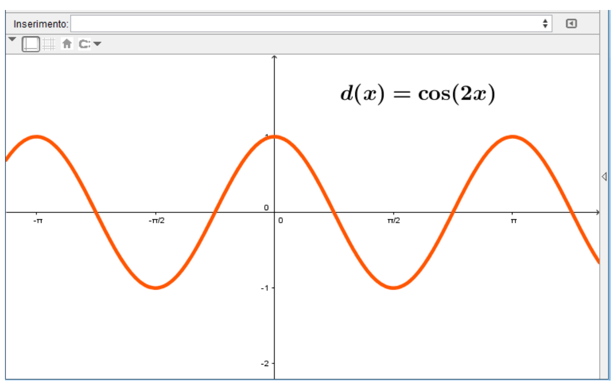
(2) $b(x) := \sqrt{4-x}, \quad D = \{x \leq 4\}$, non periodica :



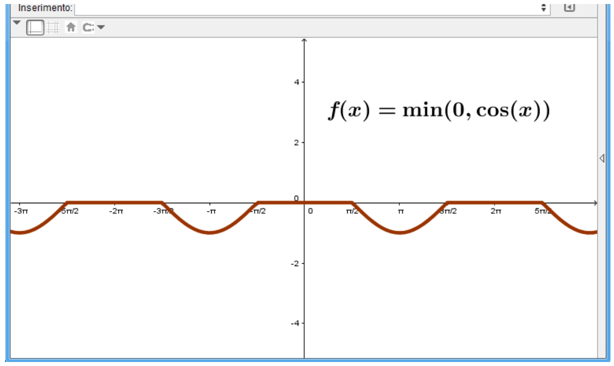
(3) $c(x) := |x| - x, \quad D = \mathbb{R}$, non periodica



(4) $d(x) := \cos(2x), \quad D = \mathbb{R}$, periodica di periodo $T = \pi$



(5) $f(x) := \min\{0, \cos x\}$, $\quad D = \mathbb{R}$, periodica di periodo $T = 2\pi$



Esercizio 2.4. Scrivere la funzione composta $h = f \circ g$ e $k = g \circ f$ nei seguenti casi:

i: $f(x) = x + 1, \qquad g(x) = x^2 - 2x;$
ii: $f(x) = x^2, \qquad g(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0.$

Soluzione:

i: $f \circ g : x \mapsto (x^2 - 2x) + 1, \qquad g \circ f : x \mapsto (x+1)^2 - 2(x+1)$
ii: $f \circ g : x \mapsto (\sqrt{x})^2 = x, \qquad g \circ f : x \mapsto \sqrt{x^2} = |x|$

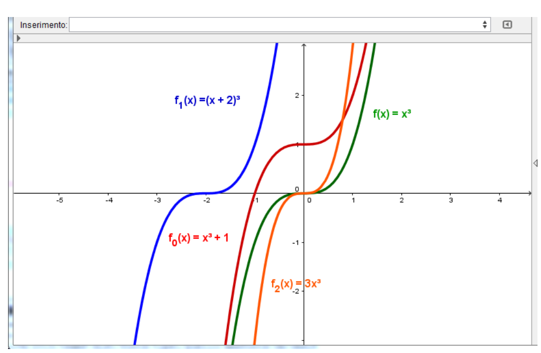
Esercizio 2.5. Data la funzione $f(x) = x^3$, disegnare il grafico di

$$f_0(x) = f(x) + 1, \quad f_1(x) = f(x+2), \quad f_2(x) = 3f(x), \quad f_3(x) = f(3x),$$
$$f_4(x) = f_0(-x) \quad f_5(x) = -f_0(x), \quad f_6(x) = |f_0(x)|, \quad f_7(x) = f_0(|x|).$$

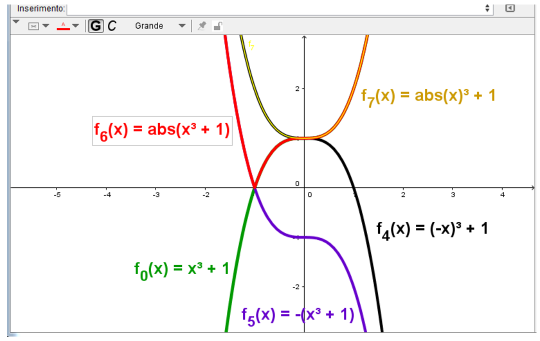
[Osservare che le ultime 4 funzioni dipendono da f_0 e non da f].

Soluzione:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3 \\
f_0(x) &= f(x) + 1 &&= x^3 + 1, \\
f_1(x) &= f(x+2) &&= (x+2)^3, \\
f_2(x) &= 3f(x) &&= 3x^3, \\
f_3(x) &= f(3x) &&= 3^3 x^3,
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} f_0(x) &= f(x)+1 &&= x^3+1, \\ f_4(x) &= f_0(-x) &&= (-x)^3+1, \\ f_5(x) &= -f_0(x) &&= -x^3-1, \\ f_7(x) &= f_0(|x|) &&= |x|^3+1. \end{aligned}$$



Esercizio 2.6. Provare che la funzione $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ è limitata e dire se è iniettiva. *[Non si richiede di disegnare il grafico ma solo di rispondere alle domande]*

Soluzione:

$$0 \leq (|x|-1)^2 \quad \to \quad 2|x| < x^2+1 \quad \to \quad \left| \frac{2x}{x^2+1} \right| \leq 1$$

$$\frac{2a}{a^2+1} = \frac{2b}{b^2+1} \quad \to \quad ab(b-a) = (b-a) \quad \to \quad ab = 1 \quad \to \quad f(a) = f(1/a)$$

Esercizio 2.7. Determinare il dominio D di $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ e dire se $f : D \to \mathbb{R}$ è limitata, se è iniettiva, se è suriettiva. *[Non si richiede di disegnare il grafico ma solo di rispondere alle domande]*

Soluzione:

Il dominio è $\mathbb{R}/\{0\}$.
$f(x) = x + \frac{1}{x}$ non è limitata per via dei termini x e $\frac{1}{x}$. Esaminiamo quando riesce $f(a) = f(b)$;

$$a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b} \quad \to \quad a - b = \frac{a-b}{ab}$$

scelto $b = 1/a$, $a \neq 1$ riesce

$$a \neq 1/a, \ f(a) = f(1/a)$$

pertanto la funzione non è iniettiva.
L'immagine di f non contiene lo zero:

$$f(x) = 0 \quad \to \quad x + \frac{1}{x} = 0 \quad \to \quad \frac{x^2+1}{x} = 0$$

tanto basta a riconoscere che l'immagine di f non coincide con tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 2.8. Provare che: se f e g sono limitate $\Rightarrow$ $f+g$ e $f \cdot g$ sono limitate.

Soluzione:

$$|f(x)| \leq M, \quad |g(x)| \leq N \quad \to \quad |f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M+N$$

$$|f(x)| \leq M, \quad |g(x)| \leq N \quad \to \quad |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq M \cdot N$$

Esercizio 2.9. Provare che: se f e g sono crescenti $\Rightarrow f+g$ è crescente ma $f-g$ in generale non lo è. Pensate che $f \cdot g$ sia monotona?

Soluzione:

- somma: $x_1 < x_2 \quad \rightarrow \quad f(x_1)+g(x_1) \leq f(x_2)+g(x_1) \leq f(x_2)+g(x_2)$
- differenza: il risultato non vale come prova il seguente contresempio

$$f(x) = x,\, g(x) = 2x, \qquad f(x) - g(x) = -x$$

Il prodotto di due funzioni crescenti può essere non crescente come risulta dal contresempio

$$f(x) = g(x) = x, \qquad f(x) \cdot g(x) = x^2.$$

Corso di laurea in *Chimica*, a.a. 2015/16

Istituzioni di Matematica I (V. Nesi, C. Mascia, L. Lamberti, C. Cassisa)

Soluzioni Scheda 3 – 12 ottobre 2015

Esercizio 3.1. Mostrare **usando la definizione** la validità di

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n^2+3n} = 0,$$

Soluzione:

L'esercizio richiede di provare che comunque si prenda $\varepsilon > 0$ esiste una soglia n_ε tale che

$$\left| \frac{n+2}{n^2+3n} - 0 \right| < \varepsilon$$

per tutti gli $n > n_\varepsilon$.

Studiamo per quali n è soddisfatta la disuguaglianza

$$\frac{n+2}{n^2+3n} < \varepsilon$$

Ci sono due strade:

- quella algebrica standard $n+2 < \varepsilon n^2 + 3\varepsilon n$,
- quella di valutare quanto sia grande il numero $\dfrac{n+2}{n^2+3n}$ tramite qualche sua evidente stima.

La prima strada conduce alla disuguaglianza

$$\varepsilon n^2 + (3\varepsilon - 1)n - 2 > 0 \quad \to \quad n > \frac{1-3\varepsilon+\sqrt{(1-3\varepsilon)^2+8\varepsilon}}{2\varepsilon}$$

La parte intera della frazione a destra fornisce il valore soglia n_ε cercato.

La seconda strada si basa sulla catena di evidenti disuguaglianze seguenti

$$\frac{n+2}{n^2+3n} < \frac{n+2}{n^2} < \frac{3n}{n^2} = \frac{3}{n}$$

dalla quale è evidente che

$$\frac{3}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$$

e quindi anche

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \to \quad \frac{n+2}{n^2+3n} < \varepsilon$$

OSSERVAZIONE 3.1. Si noti come nella definizione di limite si chieda l'esistenza di

”un n_ε”

intendendo ovviamente che se c'è una soglia utile saranno utili anche tutte quelle maggiori....
Nell'esercizio considerato probabilmente la soglia ottenuta con la prima strada è piú bassa di quella indicata nella seconda.
Un problema che si potrebbe ulteriormente considerare potrebbe essere quello di determinare per ogni $\varepsilon > 0$ la soglia n_ε piú bassa, la migliore...

Esercizio 3.2. Calcolare, se esiste, il limite delle seguenti successioni

$$\frac{3n^3+2n+1}{4n^4+3n^3+2}, \quad (-1)^n+2, \quad n+(-1)^n, \quad \frac{n^2+n\sin(n)}{2n^2+3n+1}, \quad \frac{3^n+n}{n^3+1},$$
$$n^2 2^{-n}, \quad \frac{3^n}{2^n+4^n}, \quad \frac{1+\cos^2(1+n^2)}{n^2}, \quad \frac{3^n}{n^{100}}, \quad \frac{4n^4-n^3+4n^2}{2n^4+3},$$
$$\frac{3^n+n}{4^n+n^2\sin(n)}, \quad \frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n}, \quad \frac{n^2}{n+1}-\frac{n^2+1}{n}, \quad \sqrt{n^2+n}-n$$
$$\frac{2n^3+n+1}{4n^2+3n+2}, \quad \frac{3^n-n^2}{2^n+n^5}, \quad \frac{\ln n-2^n+\sin(n)}{n^3-n!}, \quad \frac{\sqrt{n^2-n+1}-2n}{n+1},$$

Soluzione:

$\boxed{\dfrac{3n^3+2n+1}{4n^4+3n^3+2}}$

$$\frac{3n^3+2n+1}{4n^4+3n^3+2}=\frac{3/n+2/n^3+1/n^4}{4+3/n+2/n^4}\to\frac{0}{4}=0$$

$\boxed{(-1)^n+2,}$

$$\{1,\,3,\,1,\,3,\,1,\dots\}$$

Non converge.

$\boxed{n+(-1)^n,}$

$$\{1,2,3,4,5,6,\dots\}+\{-1,1,-1,1,-1,1,\dots\}=\{0,3,2,5,4,7,6,9,8,\dots\}$$

Diverge a $+\infty$.

$\boxed{\dfrac{n^2+n\sin(n)}{2n^2+3n+1},}$

$$\frac{n^2+n\sin(n)}{2n^2+3n+1}=\frac{1+\sin(n)/n}{2+3/n+1/n^2}\to\frac{1}{2}$$

$\boxed{\dfrac{3^n+n}{n^3+1}}$

Tenuto conto (formula del binomio di Newton[1]) che

$$3^n=(1+2)^n=1+2n+2^2\frac{n(n-1)}{2!}+2^3\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+2^4\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}+\dots$$

riesce anche

$$3^n>2^4\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

[1] https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_binomiale

da cui
$$\frac{3^n}{n^3} > 2^4\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!\,n^3} = \frac{2}{3}\,n\,(1-1/n)\,(1-2/n)\,(1-3/n)$$
implica che $\dfrac{3^n}{n^3}$ diverge a $+\infty$.
Pertanto
$$\frac{3^n+n}{n^3+1} = \frac{3^n/n^3+1/n^2}{1+1/n^3} > \frac{3^n/n^3}{1+1} > \frac{1}{3}n\,(1-1/n)\,(1-2/n)\,(1-3/n)$$
e quindi anche $\dfrac{3^n+n}{n^3+1}$ diverge a $+\infty$.

$\boxed{n^2\,2^{-n},}$

$$n^2\,2^{-n} = \frac{n^2}{2^n} = \frac{1}{\left\{\dfrac{2^n}{n^2}\right\}} \to 0$$

Il risultato dipende dal fatto che $\dfrac{2^n}{n^2}$ diverge a $+\infty$.

$\boxed{\dfrac{3^n}{2^n+4^n},}$

$$\frac{3^n}{2^n+4^n} = \frac{\dfrac{3^n}{4^n}}{\dfrac{2^n}{4^n}+1} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n+1} \to \frac{0}{1} = 0$$

$\boxed{\dfrac{1+\cos^2(1+n^2)}{n^2}}$

$$\left|\frac{1+\cos^2(1+n^2)}{n^2}\right| \le \frac{2}{n^2} \to 0$$

$$\boxed{\frac{3^n}{n^{100}}}$$

$$\frac{3^n}{n^{100}} = \left(\frac{\sqrt[100]{3}}{n}\right)^{100}$$

Tenuto presente che $\sqrt[100]{3} > 1$ e che quindi $\dfrac{\sqrt[100]{3}}{n}$ diverge a $+\infty$ si riconosce che anche $\dfrac{3^n}{n^{100}}$ diverge a $+\infty$.

A titolo di esempio si considerino le seguenti tabelle che riportano i valori della successione $\{a_n\}$ rispettivamente per $n \in [1,15]$, $n \in [586,600]$e $n \in [651,665]$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3. \\ 2 & 7.099748146989106^{-30} \\ 3 & 5.238878087203109^{-47} \\ 4 & 5.040642375067525^{-59} \\ 5 & 3.0803909585545973^{-68} \\ 6 & 1.115841449757663^{-75} \\ 7 & 6.761526922493312^{-82} \\ 8 & 3.2208562225818384^{-87} \\ 9 & 7.410377775395764^{-92} \\ 10 & 5.9049^{-96} \\ 11 & 1.2854798874799832^{-99} \\ 12 & 6.416976544852991^{-103} \\ 13 & 6.430445779388154^{-106} \\ 14 & 1.166524859202569^{-108} \\ 15 & 3.52933526191323^{-111} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 586 & 635.761 \\ 587 & 1608.3 \\ 588 & 4069.73 \\ 589 & 10301.2 \\ 590 & 26081.9 \\ 591 & 66056.2 \\ 592 & 167345. \\ 593 & 424067. \\ 594 & 1.07493 \times 10^6 \\ 595 & 2.72552 \times 10^6 \\ 596 & 6.91261 \times 10^6 \\ 597 & 1.7537 \times 10^7 \\ 598 & 4.45033 \times 10^7 \\ 599 & 1.12966 \times 10^8 \\ 600 & 2.86832 \times 10^8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 651 & 1.76945 \times 10^{29} \\ 652 & 4.55301 \times 10^{29} \\ 653 & 1.17182 \times 10^{30} \\ 654 & 3.01666 \times 10^{30} \\ 655 & 7.76769 \times 10^{30} \\ 656 & 2.00059 \times 10^{31} \\ 657 & 5.1538 \times 10^{31} \\ 658 & 1.32799 \times 10^{32} \\ 659 & 3.42267 \times 10^{32} \\ 660 & 8.82337 \times 10^{32} \\ 661 & 2.27512 \times 10^{33} \\ 662 & 5.86775 \times 10^{33} \\ 663 & 1.5137 \times 10^{34} \\ 664 & 3.90576 \times 10^{34} \\ 665 & 1.00802 \times 10^{35} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{4n^4 - n^3 + 4n^2}{2n^4 + 3}}$$

$$\frac{4n^4 - n^3 + 4n^2}{2n^4 + 3} = \frac{4 - 1/n + 4/n^2}{2 + 3/n^4} \to \frac{4}{2} = 2$$

$$\boxed{\frac{3^n + n}{4^n + n^2\,\sin(n)}}$$

$$\frac{3^n + n}{4^n + n^2\,\sin(n)} = \frac{\dfrac{3^n}{4^n} + \dfrac{n}{4^n}}{1 + \dfrac{\sin(n)}{4^n/n^2}} \to \frac{0}{1} = 0$$

$$\boxed{\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n}}$$

$$\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n} = -\frac{1+2n}{n+n^2} = -\frac{1/n^2+2/n}{1/n+1} \to -\frac{0}{1} = 0$$

$$\boxed{\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+1}{n}}$$

$$\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+1}{n} = -\frac{n^2+n+1}{n^2+n} = -\frac{1+1/n+1/n^2}{1+1/n} \to -\frac{1}{1} = -1$$

$$\boxed{\sqrt{n^2+n} - n}$$

$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}+1} \to \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\frac{2n^3+n+1}{4n^2+3n+2}}$$

$$\frac{2n^3+n+1}{4n^2+3n+2} = \frac{2n+1/n+1/n^2}{4+3/n+2/n^2}$$

Tenuto presente che il numeratore diverge a $+\infty$ mentre il denominatore converge a 4 se ne deduce che $\dfrac{2n^3+n+1}{4n^2+3n+2}$ diverge a $+\infty$.

$$\boxed{\frac{3^n-n^2}{2^n+n^5}}$$

$$\frac{3^n-n^2}{2^n+n^5} = \frac{1-n^2/3^n}{2^n/3^n+n^5/3^n}$$

Tenuto presente che il numeratore converge a 1 mentre il denominatore, formato tutto da numeri positivi, tende a 0 se ne deduce che $\dfrac{3^n-n^2}{2^n+n^5}$ diverge a $+\infty$.

$$\boxed{\frac{\log(n)-2^n+\sin(n)}{n^3-n!}}$$

$$\frac{\log(n)-2^n+\sin(n)}{n^3-n!} = \frac{\log(n)/n!-2^n/n!+\sin(n)/n!}{n^3/n!-1}$$

Tenuto presente che

$$\frac{\log(n)}{n!} \to 0, \quad \frac{2^n}{n!} \to 0, \quad \frac{\sin(n)}{n!} \to 0, \quad \frac{n^3}{n!} \to 0$$

se ne deduce che $\dfrac{\log(n)-2^n+\sin(n)}{n^3-n!} \to 0$.

$$\boxed{\frac{\sqrt{n^2-n+1}-2n}{n+1}}$$

$$\frac{\sqrt{n^2-n+1}-2n}{n+1} = \frac{\sqrt{1-1/n+1/n^2}-2}{1+1/n} \to \frac{1-2}{1} = -1$$

Esercizio 3.3. Sia a_n una successione convergente al numero reale L. Fare un esempio di un caso in cui $1/a_n$ non tende ad $1/L$."

Soluzione:

$$\left\{\lim_{n\to\infty} a_n = L\right\} \text{ AND } \{L \neq 0\} \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{L}$$

Quindi l'unica possibilità è quella di $L = 0$.
Esempi:

- $\{a_n = 1/n\}$ la successione $\{1/a_n\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ diverge a $+\infty$,
- $\{a_n = (-1)^n/n\}$ la successione $\{1/a_n\} = \{-1, 2, -3, 4, \dots\}$ non è neanche regolare.

Esercizio 3.4. Sia a_n una successione limitata di numeri reali, con $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dire se esistono i seguenti limiti, motivando le risposte con esempi e controesempi:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n+1}, \qquad \lim_{n\to+\infty} na_n, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{na_n+1}{n^2+2}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{a_n}.$$

Soluzione:

Sia $\forall n \in \mathbb{N}: \ |a_n| \leq M$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n+1}}$$

$$\left|\frac{a_n}{n+1}\right| \leq M \frac{1}{n+1} \quad \to \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n+1} = 0$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\,a_n}$$

L'ipotesi $\{a_n\}$ limitata non consente di prevedere nulla sulla $\{n\,a_n\}$:

- se ad esempio fosse $a_n = (-1)^n$ la successione $\{n\,a_n\}$ sarebbe non regolare,
- se ad esempio fosse $a_n = 1/n$ la successione $\{n\,a_n\}$, fatta di tutti 1 sarebbe convergente a 1
- se ad esempio fosse $a_n = 1/n^2$ la successione $\{n\,a_n\}$ sarebbe convergente a zero.
- ecc. ecc.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n\,a_n+1}{n^2+2}}$$

$$\left|\frac{n\,a_n+1}{n^2+2}\right| \leq \left(\frac{|a_n|}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \leq \left(\frac{M}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n\,a_n+1}{n^2+2} = 0$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{a_n}}$$

$$\left|\frac{n^3}{a_n}\right| > \frac{n^3}{M}$$

disuguaglianza che implica che $\{\left|\frac{n^3}{a_n}\right|\}$ è divergente.

Esercizio 3.5. Dati $A, B \in \mathbb{R}$, sia $a_n := n^2 + A\,n + B$. Per quali scelte di A e B, la successione a_n è monotona? Per quali scelte di A e B, la successione a_n è definitivamente monotòna?

Soluzione:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; a_{n+1} \geq a_n \quad \to \quad (n+1)^2 + A\,(n+1) + B \geq n^2 + A\,n + B$$

che svolti i conti produce

$$\forall n \in \mathbb{N}: \; 2n+1+A \geq 0 \quad \to \quad 3+A \geq 0 \quad \to \quad A \geq -3$$

Quindi le successioni $\{n^2 + A\,n + B\}$ sono strettamente crescenti per $A \geq -3$: il valore di B non influisce sul carattere di monotonia della successione in alcun modo.

Basta riflettere sul grafico della funzione $f(x) = x^2 + Ax + B$ per riconoscere che al crescere di x, a destra dell'ascissa $x_V = -A/2$ del vertice V della parabola i valori di $f(x)$ aumentano.
Quindi, qualunque siano A e B le successioni $\{n^2 + A\,n + B\}$ sono sempre definitivamente strettamente crescenti.
Quindi le successioni $\{n^2 + A\,n + B\}$ non sono mai decrescenti.

Esercizio 3.6. (*impegnativo*) Sia a_n la successione definita per ricorrenza nel seguente modo:

$$a_0 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

i. dimostrare che la successione è a termini positivi;
ii. mostrare che la successione è monotona decrescente;
iii. calcolare il limite di a_n per $n \to \infty$.

Soluzione:

- Il primo termine $a_0 = 2$ è maggiore di $\sqrt{2}$: inoltre

$$a_n > \sqrt{2} \quad \to \quad a_{n+1} > \sqrt{2}$$

Infatti

$$a_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n} - \sqrt{2} = \frac{a_n^2 - 2a_n\sqrt{2} + \sqrt{2}^2}{2a_n} = \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2a_n} > 0$$

- La successione $\{a_n\}$ è decrescente: infatti $\sqrt{2} < a_1 < a_0$ e

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) < a_n \Leftrightarrow \frac{2}{a_n} < a_n \Leftrightarrow 2 < a_n^2$$

- La successione $\{a_n\}$ **limitata e decrescente** è quindi convergente: detto ℓ il suo limite devono riuscire soddisfatte le seguenti proprietà
  - $a_n \geq \sqrt{2} \quad \to \quad \ell \geq \sqrt{2}$
  - $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \ell$
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right)$

  da cui

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right) \quad \to \quad \frac{2}{\ell} = \ell \quad \to \quad \ell^2 = 2$$

Sapendo del resto che $\ell \geq \sqrt{2}$ si deduce che

$$\ell = \sqrt{2}$$

Esercizio 3.7. (*impegnativo*) Sia a_n la successione definita per ricorrenza nel seguente modo:

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = 2\,a_n + 1.$$

i. Dimostrare per induzione che la successione è a termini positivi ed è strettamente crescente;
ii. dimostrare che la successione a_n è divergente;
iii. determinare la forma esplicita di a_n.

Soluzione:

- La successione è formata da tutti numeri positivi; infatti $a_1 = 1$ è positivo e, se a_n è positivo allora $a_{n+1} = 2a_n + 1 > 1$ è anch'esso positivo.

  É inoltre evidente che, essendo tutti gli a_n positivi riesce anche

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 > a_n + 1 > a_n$$

  e quindi si tratta di una successione crescente.
- Riesce inoltre $a_n \geq n$ infatti $a_1 \geq 1$ e se $a_n \geq n$ allora $a_{n+1} = 2a_n + 1 \geq 2n + 1 > n + 1$, da cui per induzione è provato che $a_n \geq n$ e quindi che la successione $\{a_n\}$ è divergente a $+\infty$.

- Consideriamo i primi termini

$$\begin{array}{lll} a_1 & = 1 & = 1 \\ a_2 & = 2a_1 + 1 & = 2 + 1 \\ a_3 & = 2a_2 + 1 & = 2^2 + 2 + 1 \\ a_4 & = 2a_3 + 1 & = 2^3 + 2^2 + 2 + 1 \\ \dots & & \\ a_n & = 2a_{n-1} + 1 & = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1 \end{array}$$

Per provare che la formula

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k$$

sia vera occorre dimostrarla per induzione:

  - per $n = 1$ la formula è giusta,
  - se è vera per l'ordine n, cioè se $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k$ allora

$$a_{n+1} = 2\left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^k\right) + 1 = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{k+1} + 1 = \sum_{k=0}^{n} 2^k$$

  che riconosce come la formula sia valida anche per l'ordine $n+1$ successivo.

Quindi la formula è vera per ogni n.

La formula può essere scritta in modo utile ricordando la nota espressione della somma

$$1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

che nel caso $r = 2$ produce

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$$

Corso di laurea in *Chimica*, a.a. 2015/16

Istituzioni di Matematica I (V. Nesi, C. Mascia, L. Lamberti, C. Cassisa)

Soluzioni Scheda 4 – 29 ottobre 2015

Esercizio 4.1. Discutere il carattere delle seguenti serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{3n+8},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+n^2+n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n^2+n)^n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+n^3}{2^n+n!}$$

Soluzione:

$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}}$: Denotiamo con $a_n=\frac{1}{2^n}$ il termine generico: si tratta di una serie geometrica di ragione $q=1/2$, convergente con somma

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{3n+8}}$ i termini $\frac{n+1}{3n+8}$ non hanno limite zero, quindi la serie non è convergente.

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+n^2+n}}$ i termini verificano la disuguaglianza

$$\forall n\in\mathbb{N}:\ 0\le\frac{1}{n^3+n^2+n}\le\frac{1}{n^3}$$

e pertanto costituiscono una serie convergente.

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}}$ I termini a_n verificano definitivamente la relazione

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\to\frac{1}{2}<1$$

Quindi i termini della serie sono definitivamente minori di quelli di una serie geometrica convergente: quindi la serie è convergente.

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n^2+n)^n}}$ I termini a_n verificano la relazione

$$a_n<\frac{n!}{n^n}$$

e i termini $b_n=\frac{n!}{n^n}$ formano una serie convergente in quanto

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}\to\frac{1}{e}<1$$

e quindi sono addendi definitivamente maggiorati da una serie geometrica convergente.

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n+n^3}{2^n+n!}}$ Tenuto presente che riesce definitivamente

$$\frac{4^n+n^3}{2^n+n!} \leq \frac{4^n+4^n}{n!} = 2\frac{4^n}{n!}$$

i termini sono maggiorati dai termini della serie esponenziale che è convergente, si riconosce che la serie assegnata è convergente.

Esercizio 4.2. Studiare la convergenza assoluta delle serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2)\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Soluzione:

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n+1}}$

$$\left|\frac{(-1)^n n}{3^n+1}\right| = \frac{n}{3^n+1} \leq \frac{n}{3^n}$$

Tenuto presente che gli addendi a_n di quest'ultima verificano la relazione

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{3n} \to \frac{1}{3} < 1$$

si riconosce che la serie assegnata è assolutamente convergente.

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2)\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)}$

$$\left|\cos(n^2)\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)\right| \leq \left|\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)\right| \leq \frac{1}{2^n}$$

si riconosce che i termini sono maggiorati, in modulo, dai termini di una serie geometrica di ragione $q = \frac{1}{2}$ convergente: quindi la serie assegnata è assolutamente convergente.

Esercizio 4.3. Date $\{a_n\}$ una successione limitata e $\sum_n b_n$ una serie assolutamente convergente, provare che la serie $\sum_n a_n b_n$ è assolutamente convergente.

Soluzione:

Poichè esiste $M > 0$ tale che $|a_n| \leq M$ allora

$$|a_n\, b_n| = |a_n|\,|b_n| \leq M|b_n|$$

Pertanto i termini della serie $\sum_n a_n b_n$ sono maggiorati in modulo da quelli di una serie convergente: pertanto la serie dei prodotti assegnata è assolutamente convergente.

Esercizio 4.4. Sia $\sum_n a_n$ una serie assolutamente convergente, dimostrare che anche $\sum_n a_n^2$ é assolutamente convergente.

Soluzione:

La serie $\sum_n |a_n|$ è convergente, quindi

$$|a_n| \to 0 \Rightarrow |a_n^2| = |a_n|^2 \leq |a_n|$$

La serie dei quadrati ha quindi i termini maggiorati da quelli di una serie convergente quindi la serie dei quadrati è convergente.

Esercizio 4.5. Determinare l'insieme di definizione e l'insieme di continuità delle funzioni $\sqrt{x^2 - x^3}$, $\operatorname{sgn}(x)$, $x\operatorname{sgn}(\sin x)$.

Soluzione:

$\boxed{\sqrt{x^2 - x^3}}$ É definita per $x^2 - x^3 \geq 0$ quindi $x^2(1-x) \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$.
É continua in tutto il suo insieme di definizione.

$\boxed{\operatorname{sgn}(x)}$ É definita in tutto $\mathbb{R}$ ma è continua solo per $x \neq 0$.

$\boxed{x\operatorname{sgn}(\sin x)}$ É definita in tutto $\mathbb{R}$ ma è continua solo per $x \neq k\pi,\ k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Esercizio 4.6. In ciascuno dei casi seguenti, dire se è possibile determinare $a \in \mathbb{R}$ in modo che la corrispondente funzione sia continua in $x = 0$

$$f(x) := \begin{cases} 2x + x^2 + 6 & x < 0 \\ a(x-2) & x \geq 0 \end{cases}, \qquad h(x) := \begin{cases} \arctan(1/x) & x \neq 0 \\ a & x = 0. \end{cases}$$

Soluzione:

$\boxed{f(x) := \begin{cases} 2x + x^2 + 6 & x < 0 \\ a(x-2) & x \geq 0 \end{cases}}$ Tenuto presente che

$$\begin{cases} \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} (a(x-2)) = -2a = f(0) \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} (2x + x^2 + 6) = 6 \end{cases}$$

la funzione è continua in $x = 0$ se e solo se $-2a = 6$ ovvero $a = -3$. In tutti gli altri punti $x \neq 0$ la funzione è continua perchè coincide con funzioni continue in tutto $\mathbb{R}$.

$\boxed{h(x) := \begin{cases} \arctan(1/x) & x \neq 0 \\ a & x = 0. \end{cases}}$

Tenuto presente che

$$\begin{cases} \lim_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty \\ \\ \lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{\pi}{2} \\ \\ \lim_{x \to 0^+} \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = +\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

limiti sinistro e destro diversi, si conclude che non esiste alcun valore di a per il quale la funzione $h(x)$ assegnata sia continua.

Esercizio 4.7. Calcolare, o stabilire se non esistono, i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{3x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{x^2},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{\sin(2x)}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x},\qquad \lim_{x\to +\infty}\cos(x)$$

Soluzione:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{3x}=\frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{4x}=\frac{4}{3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{x^2}=9\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{(3x)^2}=\frac{9}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{\sin(2x)}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{e^{-x}-1}{-x}\right)\left(2\frac{\sin(2x)}{2x}\right)=-2$$

$$\forall n:\cos(2n\pi)=1,\ \cos(2n\pi+\pi/2)=0\quad\to\quad\lim_{x\to +\infty}\cos(x)\quad non\,esiste$$

Esercizio 4.8. Calcolare, se esistono, i limiti delle seguenti funzioni, sia per $x\to +\infty$ che per $x\to -\infty$

$$\sqrt{x^2-3x}-x,\qquad \frac{x}{\sqrt{x^2+4}},\qquad \ln(2x^2+1)-\ln(x^2+3)\,.$$

Soluzione:

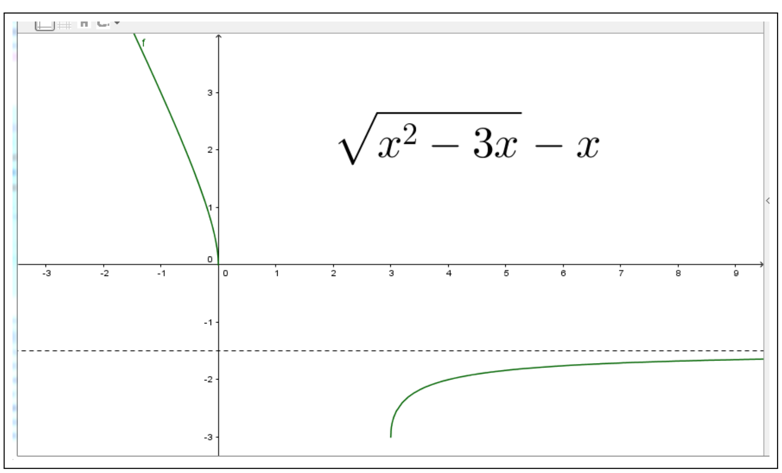


FIGURA 2. $\sqrt{x^2-3x}-x$

$$\sqrt{x^2-3x}-x=\frac{(\sqrt{x^2-3x}-x)\cdot(\sqrt{x^2-3x}+x)}{\sqrt{x^2-3x}+x}=\frac{-3x}{\sqrt{x^2-3x}+x}=-3\cdot\frac{1}{\dfrac{\sqrt{x^2-3x}}{x}+1}=$$

$$=-3\cdot\frac{1}{\dfrac{|x|}{x}\sqrt{1-3/x}+1}\to\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x}-x=-\dfrac{3}{2}\\[2ex]\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3x}-x=+\infty\end{cases}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{x}{|x|}\frac{1}{\sqrt{1+4/x^2}}\quad\to\quad\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}=-1\end{cases}$$

$$\ln(2x^2+1)-\ln(x^2+3)=\ln\left(\frac{2x^2+1}{x^2+3}\right)\Rightarrow\lim_{x\to\pm\infty}\left(\ln(2x^2+1)-\ln(x^2+3)\right)=\ln(2)$$

Esercizio 4.9. Sia $f(x)=x(x-e^{-x})$: dimostrare che l'equazione $f(x)=1$ ammette almeno una soluzione nell'intervallo $[0,2]$.

Soluzione:

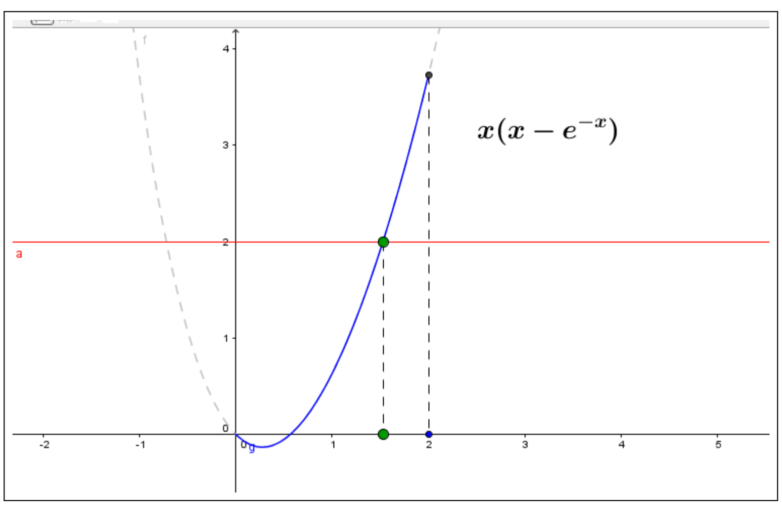


FIGURA 3. Esercizio 9: $f(x)=x(x-e^{-x})$, $x\in[0,2]$

$f(x)=x(x-e^{-x})$ è continua in $[0,2]$: $f(0)=0$, $f(2)=2(2-e^{-2})>2$ (avendo tenuto conto che $e^{-2}<1$) pertanto per il teorema dei valori intermedi l'equazione $f(x)=\eta$ ha soluzioni $x\in[0,2]$ per ogni $\eta\in[0,2]$, quindi in particolare ha soluzione l'equazione $f(x)=1$.

Esercizio 4.10. Si determini l'immagine delle funzioni $\arctan(e^x)$ e $e^{|x-1|}$ per $x\in(-1,2]$, e si dica se si tratta di funzioni iniettive.

Soluzione:

$\boxed{\arctan(e^x)}$

Le funzioni $\arctan(x)$ e e^x sono entrambe continue monotone strettamente crescenti, quindi anche la funzione composta $\arctan(e^x)$ è continua monotona strettamente crescente in $\mathbb{R}$: si tratta quindi di una funzione iniettiva.
L'immagine è pertanto l'intervallo

$$\left(\lim_{x\to-1}\arctan(e^x),\ \lim_{x\to+2}\arctan(e^x)\right] = \left(\arctan(e^{-1}),\arctan(e^2)\right]$$

$\boxed{e^{|x-1|}}$

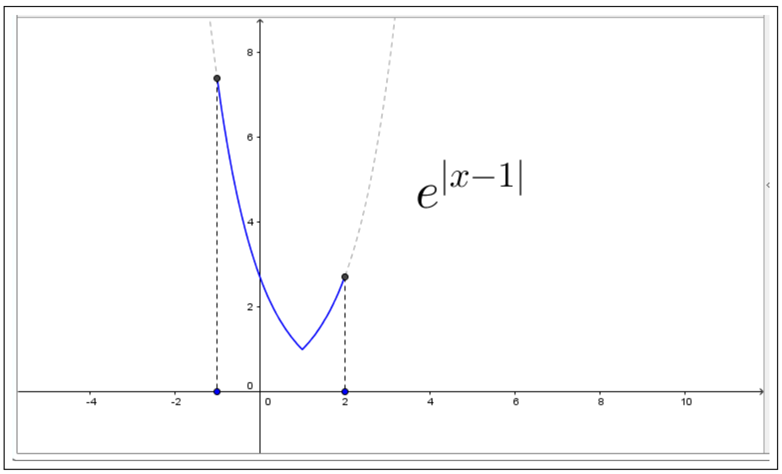


FIGURA 4. $e^{|x-1|}$ $x\in[-1,2]$

Tenuto conto che l'immagine della funzione $|x-1|$ continua in $(-1,2]$ è l'intervallo $[0,2]$ e che si tratta di una funzione non iniettiva (ad esempio $|0-1| = |2-1|$) e tenuto conto che l'esponenziale e^x è una funzione continua monotona strettamente crescente si riconosce che:

- la funzione $e^{|x-1|}$ non è iniettiva (ad esempio $e^{|0-1|} = e^{|2-1|}$),
- ha immagine l'intervallo $[e^0,e^2] = [1,e^2]$.

Esercizio 4.11. *(impegnativo)* Sia $p(x)$ un polinomio di grado pari con coefficiente di grado massimo positivo: mostrare che $p(x)$ ha minimo.

Soluzione:

L'affermazione è ben nota se $p(x) = ax^2+bx+c$: il grafico, essendo $a>0$, ha la ben nota forma della parabola rivolta verso l'alto. Il minimo è $p(-b/2a)$ ordinata del "*vertice*" della parabola.
In generale se $p(x) = a\,x^{2m}+\dots$ è di grado pari con $a>0$ non solo si ha $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = +\infty$ ma la derivata $p'(x) = 2m\,a\,x^{2m-1}+\dots$ è un polinomio di grado dispari

$$a>0 \to \lim_{x\to-\infty} p'(x) = -\infty,\ \lim_{x\to+\infty} p'(x) = +\infty$$

Esiste quindi M tale che

$$x \leq -M \rightarrow p'(x) < 0, \qquad M \leq x \rightarrow p'(x) > 0$$

ne segue pertanto che $p(x)$ è decrescente sull'intervallo $(-\infty, M)$ e crescente su quello $(M, +\infty)$ da cui segue

$$x \leq -M \rightarrow p(x) \geq p(-M), \qquad M \leq x \rightarrow p(M) \leq p(x)$$

Sia $m = p(x_m)$ il minimo di $p(x)$ nell'intervallo chiuso e limitato $-M \leq x \leq M$: è facile riconoscere che tale valore è il minimo di $p(x)$:

$$\begin{array}{ccl} x \leq -M & \rightarrow p(-M) & \leq p(x) \\ -M \leq x \leq M & \rightarrow p(x_m) & \leq p(x) \\ M \leq x & \rightarrow p(M) & \leq p(x) \end{array}$$

Tenuto presente che $p(x_m) \leq p(-M), \; p(x_m) \leq p(M)$ riesce

$$\forall x \in \mathbb{R} : \; p(x_m) \leq p(x)$$

OSSERVAZIONE 4.1. Il risultato ottenuto si può generalizzare ad ogni funzione $f(x)$ continua in $\mathbb{R}$ che diverga a $+\infty$ per $x \rightarrow \pm\infty$: la dimostrazione di tale risultato, meno semplice, si serve del teorema di Bolzano che riconosce la possibilità di estrarre da ogni successione $\{x_1, x_2, \dots\}$ limitata una sottosuccessione convergente.

Esercizio 4.12. *(impegnativo)* Sia $f : I \rightarrow I$ continua in $I = [a, b]$. Dimostrare che esiste un $\bar{x} \in I$ tale che $f(\bar{x}) = \bar{x}$. [*Suggerimento: applicare il teorema di esistenza degli zeri alla funzione* $f(x) - x$ *in* $[a, b]$.]

Soluzione:

Tenuto conto che $\forall x \in [a, b] : \; f(x) \in [a, b]$ riesce

$$f(a) - a \geq 0, \quad f(b) - b \leq 0$$

cioè, posto $\varphi(x) = f(x) - x$

$$\varphi(a) \geq 0, \quad \varphi(b) \leq 0$$

quindi, per il teorema d'esistenza degli zeri esiste $\bar{x} \in [a, b]$ in cui $\varphi(\bar{x}) = 0$ e quindi

$$\exists \bar{x} \in [a, b] : \; f(\bar{x}) = \bar{x}$$

5. Derivate

Corso di laurea in *Chimica*, a.a. 2015/16

Istituzioni di Matematica I (V. Nesi, C. Mascia, L. Lamberti, C. Cassisa)

Soluzioni Scheda 5 – 13 novembre 2015

Esercizio 5.1. Dire se esistono massimo e minimo della funzione $f(x) = x^7 - \pi x^4 + \ln(2)$ in $[2,11]$. Cosa si può dire in $\mathbb{R}$? Rispondere alle stesso domande nel caso $f(x) = x^6 - 2\sqrt{2}x^5 + 77$.

Soluzione:

$\boxed{f(x) = x^7 - \pi x^4 + \ln(2) \text{ in } [2,11]}$

La funzione $f(x)$ assegnata, un polinomio, è una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[2,11]$, pertanto (Teorema di Weierstrass) esistono sia il minimo che il massimo.
Tenuto presente che

$$f'(x) = 7x^6 - 4\pi x^3 = x^3(7x^3 - 4\pi)$$

è positiva per $x \geq 2$ si riconosce che $f(x)$ è crescente in $[2,11]$ e pertanto

$$\min_{x\in[2,11]} f(x) = f(2), \qquad \max_{x\in[2,11]} f(x) = f(11)$$

Sull'intero R invece il polinomio $f(x) = x^7 - \pi x^4 + \ln(2)$ di grado dispari non ha nè minimo nè massimo come si riconosce tenendo presente che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$\boxed{f(x) = x^6 - 2\sqrt{2}x^5 + 77 \text{ in } [2,11]}$

La funzione $f(x)$ assegnata, un polinomio, è una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[2,11]$, pertanto (Teorema di Weierstrass) esistono sia il minimo che il massimo.
Tenuto presente che

$$f'(x) = 6x^5 - 10\sqrt{2}x^4 = x^4(6x - 10\sqrt{2}), \qquad f'\left(\frac{10\sqrt{2}}{6}\right) = 0$$

si riconosce che $f'(x)$ è negativa per $2 < x < \dfrac{10\sqrt{2}}{6}$ e positiva per $\dfrac{10\sqrt{2}}{6} < x < 11$.
Quindi $f(x)$ è decrescente nel primo tratto e crescente nel secondo: si ha pertanto

$$\min_{x\in[2,11]} f(x) = f\left(\frac{10\sqrt{2}}{6}\right)$$

$$\max_{x\in[2,11]} f(x) = \max\{f(2), f(11)\}$$

Sull'intero R invece il polinomio $f(x) = x^6 - 2\sqrt{2}x^5 + 77$ di grado pari ha minimo ma non ha massimo come si riconosce tenendo presente che

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$$

Tenuto presente che $f'(x)$ è negativa a sinistra di $\dfrac{10\sqrt{2}}{6}$ e positiva a destra, cioè $f(x)$ è decrescente a sinistra di $\dfrac{10\sqrt{2}}{6}$ e crescente a destra, si riconosce che

$$\min_{x\in R} f(x) = f\left(\frac{10\sqrt{2}}{6}\right)$$

Esercizio 5.2. Utilizzando le regole per prodotto e rapporto, calcolare le derivate prime di

$$e^x \sin x, \qquad \frac{x+1}{x^2+1}, \qquad \frac{\cos x}{1+\sin x}, \qquad x\ln x, \qquad x\arctan x.$$

Soluzione:

$$\begin{array}{lll} f(x) = u(x)\cdot v(x) & \to & f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) \\ f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} & \to & f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} f(x) & \to & f'(x) \\ e^x\cdot\sin(x) & \to & e^x\cdot\sin(x) + e^x\cdot\cos(x) \\ \dfrac{x+1}{x^2+1} & \to & \dfrac{1\cdot(x^2+1) - (x+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\ \dfrac{\cos x}{1+\sin(x)} & \to & \dfrac{(-\sin(x))\cdot(1+\sin(x)) - \cos(x)\cdot\cos(x)}{(1+\sin(x))^2} \\ x\ln(x) & \to & 1\cdot\ln(x) + x\cdot\dfrac{1}{x} \\ x\arctan(x) & \to & 1\cdot\arctan(x) + x\cdot\dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$$

Esercizio 5.3. Utilizzando la regole di derivazione di funzione composta, calcolare la derivata prima di

$$\cos(1-x^2), \qquad \ln(1+e^{x^2}), \qquad \sin(\sqrt{x^2+1}), \qquad \arctan(e^{-x^2}).$$

Soluzione:

$$\begin{array}{lll}
f(x) & \to & f'(x) \\
\cos(1-x^2) & \to & 2x\sin(1-x^2) \\
\ln(1+e^{x^2}) & \to & \dfrac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}} \\
\sin(\sqrt{x^2+1}) & \to & \cos(\sqrt{x^2+1})\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\
\arctan(e^{-x^2}) & \to & \dfrac{-2xe^{-x^2}}{1+(e^{-x^2})^2}
\end{array}$$

Esercizio 5.4. Utilizzando le regole di derivazione, calcolare nell'insieme sono definite, le derivate di

$$x(1-x^2), \qquad \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}, \qquad \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}, \qquad \frac{1+\cos^2 x}{2\sin x}, \qquad x(\ln x+\sin x), \qquad (x^2+1)\arctan x.$$

Soluzione:

$$\begin{aligned}
&f(x) && \to && f'(x) \\
&x(1-x^2) && \to && 1\cdot(1-x^2)+x(-2x) \\
&\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} && \to && \frac{\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cdot(x-\sqrt{x})-(x+\sqrt{x})\cdot\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(x-\sqrt{x})^2} \\
& && && = -\frac{1}{(\sqrt{x}-1)^2\sqrt{x}} \\
&\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} && \to && \frac{(e^x-e^{-x})\cdot(e^x-e^{-x})-(e^x+e^{-x})\cdot(e^x+e^{-x})}{(e^x-e^{-x})^2} \\
& && && = -\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} \\
&\frac{1+\cos^2(x)}{2\sin(x)} && \to && \frac{-2\cos(x)\sin(x)\cdot(2\sin(x))-(1+\cos^2(x))\cdot(2\cos(x))}{(2\sin(x))^2} \\
&x(\ln(x)+\sin(x)) && \to && 1\cdot(\ln(x)+\sin(x))+x\left(\frac{1}{x}+\cos(x)\right) \\
&(x^2+1)\arctan(x) && \to && 2x\arctan(x)+\frac{x^2+1}{1+x^2} \\
& && && = 2x\arctan(x)+1
\end{aligned}$$

Esercizio 5.5. Dire quale delle seguenti funzioni è derivabile in $x=0$

$$|x|\sin x, \qquad |x|(x^2+1), \qquad \sqrt{x}\sin x, \qquad (x^2+1)\sqrt{x}.$$

Soluzione:

$$\begin{array}{llll}
f(x) & \dfrac{f(h)-f(0)}{h} & & \to\ f'(0) \\[2ex]
|x|\,\sin x & \dfrac{|h|\sin(h)}{h} & =|h|\cdot\dfrac{\sin(h)}{h} & \to\ 0 \\[2ex]
|x|\,(x^2+1) & \dfrac{|h|(h^2+1)}{h} & =h|h|+\dfrac{|h|}{h} & \to\ \textit{non converge} \\[2ex]
\sqrt{x}\,\sin x & \dfrac{\sqrt{h}\sin(h)}{h} & =\sqrt{h}\cdot\dfrac{\sin(h)}{h} & \to\ 0 \\[2ex]
(x^2+1)\sqrt{x} & \dfrac{(h^2+1)\sqrt{h}}{h} & =h\sqrt{h}+\dfrac{1}{\sqrt{h}} & \to\ \textit{non converge}
\end{array}$$

Esercizio 5.6. Supponendo κ, T, b costanti assegnate, ricavare dalle seguenti equazioni di stato

$$pV = \kappa T, \qquad p(V-nb)-\kappa T = 0$$

il volume V come funzione della pressione p. Usare tali espressioni per determinare le derivate $\dfrac{dV}{dp}$.

Soluzione:

$$\begin{array}{lll}
pV = \kappa T & \to\ V=\dfrac{\kappa T}{p} & \to\ \dfrac{dV}{dp}=-\dfrac{\kappa T}{p^2} \\[2ex]
p(V-nb)-\kappa T=0 & \to\ V=nb+\dfrac{\kappa T}{p} & \to\ \dfrac{dV}{dp}=-\dfrac{\kappa T}{p^2}
\end{array}$$

Esercizio 5.7. Studiare la continuità e derivabilità in $x=0$ delle funzioni

$$f(x) := \begin{cases} x\sin(1/x) & x\neq 0 \\ 0 & x=0, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g(x) := \begin{cases} x^2\sin(1/x) & x\neq 0 \\ 0 & x=0. \end{cases}$$

La derivata della funzione g è continua in 0?

Soluzione:

$$\begin{array}{llll}
f(x) & \dfrac{f(h)-f(0)}{h} & & \to\ f'(0) \\[2ex]
x\sin(1/x) & \dfrac{h\sin(1/h)}{h} & =\sin(1/h) & \to\ \textit{non converge} \\[2ex]
x^2\sin(1/x) & \dfrac{h^2\sin(1/h)}{h} & =h\sin(1/h) & \to\ 0
\end{array}$$

$$g'(x) = \begin{cases} 2x\sin(1/x) - \cos(1/x) & se\ x \neq 0 \\ 0 & se\ x = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad g'(x) \text{ non é continua in } x = 0$$

Esercizio 5.8. In $x_0 = 0$, studiare la continuità, la derivabilità, l'esistenza della derivata seconda di

$$f(x) := \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ e^x - 1 & x \geq 0, \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} \cos x & x < 0 \\ e^{-x^2/2} & x \geq 0, \end{cases}$$

Soluzione:

$$\boxed{f(x) := \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ e^x - 1 & x \geq 0, \end{cases}}$$

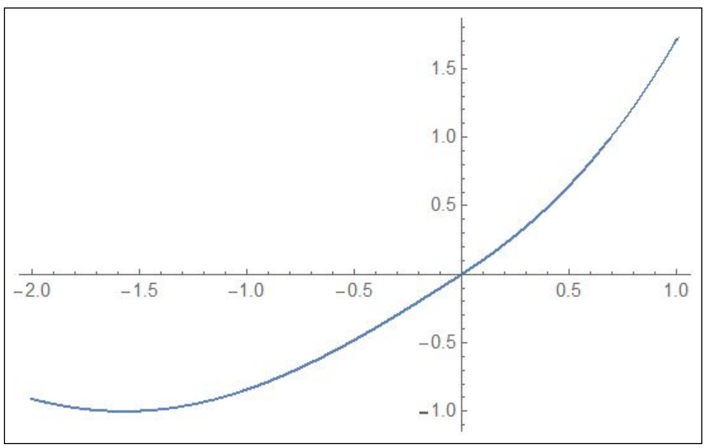


FIGURA 5. Esercizio 8 $f(x)$

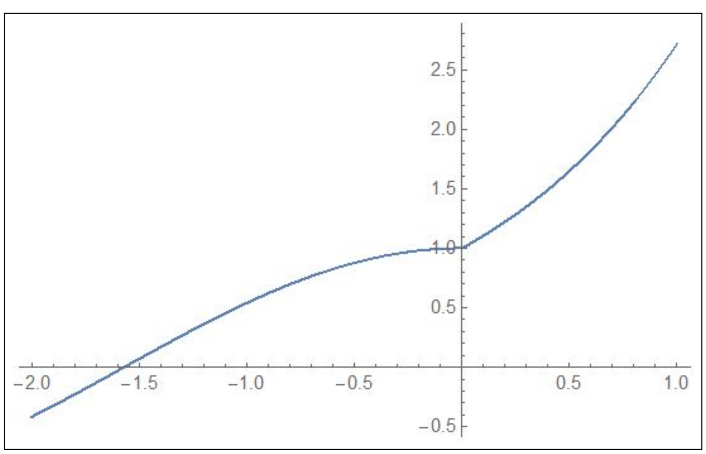


FIGURA 6. Esercizio 8 $f'(x)$

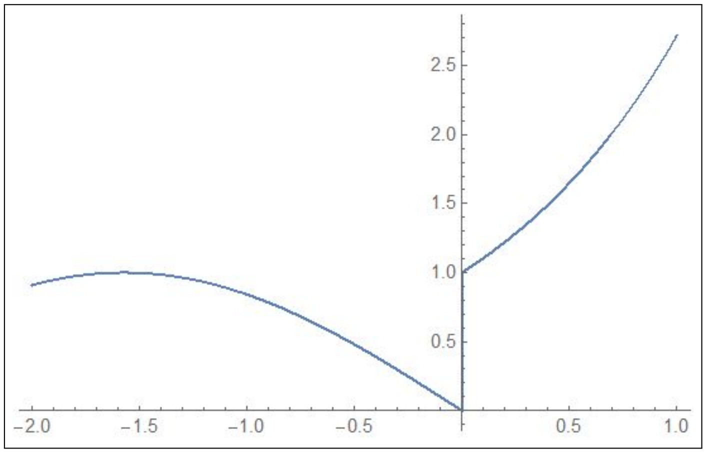


FIGURA 7. Esercizio 8 $f''(x)$

Tenuto conto che

$$\left.\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\frac{\sin(h)}{h}=1\\ \lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\frac{e^h-1}{h}=1\end{aligned}\right. \quad\to\quad f'(0)=1$$

si riconosce che esiste la derivata prima di $f(x)$ in $x=0$ e quindi, tenuto conto che sia per $x<0$ che per $x>0$ $f(x)$ è ovviamente derivabile si ha che:

$$f'(x) := \begin{cases}\cos(x) & x<0\\ 1 & x=0\\ e^x & x>0,\end{cases}$$

Per riconoscere l'esistenza o meno della derivata seconda in $x=0$ occorre esaminare i due rapporti incrementali

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-}\frac{f'(h)-f'(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\frac{\cos(h)-1}{h}, &\to\quad 0\\ \lim_{h\to 0^+}\frac{f'(h)-f'(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+}\frac{e^h-1}{h}, &\to\quad 1\end{aligned}$$

I due limiti sono diversi, quindi la derivata seconda non esiste in $x=0$.
Ovviamente esiste invece in tutti gli altri punti.

$$\boxed{g(x) := \begin{cases}\cos x & x<0\\ e^{-x^2/2} & x\geq 0,\end{cases}}$$

Tenuto conto che

$$\left.\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-}\frac{g(h)-g(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\frac{\cos(h)-1}{h}=0\\ \lim_{h\to 0^+}\frac{g(h)-g(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\frac{e^{-h^2/2}-1}{h}=0\end{aligned}\right. \quad\to\quad g'(0)=0$$

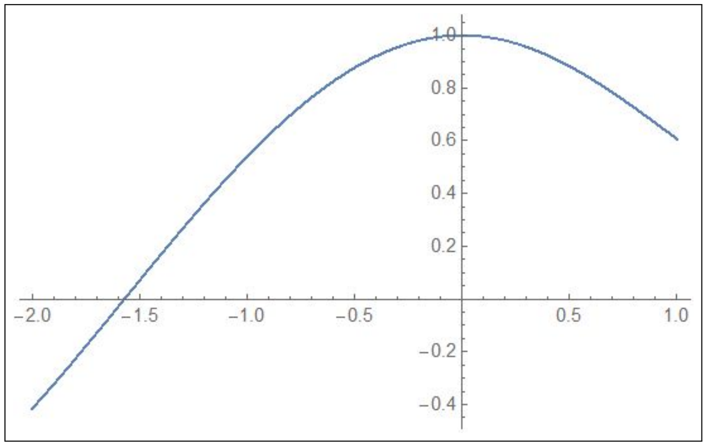


FIGURA 8. Esercizio 8 $g(x)$

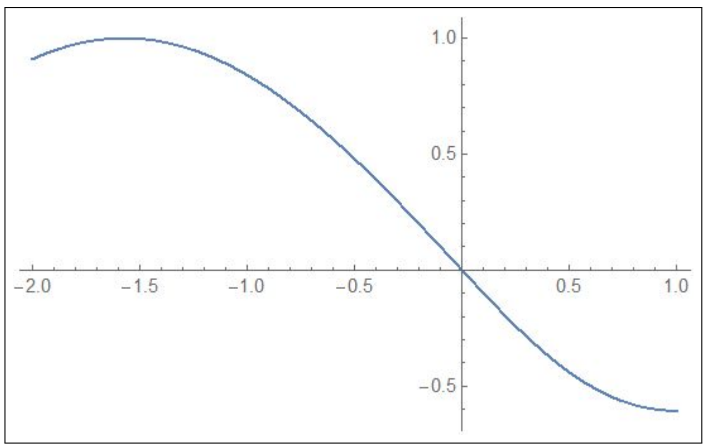


FIGURA 9. Esercizio 8 $g'(x)$

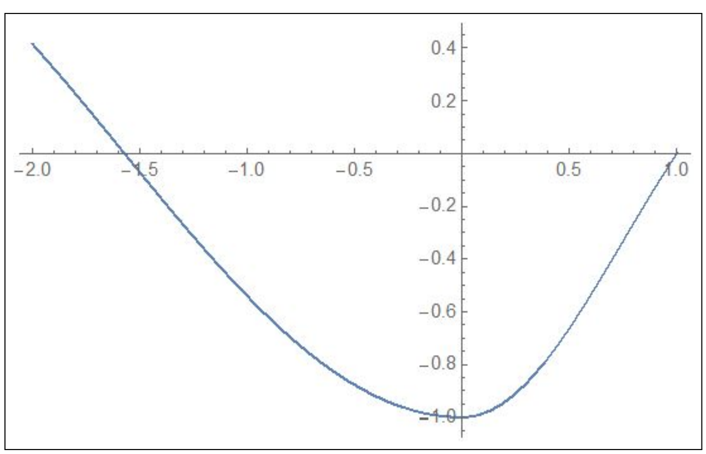


FIGURA 10. Esercizio 8 $g''(x)$

si riconosce che esiste la derivata prima di $g(x)$ in $x = 0$ e quindi, tenuto conto che sia per $x < 0$

che per $x > 0$ $g(x)$ è ovviamente derivabile si ha che:

$$g'(x) := \begin{cases} -\sin(x) & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ -xe^{-x^2/2} & x > 0, \end{cases}$$

Per riconoscere l'esistenza o meno della derivata seconda in $x = 0$ occorre esaminare i due rapporti incrementali

$$\begin{array}{lcl} \lim_{h\to 0^-} \dfrac{g'(h)-g'(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{-\sin(h)}{h}, & \to & -1 \\ \lim_{h\to 0^+} \dfrac{g'(h)-g'(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{-he^{-h^2/2}}{h}, & \to & -1 \end{array}$$

I due limiti sono uguali, quindi la derivata seconda esiste in $x = 0$ e vale -1.
Ovviamente esiste invece in tutti gli altri punti.

OSSERVAZIONE 5.1. Il grafico della funzione $f(x)$ dell'Esercizio 8 appare del tutto regolare: non si notano nè punti angolosi nè cuspidi.
Nulla lascia presumere la non esistenza della derivata seconda come invece si prevede guardando il grafico di $f'(x)$ che mostra in $x = 0$ un punto angoloso, e come si vede, in modo particolarmente esplicito guardando il grafico di $f''(x)$ per $x \neq 0$.
Conclusione: la nostra sensibilità visiva guardando una curva non distingue eventuali discontinuità a livello di derivata seconda. Una conclusione analoga può farsi pensando alla curvatura: l'occhio non avverte discontinuità della curvatura e non riconosce eventuali irregolarità collegate a tali discontinuità.
Ben diversa è l'attenzione progettuale nel disegno dei raccordi autostradali, nei quali occorre per motivi di sicurezza, variare le curvature (quindi le derivate seconde) con continuità.

Esercizio 5.9. Sia $f(x) = \sqrt{1+4x^2}$ definita in $x \in \mathbb{R}$.

- Determinare l'equazione della retta tangente al grafico nei punti $(1, f(1))$ e $(-2, f(-2))$.
- Trovata l'equazione della retta tangente in un punto generico $(x_0, f(x_0))$, dire per quali valori x_0 la tangente è orizzontale e per quali è parallela ad una delle bisettrici $y = x$ e $y = -x$.

Soluzione:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

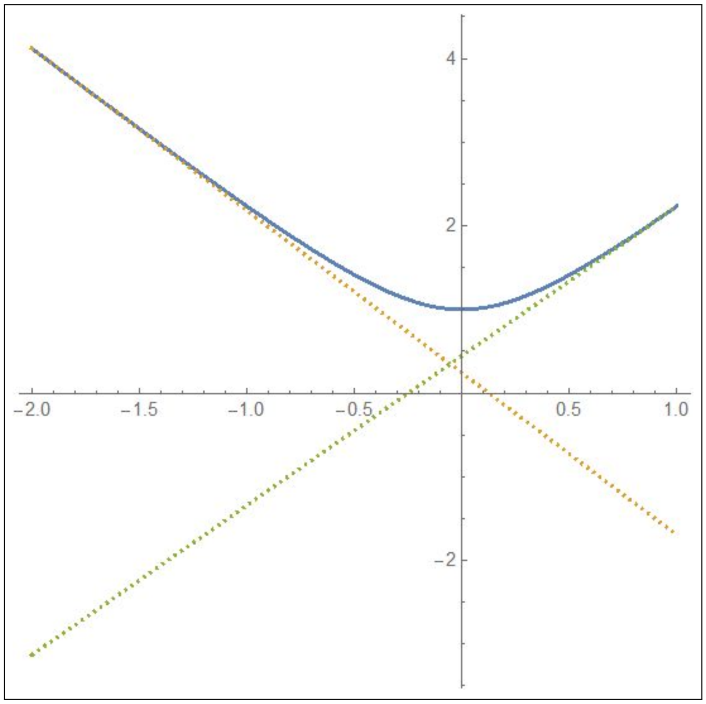


FIGURA 11. Esercizio 9 $f(x) = \sqrt{1+4x^2}$

$f(x)$	$f'(x)$	x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$
$\sqrt{1+4x^2}$	$\dfrac{8x}{2\sqrt{1+4x^2}}$	1	$\sqrt{5}$	$\dfrac{8}{2\sqrt{5}}$	$\sqrt{5}+\dfrac{8}{2\sqrt{5}}(x-1)$
		-2	$\sqrt{17}$	$\dfrac{-16}{2\sqrt{17}}$	$\sqrt{17}+\dfrac{-16}{2\sqrt{17}}(x+2)$

La retta tangente nel punto $(x_0, f(x_0))$ ha coefficiente angolare $f'(x_0)$ pertanto:

- retta orizzontale $\Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \quad \to \quad x_0 = 0$
- retta parallela alla $y = x \Leftrightarrow f'(x_0) = 1 \quad \to \quad x_0 = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$
- retta parallela alla $y = -x \Leftrightarrow f'(x_0) = -1 \quad \to \quad x_0 = -\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

Esercizio 5.10. Fissati $a, b > 0$, la funzione $U(R) := aR^{-12} - bR^{-6}$ definita per $R > 0$ prende il nome di **potenziale di Lennard–Jones**.
Determinare la derivata U', gli intervalli in cui U è monotona, il minimo di U in $(0, +\infty)$.

Soluzione:

$$U'(R) = -12aR^{-13} + 6bR^{-7} = \frac{6}{R^7}\left(b - \frac{2a}{R^6}\right)$$

Nell'intervallo $\left(0, \sqrt[6]{\dfrac{2a}{b}}\right)$ la derivata è negativa mentre in $\left(\sqrt[6]{\dfrac{2a}{b}}, \infty\right)$ è positiva.

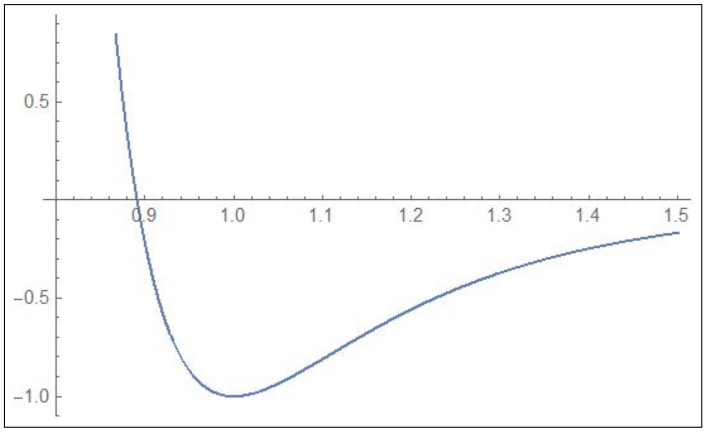


FIGURA 12. Esercizio 10 $U(R) = \frac{1}{R^{12}} - \frac{2}{R^6}$

Quindi nel primo intervallo $U(R)$ è decrescente e nel secondo è crescente.
Il minimo è raggiunto nel punto $R_0 = \sqrt[6]{\frac{2a}{b}}$ e vale $-\frac{b^2}{4a}$.

Esercizio 5.11. Sia $\omega > 0$. Dimostrare che tutte le funzioni della forma $f(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$ verificano la relazione $f'' + \omega^2 f = 0$.

Soluzione:

$$\begin{array}{llll} f(x) & = a\cos(\omega x) & + b\sin(\omega x) & \\ f'(x) & = -a\,\omega\sin(\omega x) & + b\,\omega\cos(\omega x) & \\ f''(x) & = -a\,\omega^2\cos(\omega x) & - b\,\omega^2\sin(\omega x) & = -\omega^2 f(x) \end{array}$$

6. Teoremi di Lagrange, Höpital, Taylor

Corso di laurea in *Chimica*, a.a. 2015/16

Istituzioni di Matematica I (V. Nesi, C. Mascia, L. Lamberti, C. Cassisa)

Soluzioni Scheda 6 – 20 novembre 2015

Esercizio 6.1. Dimostrare che la funzione $f(x) = e^x(x^2 - 2x + 4)$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$.

Soluzione:

Tenuto conto che $f(x)$ è continua e derivabile in $\mathbb{R}$ e che

$$f'(x) = e^x(x^2 - 2x + 4) + e^x(2x - 2) = e^x\left\{x^2 + 2\right\} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

si riconosce (Teorema di Lagrange) che $f(x)$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$.

Esercizio 6.2. Determinare massimo e minimo delle seguenti funzioni negli intervalli indicati

$$f(x) = \frac{x - x^2}{2 + x^2} \quad \text{in } [0,1] \qquad g(x) = (x^2 - 1)\,e^x \quad \text{in } [-1,1] \qquad h(x) = 2x(1 - x^2) \quad \text{in } [0,1].$$

Soluzione:

$$\boxed{f(x) = \frac{x - x^2}{2 + x^2} \quad \text{in } [0,1]}$$

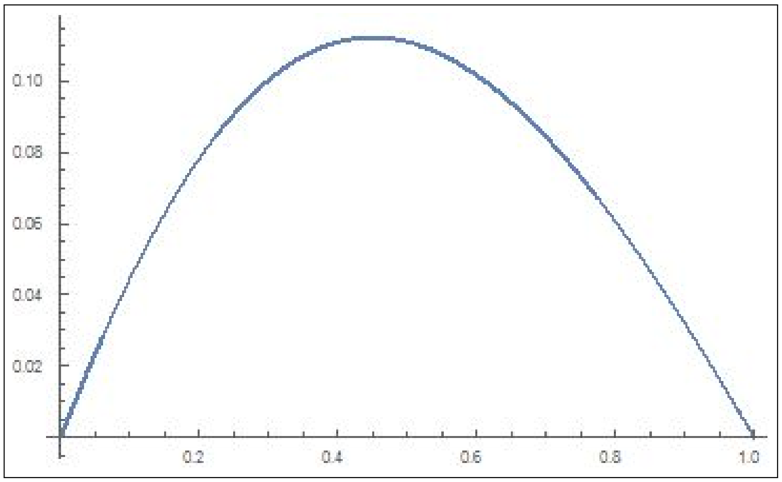


FIGURA 13. $f(x) = \dfrac{x - x^2}{2 + x^2}$ in $[0,1]$

$$f'(x) = \frac{(1 - 2x)(2 + x^2) - (x - x^2)(2x)}{(2 + x^2)^2} = -\frac{x^2 + 4x - 2}{(2 + x^2)^2}$$

Tenuto conto che

$$x^2+4x-2<0 \quad \text{per } -2-\sqrt{6}<x<-2+\sqrt{6}\approx 0,4$$

Quindi

$$f'(x)>0\ \forall x\in[0,-2+\sqrt{6}), \qquad f'(x)<0\ \forall x\in(-2+\sqrt{6},1]$$

Pertanto, abbreviando con $\uparrow$, $\downarrow$ le parole *crescente* e *decrescente*,

$$f(x)\uparrow\ \forall x\in[0,-2+\sqrt{6}), \qquad f(x)\downarrow\ \forall x\in(-2+\sqrt{6},1]$$

Quindi

$$\max_{x\in[0,1]} f(x)=f(-2+\sqrt{6})\approx 0.11, \qquad \min_{x\in[0,1]} f(x)=\min\{f(0),f(1)\}=0$$

$\boxed{g(x)=(x^2-1)\,e^x \quad \text{in } [-1,1]}$

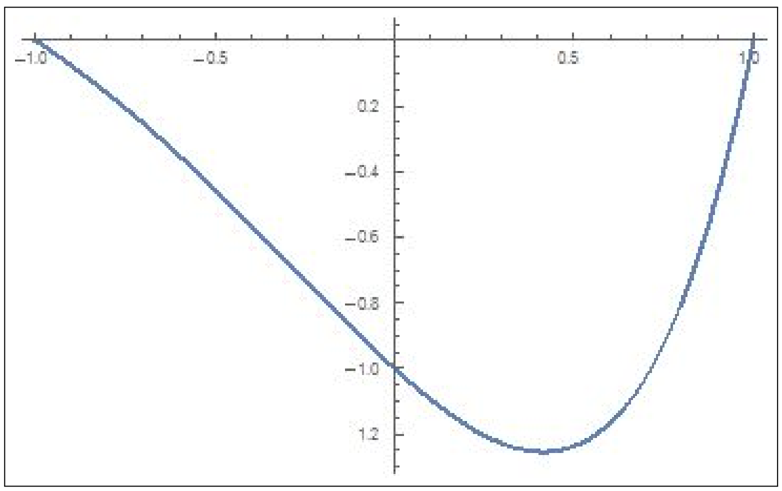


FIGURA 14. $g(x)=(x^2-1)\,e^x \quad \text{in } [-1,1]$

$$f'(x)=2x\cdot e^x+(x^2-1)\cdot e^x \;=\; (x^2+2x-1)\cdot e^x$$

Tenuto conto che

$$\begin{array}{ll} x^2+2x-1>0 & x\in(-\infty,-1-\sqrt{2})\cup(-1+\sqrt{2},+\infty),\\ x^2+2x-1<0 & x\in(-1-\sqrt{2},\,-1+\sqrt{2}) \end{array}$$

riesce

$$\begin{array}{lllll} x\in[-1,-1+\sqrt{2}) & \to & f'(x)<0 & x\in(-1+\sqrt{2},1] & \to \quad f'(x)>0\\ x\in[-1,-1+\sqrt{2}) & \to & f(x)\downarrow & x\in(-1+\sqrt{2},1] & \to \quad f(x)\uparrow \end{array}$$

Quindi

$$\min_{x\in[-1,1]} f(x)=f(-1+\sqrt{2})\approx -1.25, \qquad \max_{x\in[-1,1]} f(x)=\max\{f(-1),f(1)\}=0$$

$\boxed{h(x)=2x(1-x^2) \quad \text{in } [0,1]}$

$$f'(x)=2(1-x^2)+2x(-2x)=2-6x^2$$

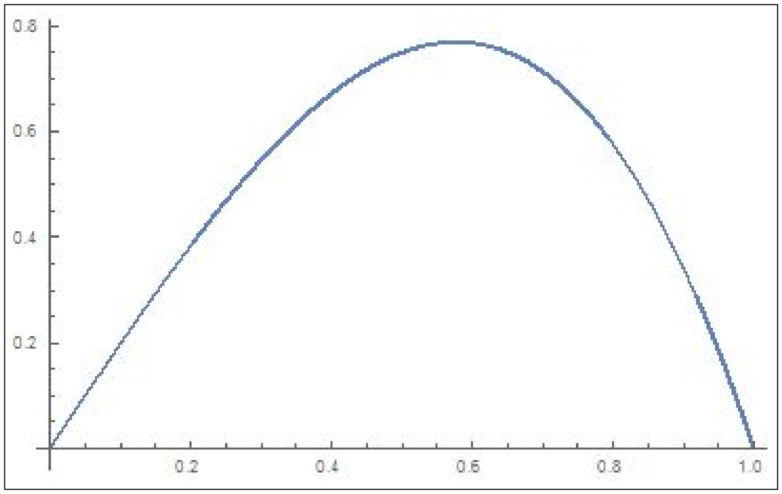


FIGURA 15. $h(x) = 2x(1-x^2) \quad \text{in } [0,1]$

Tenuto conto che

$$\begin{array}{ll} 2-6x^2>0 & x\in(-\infty,-\sqrt{1/3})\cup(\sqrt{1/3},+\infty),\\ 2-6x^2<0 & x\in(-\sqrt{1/3},+\sqrt{1/3}) \end{array}$$

riesce

$$\begin{array}{llll} x\in(-\sqrt{1/3},+\sqrt{1/3}) \quad \to \quad f'(x)>0 & & x\in(-\infty,-\sqrt{1/3})\cup(\sqrt{1/3},+\infty) \quad \to \quad f'(x)<0 \\ x\in(0,\sqrt{1/3}) \quad \to \quad f(x)\uparrow & & x\in(\sqrt{1/3},1] \quad \to \quad f(x)\downarrow \end{array}$$

Quindi

$$\max_{x\in[0,1]} f(x) = f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \approx 0.77, \qquad \min_{x\in[0,1]} f(x) = \min\{f(0), f(1)\} = 0$$

Esercizio 6.3. Dimostrare, usando il Teorema di Lagrange, che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ riesce

$$\left|\sin^2(x)-\sin^2(y)\right| \le |x-y|, \qquad |\arctan(x)-\arctan(y)| \le |x-y|, \qquad \left|e^{-x^2/2}-e^{-y^2/2}\right| \le \frac{1}{\sqrt{e}}|x-y|$$

Soluzione:

$\left(\sin^2(x)\right)' = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$	$\sin^2(x)-\sin^2(y) = (x-y)\sin(2\xi)$
$(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)-\arctan(y) = (x-y)\dfrac{1}{1+\xi^2}$
$\left(e^{-x^2/2}\right)' = -x\,e^{-x^2/2}$	$e^{-x^2/2}-e^{-y^2/2} = (x-y)\left(-\xi\,e^{-\xi^2/2}\right)$

Osservate le seguenti maggiorazioni per le tre derivate prime

$$|\sin(2x)| \le 1, \qquad \left|\frac{1}{1+x^2}\right| \le 1, \qquad \left|-x\,e^{-x^2/2}\right| \le \frac{1}{\sqrt{e}}$$

si riconoscono le tre stime

$$\begin{aligned}\left|\sin^2(x)-\sin^2(y)\right| &\leq |x-y|,\\ |\arctan(x)-\arctan(y)| &\leq |x-y|,\\ \left|e^{-x^2/2}-e^{-y^2/2}\right| &\leq \frac{1}{\sqrt{e}}\,|x-y|\end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 6.1. Le stime delle derivate usate, stime che hanno giustificato le stime basate sul Teorema di Lagrange dell'Esercizio indicano che i grafici delle due funzioni $\sin^2(x)$, $\arctan(x)$,

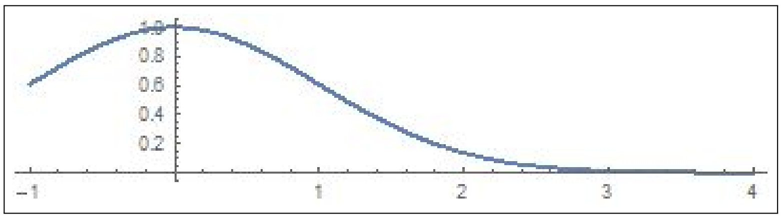


FIGURA 16. $e^{-x^2/2}$

hanno *pendenze* limitate a non piú di 45^0, mentre la terza $e^{-x^2/2}$ ha *pendenze* limitate a non piú di 30^0.

OSSERVAZIONE 6.2. La stima $\left|-xe^{-x^2/2}\right| \leq \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ utilizzata sopra non è banale e può essere riconosciuta studiando il grafico della funzione $f(x)=xe^{-x^2/2}$:

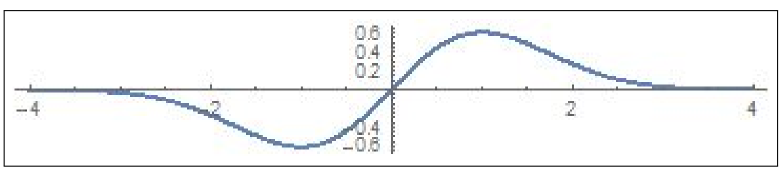


FIGURA 17. $f(x)=xe^{-x^2/2}$

- si tratta di una funzione dispari,
- i limiti per $x\to\pm\infty$ sono zero,
- la derivata indica che $f(x)$ è crescente per $x\in(-1,1)$ e decrescente fuori di tale intervallo,
- quindi $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=f(-1)$, $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=f(1)$

Ne segue pertanto $|f(x)|\leq f(1)=e^{-1/2}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

Esercizio 6.4. La probabilità che una molecola di massa m in un gas a temperatura T abbia velocità v è data dalla **distribuzione di Maxwell–Boltzmann**[2]

$$f(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

[2] https://it.wikipedia.org/wiki/Distribuzione_di_Maxwell-Boltzmann

dove k è la costante di Boltzmann. Trovare la velocità v_* di massima probabilità.

Soluzione:

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\frac{2kT}{m}}}\left(\frac{v}{\sqrt{\frac{2kT}{m}}}\right)^2 e^{-\left(\frac{v}{\sqrt{\frac{2kT}{m}}}\right)^2}$$

Posto

$$b = \sqrt{\frac{2kT}{m}}, \quad a = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{b}, \quad x = \frac{v}{b}$$

riesce

$$f(x) = ax^2 e^{-x^2} \quad \rightarrow \quad f'(x) = 2x(1-x^2)e^{-x^2}$$

funzione crescente per $x \in [0,1]$ e decrescente per $x > 1$.
Il valore massimo si raggiunge pertanto nel punto stazionario $x_0 = 1$.
La velocità cha ha la probabilitá maggiore è pertanto $|v_0| = b$.

Esercizio 6.5. Determinare tra i rettangoli di perimetro p assegnato quello di area massima. Ripetere l'esercizio per i triangoli rettangoli.

Soluzione:

Rettangolo

Sia $2p > 0$ il perimetro assegnato: i due lati del rettangolo sono pertanto $x \in (0,p)$ e $p-x \in (0,p)$.
L'area è

$$a(x) = x(p-x), \quad \rightarrow \quad a'(x) = p-2x$$

Il massimo si raggiunge evidentemente nel punto $x_0 = p/2$, scelta che indica come tra i rettangoli di perimetro $2p$ assegnato il quadrato sia quello di area massima.

Triangolo rettangolo

Sia $p > 0$ il perimetro assegnato: i due cateti del triangolo rettangolo siano $x \in [0,p/2]$ ed $y \in [0,p/2]$, il terzo lato, l'ipotenusa, è naturalmente $\sqrt{x^2+y^2}$.
I due valori x ed y non sono indipendenti dal momento che deve valere la relazione pitagorica

$$x+y+\sqrt{x^2+y^2} = p \quad \rightarrow \quad y = \frac{p(p-2x)}{2(p-x)}$$

L'area è

$$a(x) = \frac{1}{2}xy = \frac{px(p-2x)}{4(p-x)} \quad \rightarrow \quad a'(x) = \frac{p\left(p^2-4px+2x^2\right)}{4(p-x)^2}$$

$$a'(x) > 0\,\forall x \in [0, \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)p), \qquad a'(x) < 0\,\forall x \in [\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)p, p/2)$$

Il triangolo rettangolo di perimetro p e area massima è pertanto il triangolo rettangolo isoscele che ha i cateti

$$x_0 = y_0 = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)p$$

Pertanto

$$\max_{x+y+\sqrt{x^2+y^2}=p} a(x) = a\left(p(1-1/\sqrt{2})\right) = \frac{1}{4}\left(3-2\sqrt{2}\right)p^2 \approx 0.043\,p^2$$

Esercizio 6.6. Dire per quali $a > 0$, la funzione $f(x) = \dfrac{e^{-3x^2}}{1+ax}$ non ha né massimi, né minimi relativi.

Soluzione:

Basta studiare per quali $a > 0$ la funzione $f(x)$ non ha punti stazionari:

$$f'(x) = -\frac{e^{-3x^2}\left(6ax^2+a+6x\right)}{(ax+1)^2}$$

É facile riconoscere che

$$6ax^2+a+6x \neq 0 \qquad \forall a > \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Pertanto per tali valori la funzione $f(x)$ non ha nè massimi nè minimi relativi.

Esercizio 6.7. Individuare il minimo assoluto e tutti i punti di minimo assoluto delle funzioni

$$f(x) = |x-1|+|x+1|, \qquad g(x) = |x-1|+|x|+|x+1|, \qquad h(x) = \sum_{k=-3}^{3}|x-k|$$

Soluzione:

$\boxed{f(x) = |x-1|+|x+1|}$

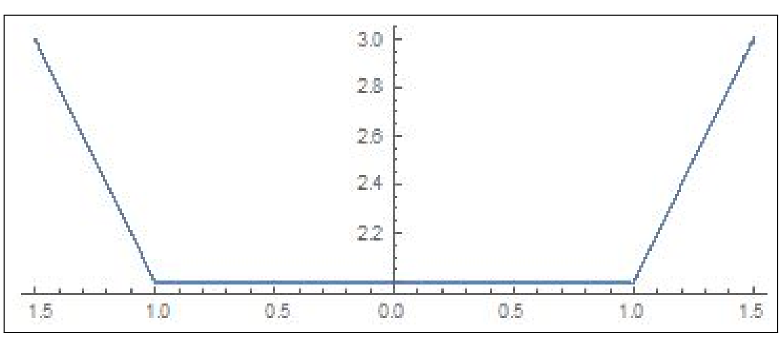


FIGURA 18. Esercizio 7: $f(x) = |x-1|+|x+1|$

I due addendi hanno espressione algebrica diversa a seconda che $x < -1,\ -1 < x < 1,\ 1 < x$

$$f(x) = \begin{cases} 1-x-x-1 & -2x & \text{se}\, x < -1 \\ 1-x+x+1 & 2 & \text{se} -1 < x < 1 \\ x-1+x+1 & 2x & \text{se}\, 1 < x \end{cases}$$

Quindi il minimo vale 2 ed è assunto in corrispondenza di tutti i punti $x_0 \in [-1, 1]$.

$\boxed{g(x) = |x-1| + |x| + |x+1|}$

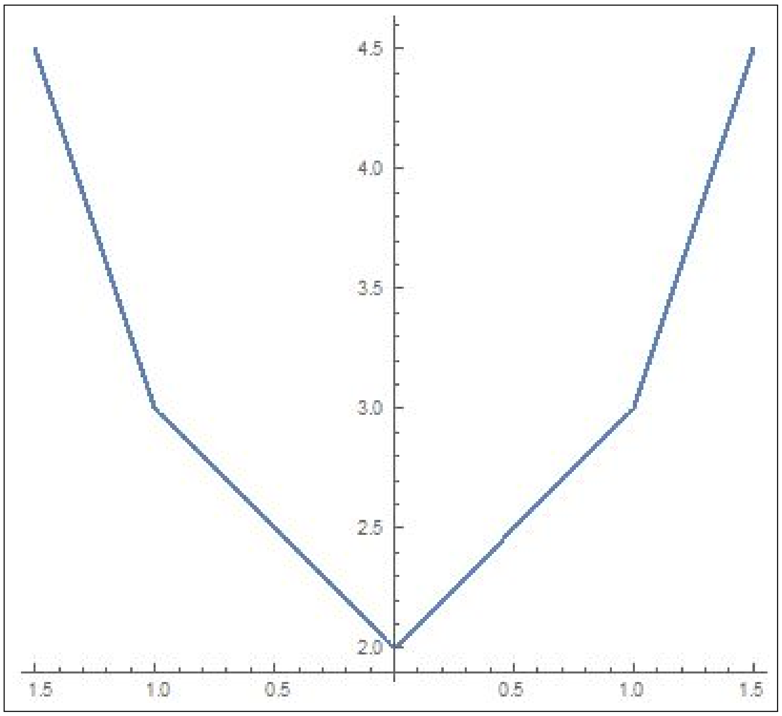


FIGURA 19. Esercizio 7: $\quad g(x) = |x-1| + |x| + |x+1|$

Tenuto presente che $g(x)$ è continua in $\mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty, \qquad \forall x \in \mathbb{R} :\ g(x) \geq 0$$

si riconosce che esiste $\min_{x\in\mathbb{R}} g(x)$.
Tenuto presente che $g(x)$ è lineare a tratti si riconosce che i punti di minimo cadono necessariamente nei punti in cui $g(x)$ è non derivabile

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1$$

Pertanto

$$\min_{x\in\mathbb{R}} g(x) \ = \min\{g(-1), g(0), g(1)\} = \min\{3, 2, 3\} = 2$$

$\boxed{h(x) = \sum_{k=-3}^{3} |x-k|}$

Tenuto presente che $h(x)$ è continua in $\mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = +\infty, \qquad \forall x \in \mathbb{R} :\ h(x) \geq 0$$

si riconosce che esiste $\min_{x\in\mathbb{R}} h(x)$.
Tenuto presente che $h(x)$ è lineare a tratti si riconosce che i punti di minimo cadono necessariamente nei punti in cui $h(x)$ è non derivabile

$$x_1 = -3, \quad x_2 = -2, \cdots \quad x_3 = 3$$

Pertanto

$$\min_{x\in\mathbb{R}} h(x) = \min\{h(-3), \cdots, h(3)\} = h(0) = 12$$

Esercizio 6.8. Calcolare servendosi del Teorema di de l'Hôpital i limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-\cos(x)}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-e^{3x^2}}{x\sin(2x)}, \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan(x)}\right),$$

Soluzione:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin(2x)+\sin(x)}{2x} = -2+\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{3x^2}}{x\sin(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-6xe^{3x^2}}{\sin(2x)+2xcos(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-3e^{3x^2}}{\frac{\sin(2x)}{2x}+cos(2x)} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-x}{x\cdot\tan(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1/\cos^2(x)-1}{\tan(x)+x/\cos^2(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{\cos(x)\sin(x)+x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin^2(x)}{x}}{\cos(x)\frac{\sin(x)}{x}+1} = 0$$

Esercizio 6.9. Scrivere i polinomi di Taylor delle seguenti funzioni, con punti iniziali e ordini assegnati,

i. $f(x) = x-\sin x, \quad x_0 = 0,\ n = 5,$ **ii.** $f(x) = e^x-\cos(2\pi x), \quad x_0 = 1,\ n = 4,$

iii. $f(x) = \arctan x, \quad x_0 = 0,\ n = 2,$ **iv.** $f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 2,\ n = 2,$

v. $f(x) = \sqrt{1+x}, \quad x_0 = 0,\ n = 3,$ **vi.** $f(x) = \sqrt{1+x}, \quad x_0 = 2,\ n = 3$

Soluzione:

$\boxed{f(x) = x-\sin x,\ x_0 = 0,\ n = 5}$

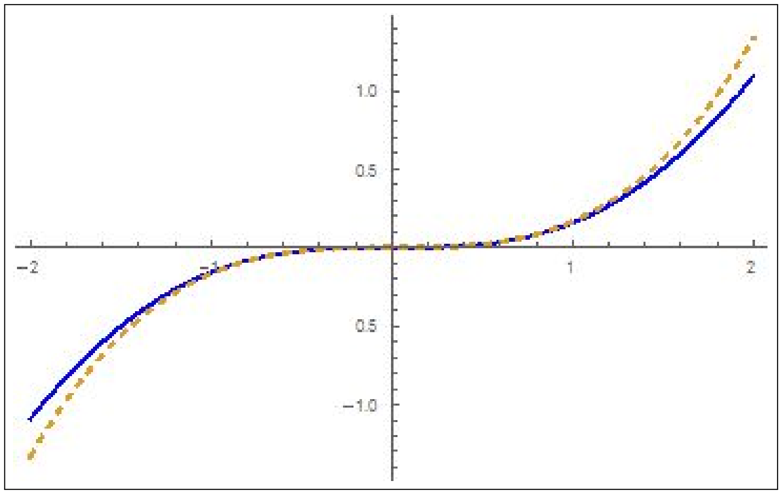


FIGURA 20. $f(x) = x - \sin x$, $x_0 = 0$, $n = 5$

$$\left\{\begin{array}{lcr} f(0) & = & 0 \\ f'(0) & = & 0 \\ f''(0) & = & 0 \\ f^{[3]}(0) & = & 1 \\ f^{[4]}(0) & = & 0 \\ f^{[5]}(0) & = & -1 \end{array}\right. \quad \to \quad T_5(x) = \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{5!}x^5$$

$\boxed{f(x) = e^x - \cos(2\pi x),\ x_0 = 1,\ n = 4}$

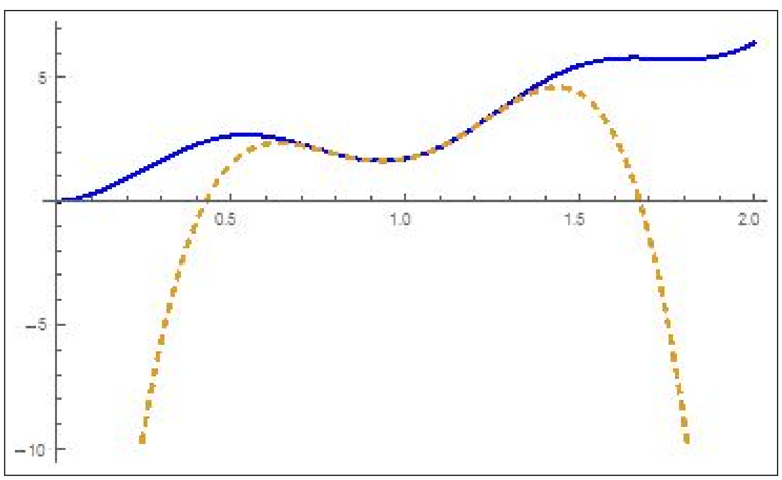


FIGURA 21. $f(x) = e^x - \cos(2\pi x)$, $x_0 = 1$, $n = 4$

$$\left\{\begin{array}{lcr} f(1) & = & -1+e \\ f'(1) & = & e \\ f''(1) & = & e+4\pi^2 \\ f^{[3]}(1) & = & e \\ f^{[4]}(1) & = & e-16\pi^2 \end{array}\right. \quad \to$$

$$\to \quad T_4(x) = \frac{1}{24}\left(e - 16\pi^4\right)(x-1)^4 + \frac{1}{6}e(x-1)^3 + \left(\frac{e}{2} + 2\pi^2\right)(x-1)^2 + e(x-1) + e - 1$$

$\boxed{f(x) = \arctan(x),\ x_0 = 0,\ n = 2}$

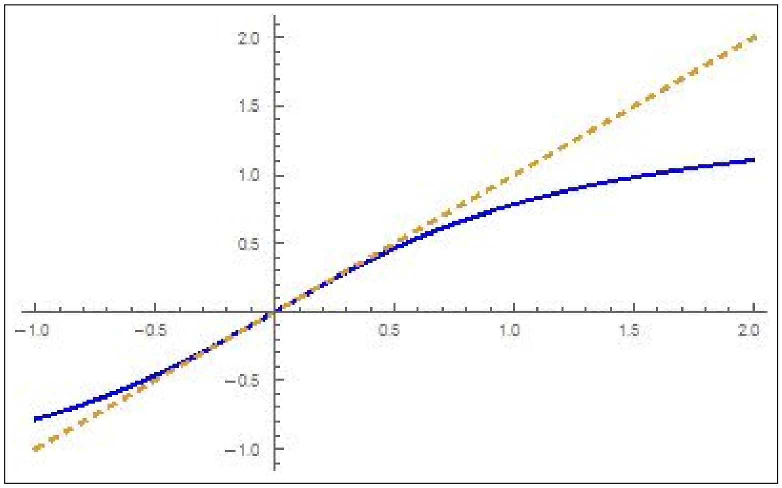


FIGURA 22. $f(x) = \arctan(x),\ x_0 = 0,\ n = 2$

$$\begin{cases} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 1 \\ f''(0) &= 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad T_2(x) = x$$

$\boxed{f(x) = \dfrac{1}{1-x},\ x_0 = 2,\ n = 2}$

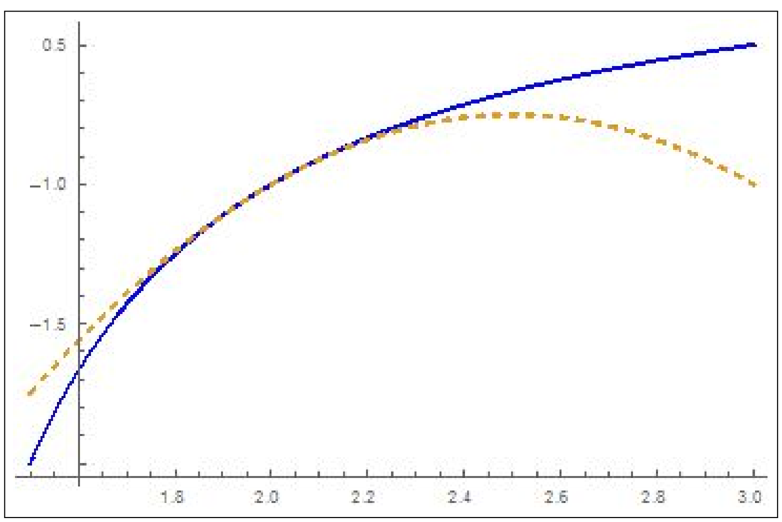


FIGURA 23. $f(x) = \dfrac{1}{1-x},\ x_0 = 2,\ n = 2$

$$\begin{cases} f(2) &= -1 \\ f'(2) &= 1 \\ f''(2) &= 2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad T_2(x) = -(x-2)^2 + x - 3$$

$\boxed{f(x) = \sqrt{1+x},\ x_0 = 0,\ n = 3}$

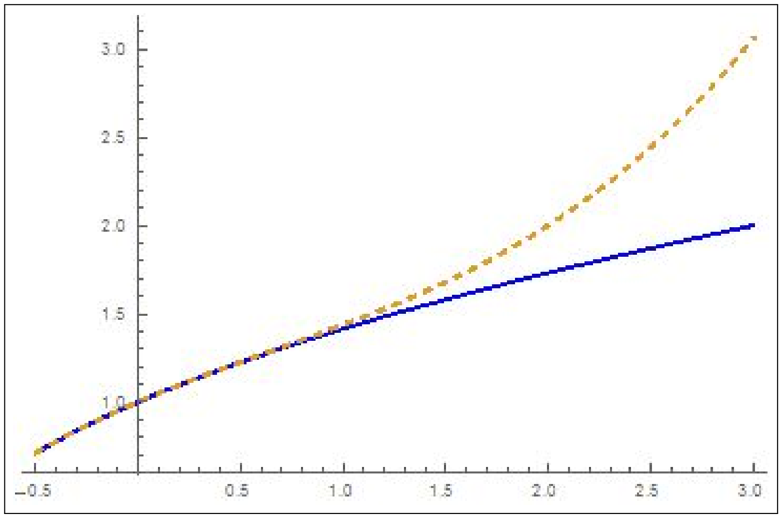


FIGURA 24. $f(x)=\sqrt{1+x}$, $x_0=0$, $n=3$

$$\begin{cases} f(0) & = & 1 \\ f'(0) & = & 1/2 \\ f''(0) & = & -1/4 \\ f^{[3]}(0) & = & 3/8 \end{cases} \quad \rightarrow \quad T_3(x)=\frac{x^3}{16}-\frac{x^2}{8}+\frac{x}{2}+1$$

$\boxed{f(x)=\sqrt{1+x},\ x_0=2,\ n=3}$

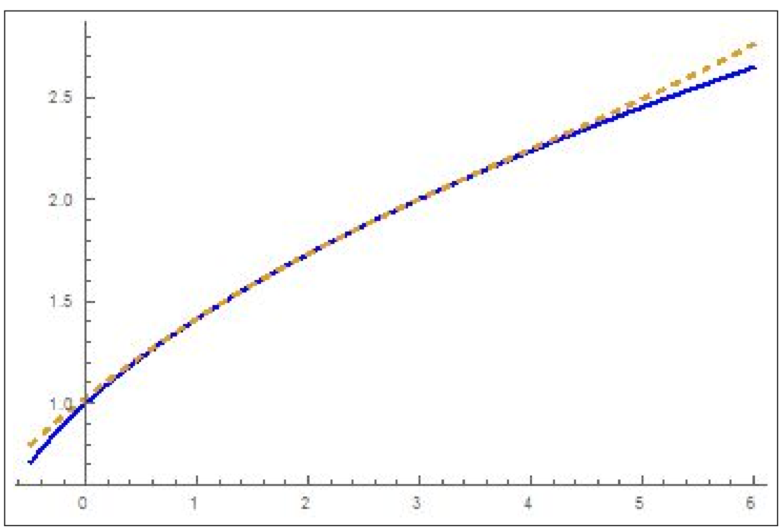


FIGURA 25. $f(x)=\sqrt{1+x}$, $x_0=2$, $n=3$

$$\begin{cases} f(2) & = & \sqrt{3} \\ f'(2) & = & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ f''(2) & = & -\frac{1}{12\sqrt{3}} \\ f^{[3]}(2) & = & \frac{1}{24\sqrt{3}} \end{cases} \quad \rightarrow \quad T_3(x)=\frac{(x-2)^3}{144\sqrt{3}}-\frac{(x-2)^2}{24\sqrt{3}}+\frac{x-2}{2\sqrt{3}}+\sqrt{3}$$

Esercizio 6.10. Siano $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \ln(1+x)$ con $x \in I = [0,1]$,
i. scrivere i due rispettivi polinomi di Taylor T_f e T_g con $x_0 = 0, n = 3$;
ii. rappresentare i resti $R_f := f - T_f$ e $R_g := g - T_g$ nella forma di Lagrange;
iii. stimare gli errori di approssimazione $|R_f|$ e $|R_g|$ ed il loro massimo.

Soluzione:

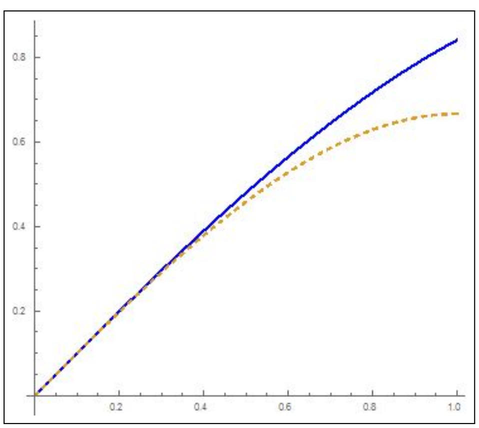
$$f(x) = \sin(x), \qquad T_f(x) = x - \frac{x^3}{3!}, \qquad R_f(x) = \frac{-\cos(\xi)}{4!}x^4$$

$$g(x) = \ln(1+x), \quad T_g(x) = \tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^2}{2} + x, \quad R_f(x) = \frac{-\dfrac{6}{(\xi+1)^4}}{4!}x^4$$

Al variare di $x \in [0,1]$ i resti di Lagrange $R_f(x), R_g(x)$ verificano le maggiorazioni in modulo

$$|R_f(x)| = \left|\frac{-\cos(\xi)}{4!}x^4\right| \le \left|\frac{1}{4!}x^4\right| \le \frac{1}{4!} \approx 0,04$$

$$|R_g(x)| = \left|\frac{-\dfrac{6}{(\xi+1)^4}}{4!}x^4\right| \le \left|\frac{6}{4!}x^4\right| \le \frac{1}{4} = 0.25$$



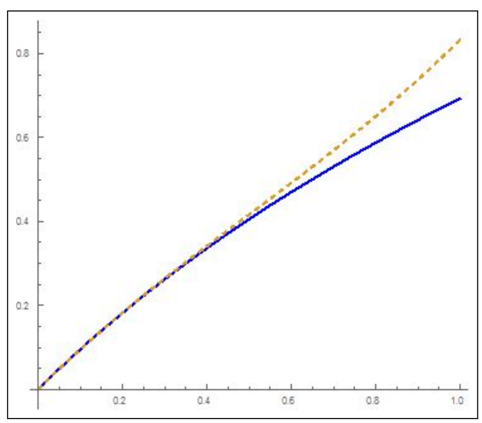


FIGURA 26. $f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = \ln(1+x)$ in blue,T_f e T_g tratteggiati

Corso di laurea in *Chimica*, a.a. 2015/16

Istituzioni di Matematica I (V. Nesi, C. Mascia, L. Lamberti, C. Cassisa)

Soluzioni Scheda 7 – 16 dicembre 2015

Esercizio 7.1. Assegnata la funzione $f(x) = 1 - x^2$ e l'intervallo $I = [-1, 1]$

- calcolare la somma integrale inferiore relativa alla suddivisione di I in $n = 6$ parti uguali,
- calcolare la somma integrale superiore relativa alla suddivisione di I in $n = 6$ parti uguali,
- calcolare l'integrale $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

Soluzione:

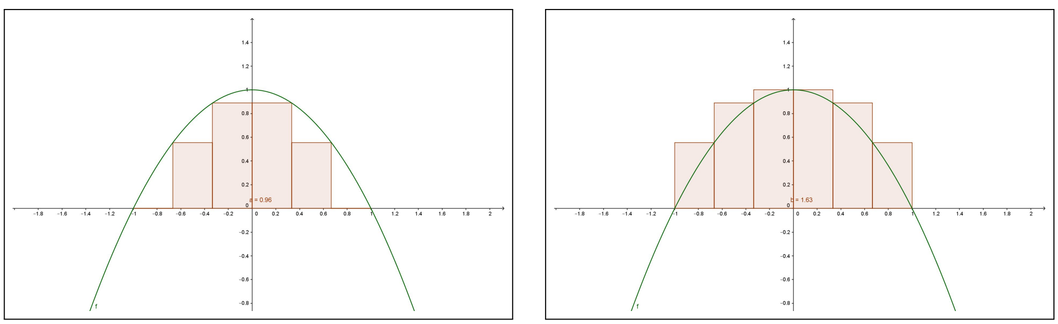


FIGURA 27. $f(x) = 1 - x^2$

Suddividere l'intervallo $[-1, 1]$ in 6 parti uguali significa

$$[-1,1] = [-1,-2/3] \cup [-2/3,-1/3] \cup [-1/3,0] \cup [0,1/3] \cup [1/3,2/3] \cup [2/3,1]$$

Considerato che la funzione $f(x) = 1 - x^2$ è crescente in $[-1, 0]$ e decrescente in $[0, 1]$ gli estremi inferiori e_i e superiori E_i in ciascuno dei 6 intervallini sono:

$$\begin{array}{lll}
1 & e_1 = 0 & E_1 = f(-2/3) \\
1 & e_2 = f(-2/3) & E_2 = f(-1/3) \\
1 & e_3 = f(-1/3) & E_3 = 1 \\
1 & e_4 = f(1/3) & E_4 = 1 \\
1 & e_5 = f(2/3) & E_5 = f(1/3) \\
1 & e_6 = 0 & E_6 = f(2/3)
\end{array}$$

Da cui, tenuto conto che f è funzione pari

$$S'\{f,[-1,1]\} = \{2f(2/3) + 2f(1/3)\}\frac{1}{3} = \frac{26}{27}, \quad S''\{f,[-1,1]\} = \{2f(2/3) + 2f(1/3) + 2\}\frac{1}{3} = \frac{44}{27}$$

$$S'\{f,[-1,1]\} \approx 0{,}962 \leq \int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{4}{3} \approx 1.333 \leq S''\{f,[-1,1]\} \approx 1{,}629$$

Esercizio 7.2. Assegnata la funzione $f(x) = [x]$, parte intera, determinare l'integrale $\int_{-2}^{1.5} f(x)\,dx$

Soluzione:

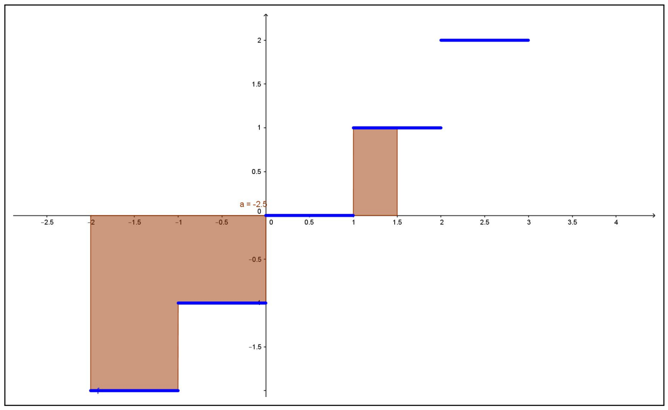


FIGURA 28. $f(x) = [x]$, $\int_{-2}^{1.5} f(x)\,dx$

$$\int_{-2}^{1.5} f(x)\,dx = -2\times 1 - 1\times 1 + 0\times 1 + 1\times 0.5 = -2.5$$

Esercizio 7.3. Assegnata la funzione $f(t) = t\,\sin(t)$, e posto $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

- determinare i punti stazionari di $F(x)$,
- classificare quali siano di massimo e quali di minimo relativi.

Soluzione:

Punti stazionari: $F'(x) = 0$. Tenuto conto che $F'(x) = x\,\sin(x)$ i punti stazionari sono $x_k = k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Tenuto conto del segno della $F'(x) = x\,\sin(x)$ tra un punto stazionario e l'altro si riconosce che $F(x)$

- è decrescente in $[-2\pi, -\pi]$
- è crescente in $[-\pi, \pi]$
- è decrescente in $[\pi, 2\pi]$
- è crescente in $[2\pi, 3\pi]$
- ecc.

Pertanto -2π è punto di massimo, $-\pi$ è punto di minimo, π punto di massimo, 2π punto di minimo, ecc.

Esercizio 7.4. Assegnata la funzione $f(t) = t\,(t-1)$, calcolare l'integrale $\int_{-1}^{1} |f(t)|\,dt$.

Soluzione:

Tenuto presente che $f(t)$ è negativa in $[0,1]$ e positiva altrove riesce

$$\int_{-1}^{1} |f(t)|\, dt = \int_{-1}^{0} f(t)\, dt - \int_{0}^{1} f(t)\, dt$$

da cui servendosi della primitiva $F(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2$ si ha

$$\int_{-1}^{1} |f(t)|\, dt = F(0) - F(-1) - F(1) + F(0) = 1$$

Esercizio 7.5. Assegnata la funzione $f(t) = t \cdot e^{-t^2}$, calcolare gli integrali $\int_{-1}^{1} f(t)\, dt, \quad \int_{-1}^{1} |f(t)|\, dt$

Soluzione:

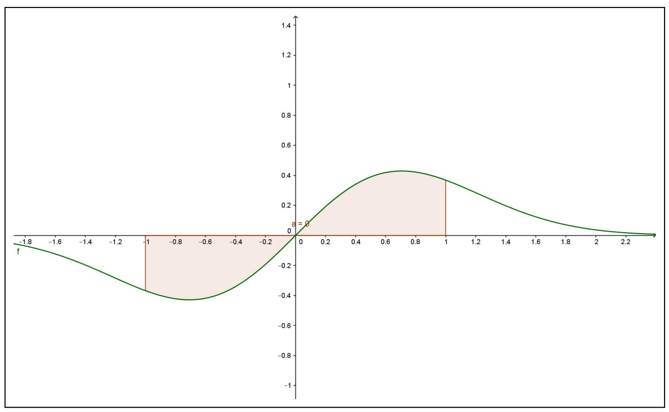


FIGURA 29. $f(t) = t \cdot e^{-t^2}$

$$\int_{-1}^{1} t \cdot e^{-t^2}\, dt = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} -2t \cdot e^{-t^2}\, dt = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \left(e^{-t^2}\right)'\, dt = 0$$

$$\int_{-1}^{1} \left|t \cdot e^{-t^2}\right|\, dt = -\int_{-1}^{0} t \cdot e^{-t^2}\, dt + \int_{0}^{1} t \cdot e^{-t^2}\, dt = 1 - \frac{1}{e}$$

Esercizio 7.6. Calcolare, servendosi della regola di integrazione per parti, gli integrali

$$\int_{0}^{2\pi} \sin^m(x)\, dx, \;\; m = 1, 2, 3$$

Soluzione:

$\int_0^{2\pi} \sin(x)\, dx = 0,$

$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \sin(x) \cdot (-\cos(x))\, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \left(1 - \sin^2(x)\right)\, dx$

$2\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\, dx = 2\pi \quad \to \quad \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\, dx = \pi$

$\int_0^{2\pi} \sin^3(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2(x)\right) (\cos(x))'\, dx = 0$

OSSERVAZIONE 7.1. La somiglianza evidente delle due funzioni $\sin^2(x)$ e $\cos^2(x)$ conduce naturalmente alla uguaglianza

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx$$

Tenuto conto del resto che $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$ si ha

$$\int_0^{2\pi} \left\{\sin^2(x)+\cos^2(x)\right\}\,dx = 2\pi$$

da cui, per l'uguaglianza osservata si ricava anche, per ciascuno dei due integrali, l'ovvio valore

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,dx = \pi, \qquad \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx = \pi$$

Con osservazioni evidenti e altrettanto vere si ottengono anche i valori

$$\int_0^{\pi} \sin^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{\pi} \cos^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\,dx = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\,dx = \frac{\pi}{4}$$

Esercizio 7.7. Calcolare l'integrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ servendosi della sostituzione $x = \sin(t)$.

Soluzione:

Tenuto conto dell'equazione cartesiana della circonferenza di centro l'origine e raggio $r = 1$

$$x^2+y^2 = 1 \quad \to \quad y^2 = 1-x^2 \quad \to \quad y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

si riconosce che l'integrale proposto rappresenta l'area del sottografico della funzione $y = \sqrt{1-x^2}$ relativo all'intervallo $x \in [0,1]$, un quarto del cerchio di area π.
L'area di tale sottografico è pertanto $\pi/4$.

L'integrale proposto può naturalmente essere calcolato anche per via diretta, ricorrendo alla sostituzione $y = \sin(t),\ t \in [0,\pi/2]$:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \;=\; \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2(t)}\cos(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\,dt = \frac{\pi}{4}$$

Si noti che $\sqrt{\cos^2(t)} = |\cos(t)|$ ma, per $t \in [0,\pi/2]$ riesce $\cos(t) \geq 0$ da cui

$$t \in [0,\pi/2] : \quad \to \quad \sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)$$

Esercizio 7.8. Si determini il polinomio di Taylor di ordine $n = 3$ e punto iniziale $x_0 = 0$ della funzione

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

Soluzione:

$$P(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{1}{2}F''(0)x^2 + \frac{1}{6}F'''(0)x^3$$

Tenuto conto che del teorema fondamentale del calcolo, $F(0) = 0, F'(x) = e^{-x^2}$, si riconosce che

$$F'(0) = 1, \quad F''(0) = 0, \quad F'''(0) = -2$$

da cui

$$P(x) = x - \frac{1}{3}x^3$$

Si noti che il risultato poteva anche essere previsto ricordando che

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + o(t^2) \quad \to \quad F(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

da cui il polinomio di Taylor cercato

$$x - \frac{1}{3}x^3$$

Esercizio 7.9. Calcolare gli integrali seguenti

$$\int_0^1 \frac{1}{4+9x^2}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^2+5x+6}\,dx, \qquad \int_0^4 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

Soluzione:

$$\int_0^1 \frac{1}{4+9x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{3x}{2}\right)^2}\frac{3}{2}\,dx = \frac{1}{6}\arctan\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+5x+6}\,dx = \int_0^1 \left\{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right\}dx = \log\left(\frac{3}{4}\right) - \log\left(\frac{2}{3}\right) = \log\left(\frac{9}{8}\right)$$

$$\int_0^4 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \left.\frac{-1}{x+1}\right|_0^4 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{1} = \frac{4}{5}$$

Esercizio 7.10. Stimare, servendosi del teorema della media, il seguente integrale $\int_{10}^{20}\left(5+e^{-x^2}\right)dx$

Soluzione:

$$\int_{10}^{20}\left(5+e^{-x^2}\right)\,dx=\left(5+e^{-\xi^2}\right)(20-10)$$

Tenuto presente che $\xi\in[10,20]$ riesce

$$0\le e^{-\xi^2}\le e^{-10^2}\approx 10^{-44}$$

riesce

$$\left|\int_{10}^{20}\left(5+e^{-x^2}\right)\,dx-50\right|\le 10^{-44}\,10=10^{-43}$$

Esercizio 7.11. Calcolare l'area della regione piana $A:\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le\sqrt{x}\right\}$.

Soluzione:

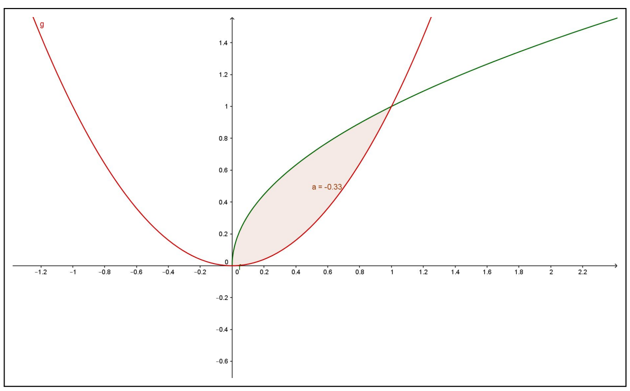


FIGURA 30. $A:\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le\sqrt{x}\right\}$

$$Area\ =\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\,dx=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

Esercizio 7.12. Sia $f(x)=1/x^\alpha$ scelti $0<r<R$ dire per quali $\alpha>0$ esistono, finiti, i limiti $\lim_{r\to 0^+}\int_r^R f(x)\,dx$, $\lim_{R\to+\infty}\int_r^R f(x)\,dx$ e commentare i risultati ottenuti in termini di sottografico di $f(x)$.

Soluzione:

Se $\alpha=1$ si ha

$$\int_r^R\frac{1}{x}\,dx=\log(R)-\log(r)\quad\to\quad\begin{cases}\lim_{r\to 0^+}\int_r^R f(x)\,dx=+\infty\\ \lim_{R\to+\infty}\int_r^R f(x)\,dx=+\infty\end{cases}$$

Se $\alpha\neq 1$ si ha

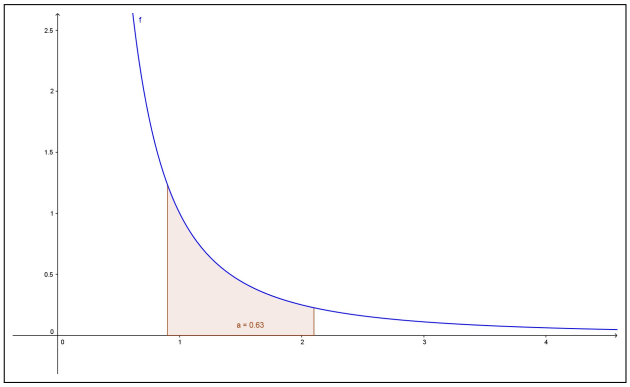


FIGURA 31. $\int_r^R 1/x^2\,dx$

$$\int_r^R \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}\left(R^{1-\alpha} - r^{1-\alpha}\right)$$

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{1-\alpha}\left(R^{1-\alpha} - r^{1-\alpha}\right) = \begin{cases} 0 \le \alpha < 1 & \frac{1}{1-\alpha} R^{1-\alpha} \\ 1 < \alpha & +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{R\to +\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(R^{1-\alpha} - r^{1-\alpha}\right) = \begin{cases} 0 \le \alpha < 1 & +\infty \\ 1 < \alpha & \frac{1}{\alpha-1} r^{1-\alpha} \end{cases}$$

OSSERVAZIONE 7.2. L'osservazione fatta sopra, riferendosi ad esempio a $r = 1$

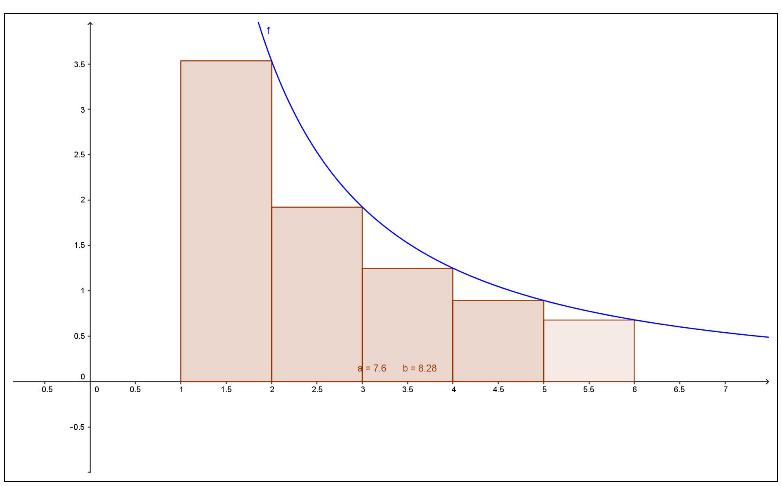
$$\alpha > 1 \quad \to \quad \lim_{R\to+\infty} \int_1^R \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha - 1}$$

giustifica la convergenza delle serie armoniche generalizzate

$$\alpha > 1 \quad \to \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < \infty$$

Infatti

$$\alpha > 1 \quad \to \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} < \int_1^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right) < \frac{1}{\alpha-1}$$



Il confronto serie - integrale usato richiede, si noti bene, la monotonia della funzione con la quale si esegue il confronto: in modo che la somma parziale della serie rappresenti una delle somme integrali inferiori della funzione usata (vedi figura).

Corso di laurea in *Chimica*, a.a. 2015/16

Istituzioni di Matematica I (V. Nesi, C. Mascia, L. Lamberti, C. Cassisa)

Soluzioni Scheda 8 – 23 dicembre 2015

Esercizio 8.1. Assegnati i due numeri complessi $z_1 = 4 + 3i$ e $z_2 = -3 + 4i$

- disegnarli sul piano,
- determinare i loro moduli $|z_1|$, $|z_2|$
- disegnare i loro coniugati $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$
- determinare $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $1/z_2$, z_1/z_2 e disegnare sul piano i risultati ottenuti.

Soluzione:

I due numeri z_1 e z_2 sono assegnati in *forma cartesiana*, la forma piú adatta ad eseguire somme e sottrazioni.
Per eseguire moltiplicazioni e divisioni é quasi sempre vantaggiosa la *forma polare* che si serve di *modulo* e di *argomento*.
La forma polare é particolarmente vantaggiosa se scritta con la notazione esponenziale

$$z = |z|\, e^{i \arg(z)}$$

Naturalmente si passa da una forma all'altra con semplici operazioni goniometriche

$$4 + 3i = 5\, e^{i \arg(4+3i)}, \quad -3 + 4i = 5\, e^{i \arg(-3+4i)}$$

$$\begin{cases} 4 + 3i + (-3 + 4i) & = & 1 + 7i \\ 4 + 3i - (-3 + 4i) & = & 7 - i \end{cases}$$

$$\begin{cases} (4 + 3i).(-3 + 4i) & = & -24 + 7i \\[2ex] \dfrac{1}{-3 + 4i} & = & \dfrac{-3 - 4i}{5} \\[2ex] \dfrac{4 + 3i}{-3 + 4i} = \dfrac{(4 + 3i)(-3 - 4i)}{5} & = & -5i \end{cases}$$

$$\begin{cases} |4 + 3i| & = & \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \\[2ex] |-3 + 4i| & = & \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \\[2ex] \overline{4 + 3i} & = & 4 - 3i \\[2ex] \overline{-3 + 4i} & = & -3 - 4i \end{cases}$$

Esercizio 8.2. Siano $w_1 = 16$, $w_2 = -16$, $w_3 = 81\,i$: determinare, e disegnare sul piano complesso, tutte le soluzioni z delle equazioni

$$z^2 = w_i, \quad z^3 = w_i, \quad z^4 = w_i, \qquad i = 1,2,3$$

(ovvero determinare le radici quadrate, terze e quarte dei numeri complessi w_i $i = 1,2,3$ assegnati)

Soluzione:

Le radici $\sqrt[n]{z}$, $z \neq 0$, si disegnano facilmente:

- sono n numeri complessi distinti,
- hanno come modulo la radice $n-$esima (aritmetica positiva) del modulo di z,
- hanno come argomenti gli argomenti di z divisi per n (se ne creano n distinti),
- costituiscono i vertici di un poligono regolare di n lati.

$$\boxed{z = |z|\, e^{i(\vartheta + 2k\pi)} \qquad \rightarrow \qquad \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}}}$$

$$\boxed{z^2 = 2^4, \quad z^3 = 2^4, \quad z^4 = 2^4}$$

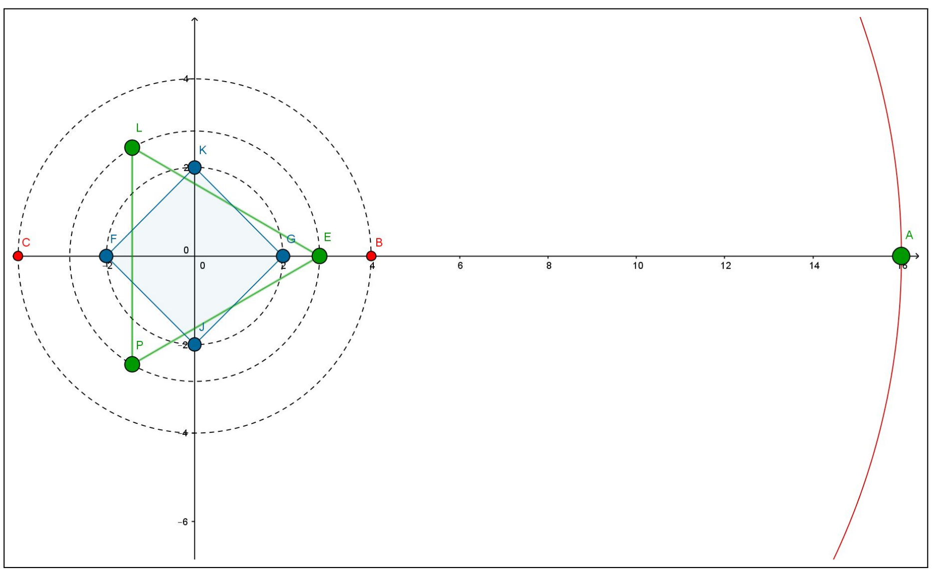


FIGURA 32. $z^2 = 2^4, \quad z^3 = 2^4, \quad z^4 = 2^4$

$$\sqrt{16} = \begin{cases} 4 \\ -4 \end{cases} \qquad \sqrt[3]{16} = \begin{cases} 2\sqrt[3]{2}e^{0i} & = \ 2\sqrt[3]{2} \\ 2\sqrt[3]{2}e^{(0+2\pi/3)\,i} & = \ 2\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \\ 2\sqrt[3]{2}e^{(0+4\pi/3)\,i} & = \ 2\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases} \qquad \sqrt[4]{16} = \begin{cases} 2 \\ 2i \\ -2 \\ -2i \end{cases}$$

$$\boxed{z^2 = -2^4, \quad z^3 = -2^4, \quad z^4 = -2^4}$$

$$\sqrt{-16} = \begin{cases} 4i \\ -4i \end{cases} \quad \sqrt[3]{-16} = \begin{cases} 2\sqrt[3]{2}e^{(\pi/3)\,i} & = & 2\sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ 2\sqrt[3]{2}e^{(\pi/3+2\pi/3)\,i} & = & -2\,\sqrt[3]{2} \\ 2\sqrt[3]{2}e^{(\pi/3+4\pi/3)\,i} & = & 2\sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

$$\sqrt[4]{-16} = \begin{cases} 2\,e^{(\pi/4)\,i} & = & (1+i)\sqrt{2} \\ 2\,e^{(\pi/4+2\,\pi/4)\,i} & = & (-1+i)\sqrt{2} \\ 2\,e^{(\pi/4+4\,\pi/4)\,i} & = & (-1+i)\sqrt{2} \\ 2\,e^{(\pi/4+6\,\pi/4)\,i} & = & (-1-i)\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\boxed{z^2 = 3^4\,i, \quad z^3 = 3^4\,i, \quad z^4 = 3^4\,i}$$

$$\sqrt{3^4\,i} = \begin{cases} 3^2 e^{i\,pi/4} & = & 9\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \\ 3^2 e^{i\,(pi/4+2\pi/2)} & = & 9\left(-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \end{cases} \qquad \sqrt[3]{3^4\,i} \begin{cases} 3\,\sqrt[3]{3}e^{i\,\pi/6} & = & 3\,\sqrt[3]{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) \\ 3\,\sqrt[3]{3}e^{i(\,\pi/6+2\pi/3)} & = & 3\,\sqrt[3]{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) \\ 3\,\sqrt[3]{3}e^{i(\,\pi/6+4\pi/3)} & = & 3\,\sqrt[3]{3}\,(-i) \end{cases}$$

$$\sqrt[4]{3^4\,i} \begin{cases} 3\,e^{i\,\pi/8} & = & 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \\ 3\,e^{i\,(\pi/8+2\pi/4)} & = & 3\left(-\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \\ 3\,e^{i\,(\pi/8+4\pi/4)} & = & 3\left(-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \\ 3\,e^{i\,(\pi/8+6\pi/4)} & = & 3\left(\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - i\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \end{cases}$$

Esercizio 8.3. Assegnati i numeri complessi $z_1 = \log(3) + i\pi/4$ e $z_2 = -\log(3) + i\pi/4$,

- disegnare sul piano z_1 e z_2,
- determinare i numeri complessi $w_1 = e^{z_1}$, $w_2 = e^{z_2}$
- determinare moduli e argomenti di w_1 e w_2,

Soluzione:

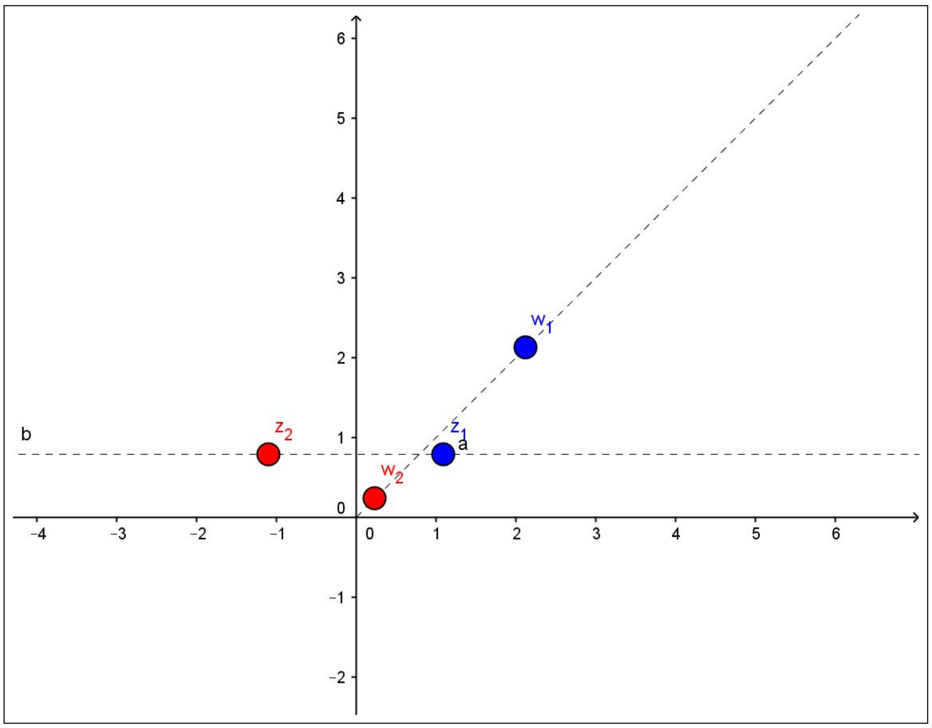


FIGURA 33. $z_1 = \log(3) + i\pi/4$, $z_2 = -\log(3) + i\pi/4$, $w_1 = e^{z_1}$, $w_2 = e^{z_2}$

$$\begin{aligned}
w_1 &= e^{\log(3)+i\pi/4} &&= 3\, e^{i\pi/4} &&= 3\left(\tfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \\
w_2 &= e^{-\log(3)+i\pi/4} &&= 1/3\, e^{i\pi/4} &&= 1/3\left(\tfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \\
|w_1| &= 3, && |w_2| &&= 1/3 \\
arg(w_1) &= arg(w_2) &&= \pi/4
\end{aligned}$$

Esercizio 8.4. Calcolare le somme delle due serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\,\pi)^k}{k!}$$

e disegnare tali valori sul piano complesso.

Soluzione:

La prima serie é una serie geometrica di ragione $q = \frac{i}{2}$ e la seconda é la serie esponenziale calcolata per $z = i\pi$: pertanto

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{i}{2}} = \frac{2}{2-i} = \frac{4+4i}{\sqrt{5}}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\pi)^k}{k!} = e^{i\pi} = -1.$$

Il valore della prima somma cade sulla bisettrice del primo quadrante, il valore della seconda cade sul semiasse reale negativo.

Esercizio 8.5. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + y & = 1, \\ y(0) & = 2 \end{cases}$$

e disegnarne il grafico per $t \geq 0$.

Soluzione:

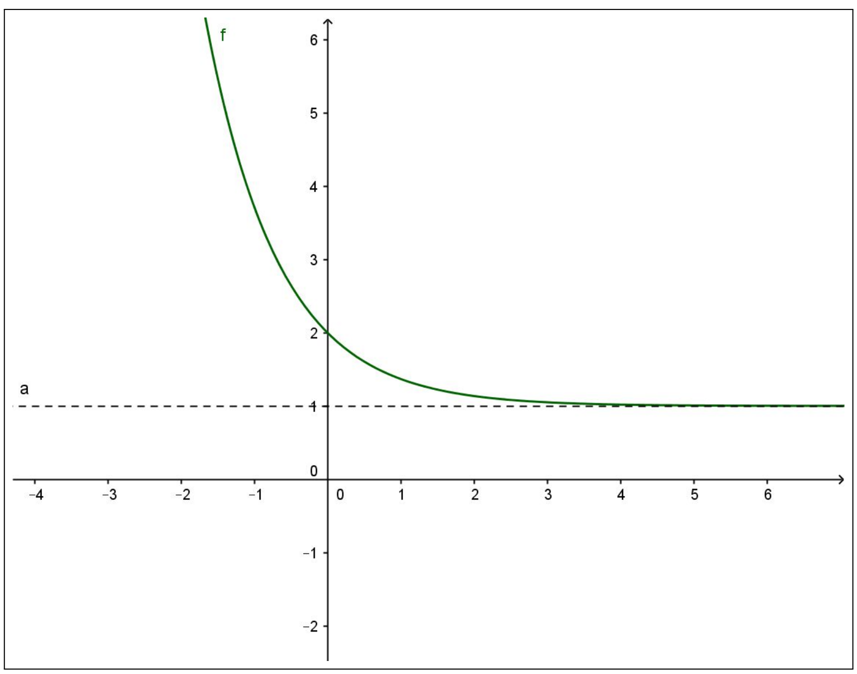


FIGURA 34. $y(x) = e^{-x} + 1$

$$y_0(x) = Ce^{-x}, \quad \overline{y}(x) = 1, \quad y(x) = e^{-x} + 1$$

Esercizio 8.6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + y & = 2e^{-t}, \\ y(0) & = 1 \end{cases}$$

e disegnarne il grafico per $t \geq 0$.

Soluzione:

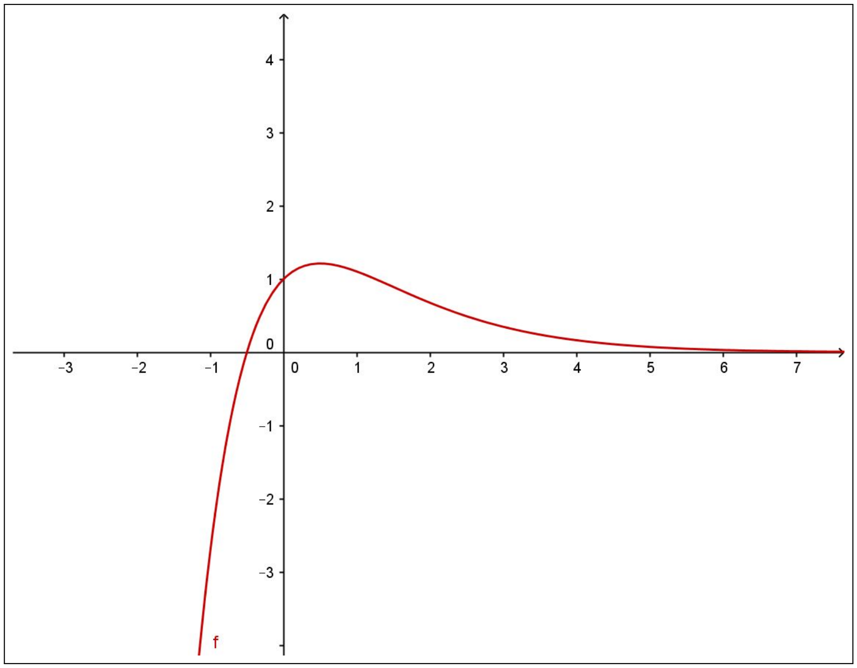


FIGURA 35. $y(t) = (2t+1)e^{-t}$

$$y'(t) + y(t) = 2e^{-t} \quad \to \quad y'(t)e^t + y(t)e^t = 2 \quad \to \quad \left(y(t).e^t\right)' = 2 \quad \to \quad y(t).e^t = 2t + c$$

$$y(0) = 1 \quad \to \quad c = 1 \quad \to \quad y(t) = (2t+1)e^{-t}$$

Esercizio 8.7. Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale del secondo ordine

$$y'' + 9y = 0$$

e disegnare i grafici di tre di esse.

Soluzione:

$$y(t) = a\sin(3t) + b\cos(3t) \quad \to \quad \begin{cases} y_1(t) = \sin(3t) \\ y_2(t) = \cos(3t) \\ y_3(t) = \sin(3t) + \cos(3t) \end{cases}$$

Esercizio 8.8. Determinare la soluzione $y(x)$ di

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y & = & 0, \\ y(0) & = & 1, \\ y'(0) & = & -2 \end{cases}$$

e determinare $\lim_{x\to+\infty} y(x)$.

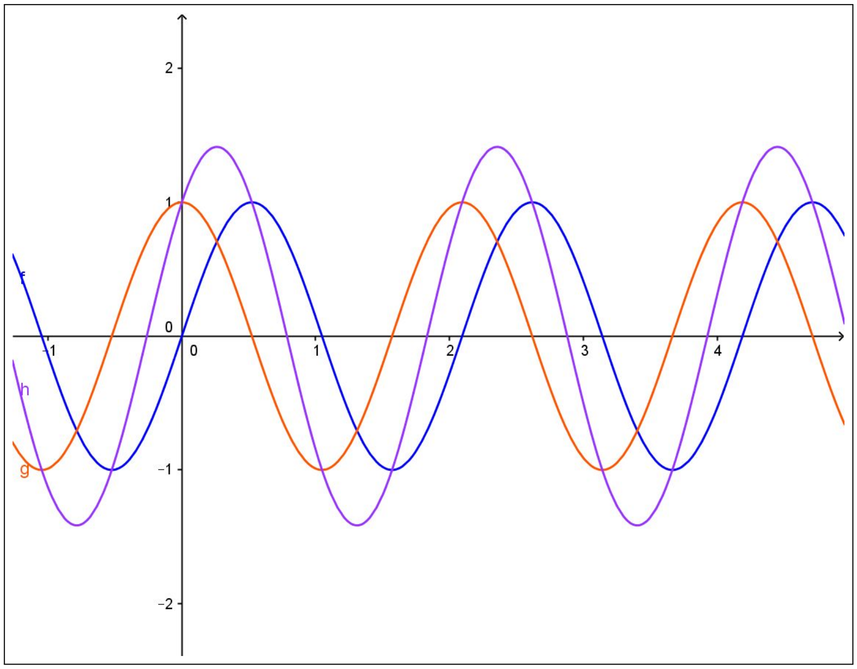


FIGURA 36. $y'' + 9y = 0$

Soluzione:

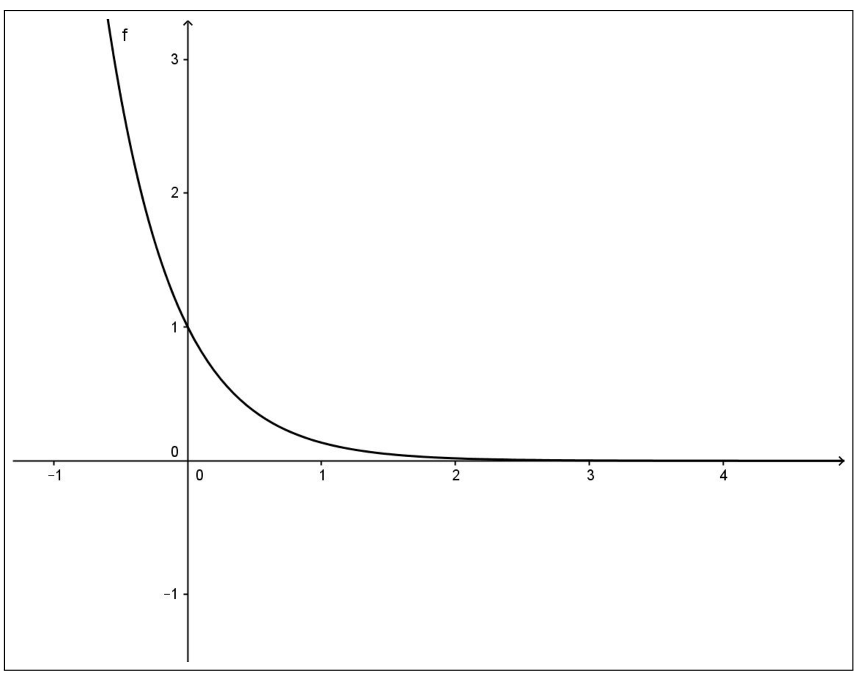


FIGURA 37. $y'' + y' - 2y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2.$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad \to \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2$$

$$y(t) = ae^t + be^{-2t}, \qquad \to \qquad y'(t) = ae^t - 2be^{-2t}$$

$$a + b = 1, \quad a - 2b = -2 \quad \to \quad a = 0, \quad b = 1$$

$$y(t) = e^{-2t}, \qquad \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$$

Esercizio 8.9. Determinare tutte le soluzioni $y(x)$ dell'equazione $y'' + 2y' + 5y = 0$,

- successivamente determinare quelle che soddisfano la condizione iniziale $y(0) = 0$,
- e successivamente quella che soddisfa anche la condizione $y'(0) = 1$.

Soluzione:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \quad \to \quad \lambda_1 = -1 + 2i,\ \lambda_2 = -1 - 2i \quad \to \quad y(x) = e^{-x}\left\{ae^{2ix} + be^{-2ix}\right)$$

$$y(x) = ae^{-x}\left\{e^{2ix} - e^{-2ix}\right)$$

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{-x}\sin(2x)$$

Esercizio 8.10. Determinare la soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y & = \sin(t), \\ y(0) & = 0, \\ y'(0) & = 0 \end{cases}$$

.

Soluzione:

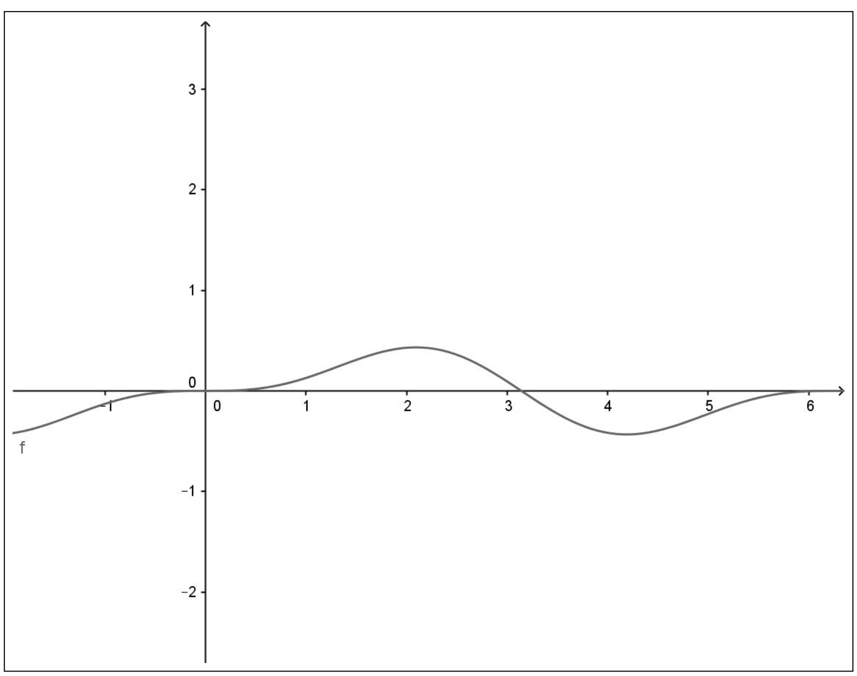


FIGURA 38. $y'' + 4y = \sin(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

$$y_0(t) = a\sin(2t) + b\cos(2t), \quad \overline{y}(t) = A\,\sin(t)$$

Imponendo che $A\sin(t)$ soddisfi l'equazione differenziale si ricava $A = \frac{1}{3}$.
Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale sono pertanto espresse dalla formula

$$y(t) = a\sin(2t) + b\cos(2t) + \frac{1}{3}\sin(t)$$

Le condizioni iniziali assegnate impongono

$$y(0) = 0 \quad \to \quad b = 0, \qquad y'(0) = 0 \quad \to \quad 2a + \frac{1}{3} = 0 \quad \to \quad a = -\frac{1}{6}$$

e quindi la soluzione é

$$y(t) = -\frac{1}{6} sin(2t) + \frac{1}{3}\sin(t)$$

Esercizio 8.11. Assegnati i punti del piano $A = (0,0)$, $B = (3,4)$, $C = (6,0)$:

- disegnare il triangolo T del piano da essi determinato,
- determinare il perimetro e l'area di T,
- determinare le equazioni delle tre rette cui appartengono i lati di T,
- determinare i tre semipiani la cui intersezione é il triangolo T.

Soluzione:

Perimetro e area:

$$a = 5, b = 6, c = 5, 2p = 16, p = 8, area = \sqrt{8 \times 3 \times 2 \times 3} = 12$$

$$y \geq 0, \quad y \leq \frac{4}{3}x, \quad y \leq -\frac{4}{3}(x-6)$$

L'area é stata dedotta dai lati usando la formula di Erone, vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Formula_di_Erone
Rette dei lati: $y = 0,\ y = \frac{4}{3}x,\ y = -\frac{4}{3}(x-6)$

Semipiani la cui intersezione costituisce il triangolo:

$$(y \geq 0) \cap \left(y \leq \frac{4}{3}x\right) \cap \left(y \leq -\frac{4}{3}(x-6)\right)$$

Esercizio 8.12. Determinare il dominio del piano determinato dalle limitazioni

$$|x| < 2,\ |y| < 3,\ |x| + |y| < 4.$$

Soluzione:

Le prime due limitazioni

$$|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2, \qquad |y| < 3 \Leftrightarrow -3 < y < 3$$

determinano il rettangolo

$$[-2, 2] \times [-3, 3]$$

La terza limitazione, simmetrica rispetto ai due assi, determina il quadrato di vertici

$$(4,0), \quad (0,4), \quad (-4,0), \quad (0,-4)$$

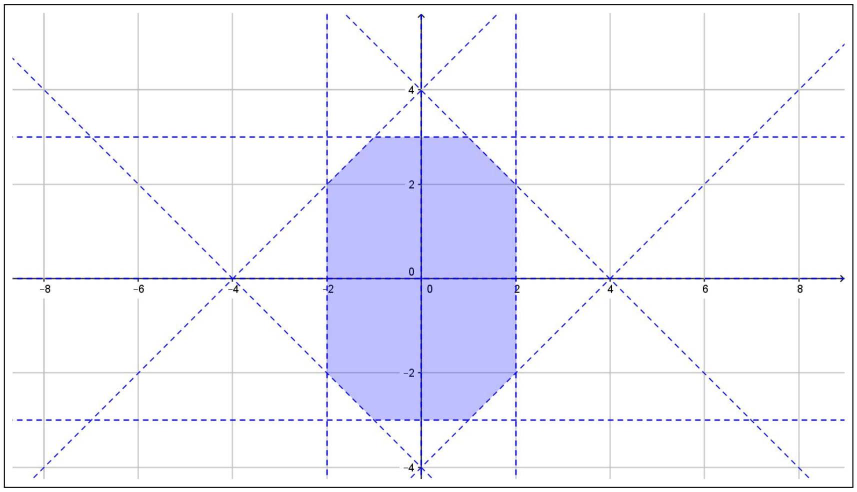


FIGURA 39. $|x| < 2,\ |y| < 3,\ |x| + |y| < 4.$

Il dominio definito dalle tre limitazioni é pertanto l'intersezione del rettangolo e del quadrato: l'ottagono (non regolare) di vertici

$$(2,2), \quad (1,3), \quad (-1,3), \quad (-2,2), \quad (-2,-2), \quad (-1,-3), \quad (1,-3), \quad (2,-2)$$

Esercizio 8.13. Determinare il dominio di definizione delle funzioni:

$$\sqrt{9-(x+1)^2-(y-2)^2}, \quad \log(1-|x|-|y|), \quad e^{3x^2-2y^2}, \quad \frac{1}{x^2+y^2-1}$$

Soluzione:

$$\left\{\begin{array}{l|l|l} \sqrt{9-(x+1)^2-(y-2)^2} & 9-(x+1)^2-(y-2)^2 \geq 0 & (x+1)^2+(y-2)^2 \leq 9 \\ \log(1-|x|-|y|) & 1-|x|-|y| > 0 & |x|+|y| < 1 \\ e^{3x^2-2y^2} & (x,y) \in \mathbb{R}^2 & \\ \frac{1}{x^2+y^2-1} & x^2+y^2 \neq 1 & \end{array}\right.$$

Esercizio 8.14. Posto $f(x,y) = e^{x^2+y^2} - 4$ determinare

- l'insieme del piano determinato dalla disuguaglianza $f(x,y) \leq 0$,
- l'insieme del piano determinato dalla disuguaglianza $|f(x,y)| \leq 2$,
- la linea di livello $f(x,y) = e-4$.

Soluzione:

$$f(x,y) \leq 0 \quad \rightarrow \quad e^{x^2+y^2} \leq 4 \quad \rightarrow \quad x^2+y^2 \leq \log(4)$$

$$|f(x,y)| \leq 2 \quad \rightarrow \quad -2 \leq e^{x^2+y^2} - 4 \leq 2 \quad \rightarrow \quad 2 \leq e^{x^2+y^2} \leq 6 \quad \rightarrow \quad \log(2) \leq x^2+y^2 \leq \log(6)$$

$$f(x,y) = e - 4 \quad \rightarrow \quad e^{x^2+y^2} = e \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1$$

9. Funzioni di due variabili

Corso di laurea in *Chimica*, a.a. 2015/16

Istituzioni di Matematica I (V. Nesi, C. Mascia, L. Lamberti, C. Cassisa)

Soluzioni Scheda 9 – 16 gennaio 2016

Esercizio 9.1. Assegnata la successione di punti del piano $\left\{P_n = \left(\frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n}\right),\ n = 1,2,\dots\right\}$

- esaminare se costituisca un insieme limitato del piano,
- determinare il suo limite,
- detti z_n i numeri complessi $\quad z_n = \frac{n}{n+1} + \frac{n+1}{n}\, i \quad$ determinare il $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Soluzione:

Un insieme E del piano $\mathbb{R}^2$ é limitato se i due insiemi X delle coordinate x dei punti di E e l'insieme Y delle coordinate y dei punti di E sono limitati in $\mathbb{R}$: nel nostro caso

$$X = \left\{x = \tfrac{n}{n+1}, \quad n = 1,2,\dots\right\} \quad \to \quad 0 < x < 1,$$

$$Y = \left\{y = \tfrac{n+1}{n}, \quad n = 1,2,\dots\right\} \quad \to \quad 0 < x \le 2$$

quindi l'insieme $E = \left\{P_n = \left(\frac{n}{n+1}, \frac{n+1}{n}\right),\ n = 1,2,\dots\right\}$ é limitato.

Se $P_n = (x_n, y_n)$ allora

$$\lim_{n\to\infty} P_n = (a,b) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \end{cases}$$

É quindi evidente che

$$\lim_{n\to\infty} P_n = (1,1)$$

Se $z_n = x_n + i\,y_n$ allora

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a + i\,b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \end{cases}$$

quindi, in conseguenza di quanto giá osservato sopra,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 1 + i$$

Esercizio 9.2. Assegnato l'insieme del piano $A := \left\{(x,y) |\ 9x^2 + 4y^2 \le 36\right\}$

- esaminare se A é contenuto nel cerchio di centro l'origine e raggio $r = 6$,
- determinare un cerchio di centro l'origine che sia interamente contenuto in A,
- determinare la distanza massima che possono avere due punti P e Q appartenenti ad A.

Soluzione:

Tenuto conto che

$$4(x^2+y^2) \leq 9x^2+4y^2$$

riesce di conseguenza

$$(x,y) \in A \quad \to \quad x^2+y^2 \leq \frac{36}{4} = 9$$

ovvero detto C il cerchio di centro l'origine e raggio $r=3$, $\quad x^2+y^2 \leq 9$ si ha

$$P \in A \quad \to \quad P \in C, \qquad A \subset C$$

Analogamente si ha

$$9x^2+4y^2 \leq 9(x^2+y^2)$$

da cui

$$x^2+y^2 \leq \frac{36}{9} = 4 \quad \to \quad 9(x^2+y^2) \leq 36 \quad \to \quad 9x^2+4y^2 \leq 36$$

In altri termini l'insieme A assegnato contiene il cerchio di centro l'origine e raggio $r_1=2$ ed é contenuto nel cerchio di centro l'origine e raggio $r_2=3$.
Ricordando un minimo di geometria analitica si riconosce che l'insieme A é racchiuso dall'ellisse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, ellisse di semiassi 2 e 3.

Esercizio 9.3. Sia $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

- determinare l'insieme d'esistenza di f,
- determinare il profilo altimetrico relativo alla curva del piano $x+y=1$
- determinare l'insieme del piano $f(x,y) \leq 1$.

Soluzione:

L'insieme d'esistenza della funzione razionale $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ é ovviamente tutto $\mathbb{R}^2$ privato dell'insieme dei punti (x,y) con $x+y=0$, la retta bisettrice del secondo e quarto quadrante, sui quali si annulla il denominatore.
La curva del piano $x+y=1$, la retta per $(1,0)$ e $(0,1)$, ha rappresentazione parametrica

$$x = 1-t, \quad y = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Il profilo altimetrico corrispondente é pertanto la curva dello spazio di equazioni parametriche

$$x = 1-t, \quad y = t, \quad z = 1-2t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

L'insieme del piano in cui é soddisfatta la disuguaglianza

$$\frac{x-y}{x+y} - 1 \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x-y-x-y}{x+y} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; 2\frac{y}{x+y} \geq 0$$

é unione delle due regioni angolari

$$\{(y \geq 0) \cap (x+y > 0)\} \;\cup\; \{y \leq 0) \cap (x+y < 0)\}$$

Esercizio 9.4. Sia $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}$

- riconoscere che si tratta di una funzione radiale,
- determinare il profilo altimetrico relativo alla curva del piano $x^2+y^2=1$
- determinare l'insieme del piano $\dfrac{1}{2} \le f(x,y) \le 1$.

Soluzione:

Indicata con $\rho^2 = x^2+y^2$ la distanza al quadrato si ha

$$\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2} = \frac{\rho^2}{1+\rho^2}$$

da cui si riconosce che i valori della funzione $f(x,y)$ dipendono esclusivamente dalla distanza del punto (x,y) dall'origine, si riconosce cioé che f é una *funzione radiale*.
Sulla curva $x^2+y^2=1$, la circonferenza di centro l'origine e raggio $\rho=1$ la funzione f prende sempre il valore $\frac{1}{2}$: la curva $x^2+y^2=1$ é pertanto la curva di livello $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2} \le f(x,y) \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \le \frac{\rho^2}{1+\rho^2} \le 1$$

Le due condizioni corrispondono a

$$\begin{cases} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\rho^2 \le \rho^2 \\ \rho^2 \le 1+\rho^2 \end{cases} \quad \to \quad \rho^2 \ge 1$$

Le due disuguaglianze sono pertanto soddisfatte per $x^2+y^2 \ge 1$.

Esercizio 9.5. Siano $f(x,y) = 3x+2y+1$ e $g(x,y) = x^2-4y^2$

- determinare gli insiemi di livello $f(x,y)=1$ e $g(x,y)=1$,
- determinare i profili altimetrici di f e di g relativi alla curva del piano $x=\cos(\vartheta),\ y=\sin(\vartheta),\ \vartheta \in [0,2\pi]$,

Soluzione:

$$f(x,y) = 3x+2y+1 = 1 \quad \to \quad 3x+2y=0$$

Si tratta di una retta per l'origine, la retta $y = -\frac{3}{2}\,x$.

$$g(x,y) = x^2-4y^2 = 1 \quad \to \quad x^2 + \frac{y^2}{(\frac{1}{2})^2} = 1$$

Si tratta dell'ellisse di centro l'origine e semiassi $a=1$ e $b=\frac{1}{2}$.
La curva del piano $x=\cos(\vartheta),\ y=\sin(\vartheta),\ \vartheta \in [0,2\pi]$ é la circonferenza di centro l'origine e raggio $r=1$: i corrispondenti profili altimetrici

- relativamente ad $f(x,y) = 3x+2y+1$:
  $x=\cos(\vartheta),\ y=\sin(\vartheta),\ z=3\cos(\vartheta)+2\sin(\vartheta)+1\ \ \vartheta \in [0,2\pi]$

- relativamente a $g(x,y) = x^2 - 4y^2$:
  $x = \cos(\vartheta),\ y = \sin(\vartheta),\ z = \cos^2(\vartheta) - 4\sin^2(\vartheta)\ \ \vartheta \in [0, 2\pi]$

Si noti che il profilo altimetrico di f corrisponde alla sezione del cilindro di asse l'asse z e raggio $r = 1$ con il piano obliquo $z = 3x + 2y + 1$: ricordando la genesi delle coniche come sezioni piane di un cono (o di un cilindro) si ha l'idea della curva che si ottiene, un'ellisse sul piano sezionante.

Esercizio 9.6. Sia $f(x,y) = (1 - x^2 - y^2)^2$

- esaminare se $f(x,y)$ é limitata inferiormente,
- disegnare i grafici delle funzioni di una variabile $f(t,0)$ e $f(t,t)$
- determinare le linee di livello $f(x,y) = 4$ e $f(x,y) = 1$,
- determinare i punti stazionari e riconoscere quali siano punti di minimo, di massimo, di sella.

Soluzione:

$f(x,y)$ é un quadrato, quindi é non negativa: quindi é limitata inferiormente.

$$f(t,0) = (1-t^2)^2 = t^4 - 2t^2 + 1, \quad f(t,t) = (1-2t^2)^2 = 4t^4 - 4t^2 + 1$$

$$f(x,y) = (1-x^2-y^2)^2 = 4 \quad \to \quad 1 - x^2 - y^2 = -2 \quad \to \quad x^2 + y^2 = 3$$

Si tratta di una circonferenza di centro l'origine e raggio $r = \sqrt{3}$

$$f(x,y) = (1-x^2-y^2)^2 = 1 \quad \to \quad 1 - x^2 - y^2 = \pm 1 \quad \to \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Si tratta dell'origine e della circonferenza di centra l'origine e raggio $r = \sqrt{2}$.

Punti stazionari:

$$\begin{cases} f_x(x,y) & = -4x\left(-x^2 - y^2 + 1\right) & = 0 \\ \\ f_y(x,y) & = -4y\left(-x^2 - y^2 + 1\right) & = 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} (0,0) \\ \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Si tratta dell'origine e di tutti i punti della circonferenza di centro l'origine e raggio $r = 1$.
Per classificare tali punti stazionari si può:

- servirsi del polinomio di Taylor di ordine $n = 2$ ed esaminare se la parte quadratica sia di segno costante (massimi e minimi) o di segno variabile (selle)
- oppure si può riconoscere che $f(x,y)$ é la funzione radiale $(1-\rho^2)^2$ per la quale ovviamente l'origine é un punto di massimo e i punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ sono punti di minimo.

Il polinomio di Taylor in $(0,0)$ di ordine $n = 2$:

$$T_2(x,y) = 1 + \frac{1}{2}\left\{f_{xx}(0,0) + 2f_{xy}(0,0)\,xy + f_{yy}(0,0)\right\} = 1 - 2x^2 - 2y^2$$

la parte quadratica é negativa, quindi si conferma che nell'origine c'é un punto di massimo.
Il polinomio di Taylor di ordine $n = 2$ sui punti (x_0, y_0) della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$:

$$T_2(x,y) = \frac{8}{2}\left\{x_0^2(x-x_0)^2 + 2x_0y_0(x-x_0)(y-y_0) + y_0^2(y-y_0)^2\right\} =$$

$$= 4\left(x_0(x-x_0) + y_0(y-y_0)\right)^2$$

la parte quadratica, un quadrato, é positiva: quindi i punti (x_0, y_0) della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ sono punti di minimo.

Si noti che se (x_0, y_0) appartiene alla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ i valori di f in un intorno di tale punto sono

$$f(x,y) \geq f(x_0, y_0) = 0$$

ma non riesce in alcun intorno soddisfatta la disuguaglianza stretta $f(x,y) > 0$.
Infatti sull'arco di circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ passante per (x_0, y_0) e contenuto nell'intorno scelto la funzione f continua a valere 0.

Esercizio 9.7. Sia $\mathscr{C}$ il profilo altimetrico relativo alla funzione $f(x,y) = x^2 + 3y^2$ e alla curva piana $x = \cos(\vartheta),\ y = \sin(\vartheta),\ \vartheta \in [0, 2\pi]$

- determinare il minimo e il massimo di $f(x,y)$ nel dominio $A : (x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1$,
- determinare la quota minima e la quota massima dei punti di $\mathscr{C}$,
- determinare un dominio D rettangolare dello spazio $\mathbb{R}^3$ che contenga $\mathscr{C}$ al suo interno.

Soluzione:

La funzione $A : (x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1$ é positiva, ha un solo punto stazionario, l'origine, in cui riesce $f(0,0) = 0$: pertanto il minimo é zero.
Il profilo altimetrico relativa ad f e alla curva $x = \cos(\vartheta),\ y = \sin(\vartheta),\ \vartheta \in [0, 2\pi]$, la circonferenza di centro l'origine e raggio $r = 1$, é

$$x = \cos(\vartheta),\ y = \sin(\vartheta),\ z = \cos^2(\vartheta) + 3\sin^2(\vartheta), \quad \vartheta \in [0, 2\pi]$$

Tenuto conto che

$$\cos^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta) = 1 \quad \rightarrow \quad z = 1 + 2\sin^2(\vartheta)$$

Si riconosce facilmente che

$$1 \leq z \leq 3$$

valori che rappresentano rispettivamente la quota minima e la quota massima del profilo altimetrico.
É evidente che i valori di f in A vanno dal valore zero assunto nell'origine al valore 3 assunto nei due punti $(0,1)$ e $(0,-1)$: pertanto

- il minimo di f in A vale zero,
- il massimo di f in A vale 3.

Tenuto conto che il profilo altimetrico $\mathscr{C}$ é contenuto nel cilindro di asse l'asse verticale z e raggio $r = 1$ e che le quote dei suoi punti variano tra 1 e 3 é chiaro che detto D il dominio rettangolare

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1, \quad 1 \leq z \leq 3$$

riesce

$$\mathscr{C} \subset D$$

Esercizio 9.8. Sia $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2 + 5x + 6y + 7$

- determinare le derivate parziali prime f'_x e f'_y,
- determinare le derivate parziali seconde $f''_{x,x}$, $f''_{x,y}$, $f''_{y,y}$,
- determinare il gradiente nell'origine.

Soluzione:

$$f(x,y) = 3x^2 + 4y^2 + 5x + 6y + 7 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} f_x(x,y) & = 6x + 5 \\ f_y(x,y) & = 8y + 6 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} f_{xx}(x,y) & = 6 \\ f_{xy}(x,y) & = 0 \\ f_{yy}(x,y) & = 8 \end{cases}$$

$$\nabla f(0,0) = \{5,\ 6\}$$

Il vettore $\nabla f(0,0)$ calcolato ha la proprietá di indicare la direzione lungo la quale $f(x,y)$ aumenta piú rapidamente.
Ad esempio spostandosi da $(0,0)$ a $(5,\ 6)$ si fa un tratto lungo $\sqrt{25+36} \approx 7.8$ e si passa dalla quota zero a $f(5,6) = 287$, facendo invece un percorso di uguale lunghezza per esempio nella direzione positiva dell'asse x si sarebbe raggiunto il punto $(7.8,\ 0)$ nel quale la funzione vale circa 228, meno del 287 raggiunto muovendosi nella direzione del gradiente.

Esercizio 9.9. Sia $f(x,y) = \dfrac{3x^2 + 4y^2}{1 + x^2 + y^2}$

- determinare le derivate parziali prime nell'origine.
- determinare la derivata della funzione di t

$$F(t) = f\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

- verificare le relazioni

$$F'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} f_x(0,0) + \frac{1}{\sqrt{2}} f_y(0,0), \quad F'(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} f_x(1,1) + \frac{1}{\sqrt{2}} f_y(1,1)$$

Soluzione:

$$f(x,y) = \frac{3x^2+4y^2}{1+x^2+y^2} \quad \to \quad \begin{cases} f_x(x,y) & = \frac{6x}{x^2+y^2+1} - \frac{2x\left(3x^2+4y^2\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^2} \\ \\ f_y(x,y) & = \frac{8y}{x^2+y^2+1} - \frac{2y\left(3x^2+4y^2\right)}{\left(x^2+y^2+1\right)^2} \end{cases}$$

Ne segue $f_x(0,0)=0, \quad f_y(0,0)=0$.

Si noti come la nota espressione della serie geometrica $\dfrac{1}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$ suggerisca per $(x,y) \approx (0,0)$

$$\frac{1}{1+x^2+y^2} \approx 1-(x^2+y^2)+\ldots.$$

e quindi

$$\frac{3x^2+4y^2}{1+x^2+y^2} \approx (3x^2+4y^2)-(3x^2+4y^2)(x^2+y^2)+\ldots$$

L'espressione a secondo membro lascia chiaramente intendere:

- $f(0,0)=0$
- $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$
- Polinomio di Taylor $T_2(x,y)=3x^2+4y^2$

$$F(t) = \frac{3\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+4\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{2}\frac{7t^2}{1+t^2} \quad \to \quad F'(t) = \frac{7t}{t^2+1} - \frac{7t^3}{(t^2+1)^2}$$

Ne segue

$$F'(0)=0, \qquad F'(\sqrt{2}) = \frac{14}{9\sqrt{2}}$$

Stante l'annullamento nell'origine delle due derivate parziali prime, riesce ovviamente nulla anche l'espressione $\dfrac{1}{\sqrt{2}} f_x(0,0) + \dfrac{1}{\sqrt{2}} f_y(0,0)$ e quindi

$$F'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} f_x(0,0) + \frac{1}{\sqrt{2}} f_y(0,0)$$

Considerato che

$$f_x(1,1) = \frac{4}{9} \qquad f_y(1,1) = \frac{10}{9}$$

si ha, anche,

$$F'(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} f_x(1,1) + \frac{1}{\sqrt{2}} f_y(1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{9}+\frac{10}{9}\right) = \frac{14}{9\sqrt{2}}$$

Esercizio 9.10. Sia $f(x,y) = (x^2+y^2)\cdot(1-x^2-y^2)$

- determinare il gradiente $\nabla f(x,y)$,
- determinare i punti stazionari,
- determinare il piano tangente in ciascun punto stazionario.

Soluzione:

$$\nabla f(x,y) = \left\{2x\left(-x^2-y^2+1\right)-2x\left(x^2+y^2\right), 2y\left(-x^2-y^2+1\right)-2y\left(x^2+y^2\right)\right\}$$

Punti stazionari:

$$\left\{\begin{array}{ll|ll} f_x(x,y) & = -4x^3-4xy^2+2x \quad = 0 & 2x(1-2x^2-2y^2) & = 0 \\ f_y(x,y) & = -4x^2y-4y^3+2y \quad = 0 & 2y(1-2x^2-2y^2) & = 0 \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2 = \frac{1}{2} \\ (0,0) \end{array}\right.$$

In ciascun punto stazionario (x_0, y_0) il piano tangente é il piano orizzontale

$$z = f(x_0, y_0)$$

pertanto sui punti della circonferenza $x^2+y^2 = \frac{1}{2}$ il piano tangente é $z = \frac{1}{4}$, mentre il piano tangente in $(0,0)$ é $z = 0$.

Esercizio 9.11. Siano $A = (1,0,0)$, $B = (0,2,0)$, $C = (0,0,3)$, detta $z = f(x,y)$ l'equazione del piano passante per tali punti

- determinare $f(x,y)$,
- determinare il gradiente $\nabla f(x,y)$,
- determinare la derivata della funzione di t $F(t) = f(1-t, 2t)$.

Soluzione:

Il piano passante per i tre punti assegnati é

$$x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$$

pertanto

$$f(x,y) = 3(1-x-\frac{y}{2})$$

Il gradiente é

$$\nabla f(x,y) = \left\{-3, \ -\frac{3}{2}\right\}$$

La funzione $F(t)$:

$$F(t) = 3(1-(1-t)-\frac{2t}{2}) \equiv 0$$

In altri termini la curva $(1-t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$ é la linea di livello zero.

Esercizio 9.12. Sia $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$

- esaminare se $f(x,y)$ é limitata,
- determinare il gradiente $\nabla f(x,y)$,e quindi determinare i punti stazionari,
- classificare i punti stazionari riconoscendo quali siano punti di minimo, di massimo, di sella.

Soluzione:

La funzione $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$ é di tipo radiale: posto $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ si ha

$$f(x,y) = \rho^2 e^{-\rho^2} = \frac{\rho^2}{e^{\rho^2}}$$

Tenuto presente che l'esponenziale prevale sul quadrato si ha

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{\rho^2}{e^{\rho^2}} = 0$$

e quindi $\rho^2 e^{-\rho^2}$ é limitata in $\mathbb{R}$, e quindi $f(x,y)$ é limitata in $\mathbb{R}^2$.
Il gradiente

$$\nabla f(x,y) = \left\{2xe^{-x^2-y^2} - 2xe^{-x^2-y^2}\left(x^2+y^2\right), 2ye^{-x^2-y^2} - 2ye^{-x^2-y^2}\left(x^2+y^2\right)\right\}$$

Punti stazionari

$$\begin{cases} f_x(x,y) & = -2xe^{-x^2-y^2}\left(x^2+y^2-1\right) & = 0 \\ f_y(x,y) & = -2ye^{-x^2-y^2}\left(x^2+y^2-1\right) & = 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ (0,0) \end{cases}$$

Tenuto conto che $(x,y) \neq (0,0) \quad \to \quad f(x,y) > 0$ si riconosce che il punto stazionario $(0,0)$, in cui $f(0,0) = 0$ é punto di minimo. Tenuto conto che

$$\left(\rho^2 e^{-\rho^2}\right)' = -2e^{-\rho^2}\rho\left(\rho^2-1\right)$$

derivata positiva per $0 < \rho < 1$ e negativa per $1 < \rho$ si riconosce che per $\rho = 1$ si ha il massimo. In altri termini i punti stazionari $x^2+y^2 = 1$ sono tutti punti di massimo.

Esercizio 9.13. Sia $f(x,y) = (x^2+y^2-1)^3$

- esaminare se $f(x,y)$ é limitata inferiormente,
- determinare i punti stazionari,
- classificare i punti stazionari riconoscendo quali siano punti di minimo, di massimo, di sella.

Soluzione:

La funzione f assegnata é radiale: $f(x,y) = (\rho^2-1)^3$.

$f(x,y) = (x^2+y^2-1)^3 \geq (-1)^3 = -1$ quindi f é limitata inferiormente e, anzi, $f(0,0) = -1$ é il minimo.
Punti stazionari:

$$\begin{cases} f_x(x,y) & = 3(x^2+y^2-1)^2(2x) & = 0 \\ f_y(x,y) & = 3(x^2+y^2-1)^2(2y) & = 0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ (0,0) = 0 \end{cases}$$

É stato giá riconosciuto che il punto stazionario $(0,0)$ é punto di minimo: per quanto concerne i punti della circonferenza $x^2+y^2 = 1$ tenuto conto che

$$\left((\rho^2-1)^3\right)' = 6\rho(\rho^2-1)^2 \geq 0$$

si riconosce che $(\rho^2-1)^3$ é crescente (per $\rho = 1$ si ha un flesso).

Quindi i punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ sono punti di sella per $f(x,y)$.

Esercizio 9.14. Determinare i polinomi di Taylor di punto iniziale $(0,0)$ e ordine $n = 2$ per le funzioni

$$e^x \cdot \cos(y), \quad \sin(x+y), \quad \ln(1+x^2+y^2)$$

Soluzione:

$$\begin{cases} e^x \cdot \cos(y) & \to \quad T_2(x,y) = 1 + x + \frac{1}{2}\left\{x^2 - y^2\right\} \\ \sin(x+y) & \to \quad T_2(x,y) = x + y \\ \ln(1+x^2+y^2) & \to \quad T_2(x,y) = x^2 + y^2 \end{cases}$$

CAPITOLO 3

Le prove in itinere

1. Primo esonero

Istituzioni di Matematica I (Corso di laurea in **Chimica**)

Prova del 28 ottobre 2015

1. L'insieme $\mathbb{E} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{8}{1+x^2} < 3 \right\}$

1A	è un intervallo;	V	**F**
1B	contiene il numero 0;	V	**F**
1C	è inferiormente limitato;	V	**F**
1D	è superiormente limitato.	V	**F**

2. La successione $a_n = n^2 - 3n - 4$

2A	è monotona;	V	**F**
2B	ha limite finito per $n \to +\infty$;	V	**F**
2C	è limitata inferiormente;	**V**	F
2D	è limitata superiormente.	V	**F**

3. La funzione $f(x) = \dfrac{3x-2}{5x-3}$

3A	è definita solo per ogni $x \neq 3/5$;	**V**	F
3B	è razionale, in quanto rapporto di polinomi;	**V**	F
3C	è pari;	V	**F**
3D	si azzera se e solo se $x = 2/3$.	**V**	F

4. La funzione $f(x) = 1000 + 100^x$

4A	è tale che $f(1/2) = 1010$;	**V**	F
4B	è crescente;	**V**	F
4C	ha insieme immagine contenuto in $(1000, +\infty)$;	**V**	F

4D	è limitata superiormente.	V	**F**

5. Per $n = 1, 2, \dots$, sia $a_n = 1/n^2$ e sia b_n tale che $b_n > 0$ per ogni n e b_n converge a 4 per $n \to +\infty$.

5A	$a_n b_n \to 0$ per $n \to +\infty$;	**V**	F
5B	$a_n + b_n \to 0$ per $n \to +\infty$;	V	**F**
5C	$\dfrac{4a_n - 3b_n}{a_n + b_n} \to -3$ per $n \to +\infty$;	**V**	F
5D	$\sin(a_n)$ è limitata.	**V**	F

6. La funzione $f(x) = 3|x| + x$

6A	è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$;	**V**	F
6B	$f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;	V	**F**
6C	si ha $\lvert f(x) \rvert = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;	**V**	F
6D	è pari.	V	**F**

7. La funzione $f(x) = \cos(3x) + \cos(2x)$

7A	è definita solo per $x \in [0, 2\pi]$;	V	**F**
7B	è pari;	**V**	F
7C	è periodica;	**V**	F
7D	è limitata.	**V**	F

8. Per $n = 0, 1, 2, \dots$, sia $a_n = \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{6^n}$.

8A	$a_n \to 0$ per $n \to +\infty$;	**V**	F
8B	la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge a $\frac{4}{5}$;	**V**	F
8C	$s_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ è crescente;	**V**	F
8D	si ha $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)^n$.	V	**F**

2. Secondo esonero

Istituzioni di Matematica I (Corso di laurea in **Chimica**)

Prova in itinere – 2 dicembre 2015 – **Parte 1**

1. Sia $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = (2+3x)e^{-x}$ con $I = (0, +\infty)$.

1A	La funzione f è monotona.	V	**F**
1B	Il punto $x = 1/3$ è un punto stazionario di f.	**V**	F
1C	La funzione f tende a 0 per $x \to +\infty$.	**V**	F
1D	La funzione f ha minimo assoluto.	V	**F**

2. Dire se la funzione f tende a 0 per $x \to a$ nei casi seguenti:

2A	$a = +\infty,\ f(x) = \dfrac{7-2\sin x}{5\pi + 3x^2};$	**V**	F
2B	$a = 0,\ f(x) = \dfrac{\arctan(4x)}{1+e^{5x}};$	**V**	F
2C	$a = 0,\ f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{(1+x)\sin(5x)};$	V	**F**
2D	$a = 1,\ f(x) = \dfrac{e^{4x}-1}{3x}.$	V	**F**

3. Sia $f(x) = \dfrac{2+\ln x}{4+\ln x}$.

3A	La funzione f è limitata.	V	**F**
3B	La funzione f tende a 1 per $x \to +\infty$.	**V**	F
3C	La funzione f è definita per ogni $x > 0$.	V	**F**
3D	Il polinomio di Taylor di ordine 1 per la funzione f centrato in $x_0 = 1$ è $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8}(x-1)$.	**V**	F

4. Sia $f(x) = \begin{cases} 1-4x & \text{se } x < 0 \\ 1+\sin(5x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

4A	$f(x) \leq 2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.	V	**F**
4B	$f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.	**V**	F
4C	La funzione f è derivabile in $\mathbb{R}$.	V	**F**
4D	L'equazione $f(x) = 3$ ha soluzione in $[-1, \pi]$.	**V**	F

5. Sia $f(x) = (x^2-4)e^{-x}$. *(min 0 punti, max 8 punti)*

5A Trovare i punti stazionari della funzione f.

$$f'(x) = e^{-x}\left(-x^2+2x+4\right) = 0 \ \to \ \left\{\left\{x \to 1-\sqrt{5}\right\}, \left\{x \to 1+\sqrt{5}\right\}\right\}$$

5B Stabilire quali dei punti stazionari sono di massimo relativo e quali di minimo relativo per f.

Il segno della derivata prima negli intervalli determinati dai punti stazionari permette di distinguere:

$$\left\{\left\{minimo\,relativo : x \to 1-\sqrt{5}\right\}, \left\{Massimo\,relativo : x \to 1+\sqrt{5}\right\}\right\}$$

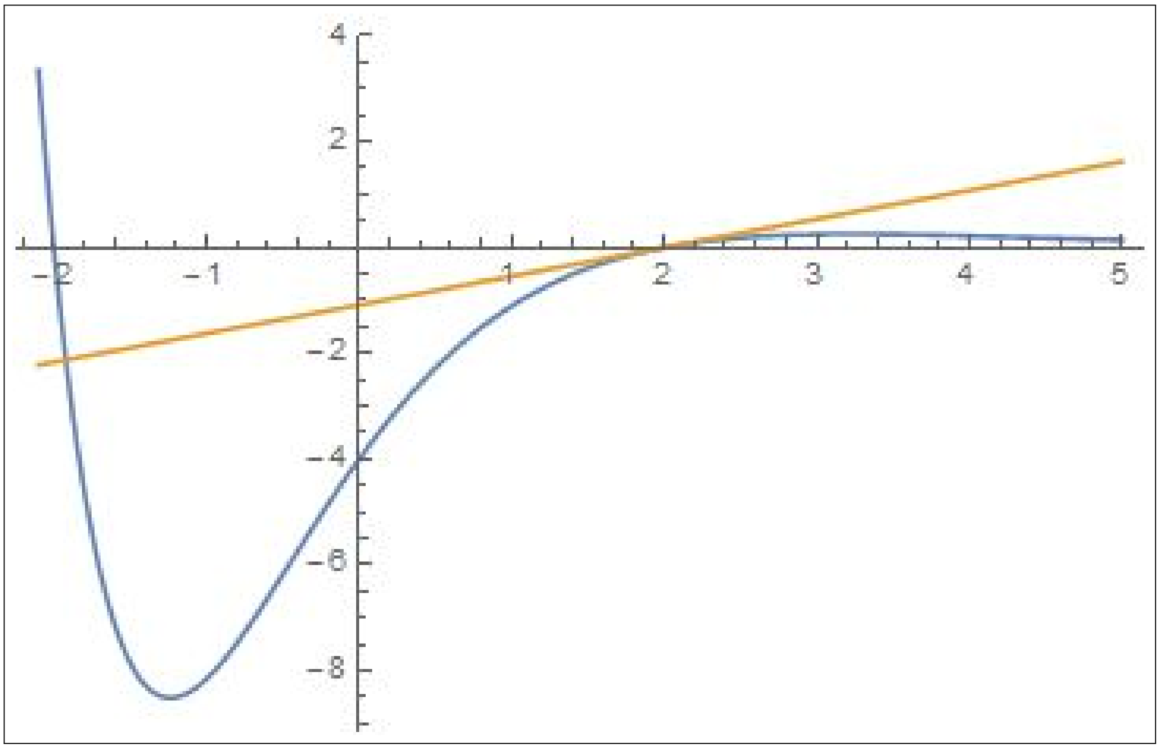


FIGURA 1. $f(x) = (x^2-4)\,e^{-x}$

5C Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione f nel punto $(2, f(2))$.

$$y = f(2) + f'(2) * (x-2) \quad \to \quad y = \frac{4(x-2)}{e^2}$$

5D Trovare tutti i punti di minimo assoluto della funzione $g(x) := |f(x)|$.
Il modulo di qualunque funzione produce valori non negativi: quindi i punti in cui $f(x) = 0$ sono sempre punti di minimo assoluto per $|f(x)|$.

$$f(x) = 0 \to x_1 = -2,\, x_2 = 2$$

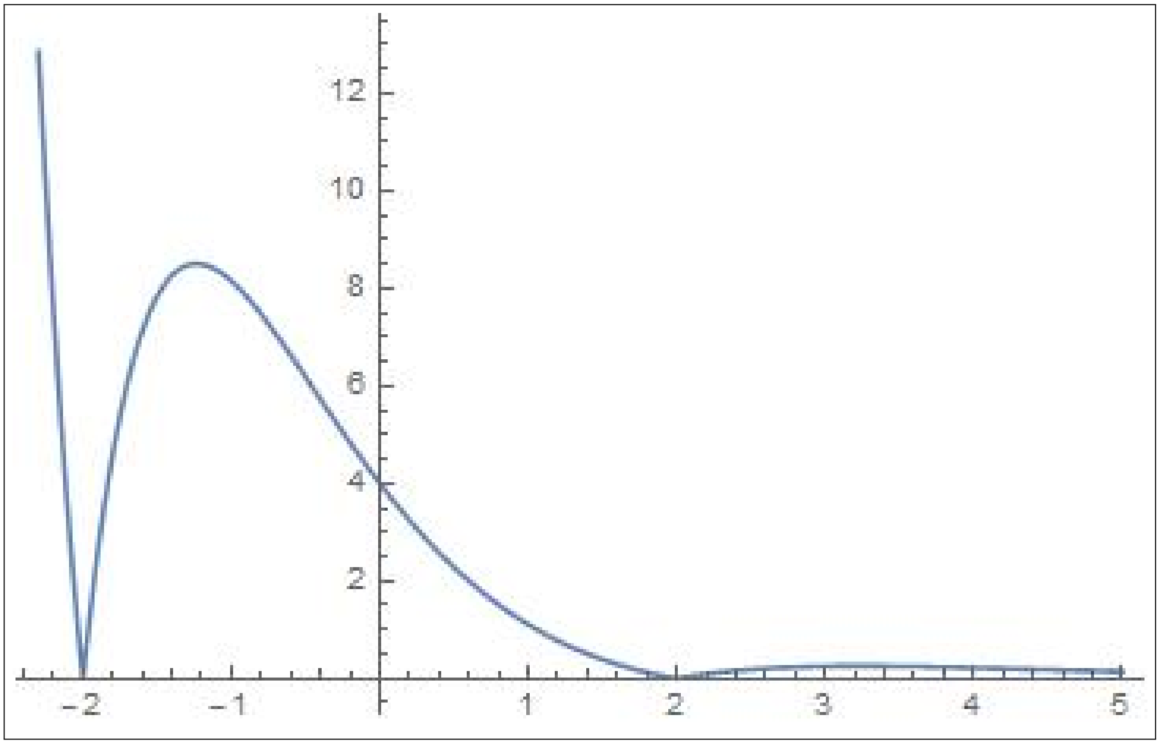


FIGURA 2. $|f(x)| = |x^2 - 4|\, e^{-x}$

6. Siano $f(x) = \sin(2x)$ e $g(x) = 2x - 5x^2 + 4x^3$. *(min 0 punti, max 8 punti)*

6A Determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 per la funzione f centrato in $x_0 = 0$. La richiesta di *Polinomio di Taylor* significa che si deve rispondere con un polinomio, quindi niente aggiunte di resti espliciti o rappresentati con simboli di Landau.

$$P_f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2} f''(0)(x-0)^2 \quad \to \quad P_f(x) = 2x$$

6B Determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 per la funzione g centrato in $x_0 = 0$.

$$P_g(x) = g(0) + g'(0)(x-0) + \frac{1}{2} g''(0)(x-0)^2 \quad \to \quad P_g(x) = 2x - 5x^2$$

6C Calcolare il limite di $f(x)/g(x)$ per $x \to 0$.
Il calcolo può essere eseguito in due modi:

- servendosi dei polinomi di Taylor giá calcolati,
- ricorrendo alla formula di de l'Hôpital

$$\text{Taylor: } \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{2x - 5x^2} = 1$$

$$\text{Hôpital: } \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x)}{2 - 10x + 12x^2} = 1$$

6D Calcolare il limite di $\{f(x) - g(x)\}/x^2$ per $x \to 0$.
Come nel caso precedente si possono usare i polinomi di Taylor o la formula di de l'Hôpital, pervenendo allo stesso risultato

$$\text{Taylor: } \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - g(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^2}{x^2} = 5$$

$$\text{Hôpital: } \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - g'(x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{f''(x) - g''(x)}{2} = 5$$

3. Terzo esonero

Istituzioni di Matematica I (Corso di laurea in **Chimica**)

Prova in itinere – 13 gennaio 2016

1. Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $F(x) = 5x + \int_0^x \sin(20t^2)dt$.

- **1A** La funzione F è derivabile in $\mathbb{R}$ e si ha $F'(x) = 5 + \sin(20x^2)$. **V** F
- **1B** Il polinomio di Taylor di ordine 2 per la funzione F centrato in $x_0 = 0$ è nullo. V **F**
- **1C** La funzione F è monotona in $\mathbb{R}$. **V** F
- **1D** Vale la disuguaglianza $|F(x) - 5x| \leq |x|$. **V** F

2. Sia $L(y) = y'' + 16y$.

- **2A** Le soluzioni di $L(y) = 0$ tali che $y(0) = 0$ si annullano in $x = \pi/4$. **V** F
- **2B** Tutte le soluzioni dell'equazione omogenea $L(y) = 0$ sono limitate. **V** F
- **2C** La funzione $y = x + \sin(4x)$ è soluzione dell'equazione non omogenea $L(y) = x$. V **F**
- **2D** La soluzione di $L(y) = 0$ con condiz. iniziali $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$ vale 1 per $x = \pi/2$. **V** F

3. Sia $w = i/8$.

- **3A** Indicato con $\overline{w}$ il complesso coniugato di w, vale l'identità $w - \overline{w} = 0$. V **F**
- **3B** La parte reale del numero complesso e^w è $\sin(1/8)$. V **F**
- **3C** Se $z \in \mathbb{C}$ è tale che $z^3 = w$, allora si ha $|z| = 1/2$. **V** F
- **3D** Vale l'identità $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w^n = \frac{8}{8-i}$. **V** F

4. Siano $f(x,y) = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$ e $g(x,y) = e^x \sin y$.

- **4A** Il dominio di definizione D della funzione f è limitato. **V** F
- **4B** Le derivate parziali di g sono $g_x(x,y) = e^x \sin y$, $g_y(x,y) = e^x \cos y$. **V** F
- **4C** Vale l'identità $g_{xx}(x,y) + g_{yy}(x,y) = 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. **V** F
- **4D** L'insieme del piano dove g si annulla è formato da rette verticali. V **F**

5. Siano $f(x) = \dfrac{1}{4(x-5)^3}$, $g(x) = x\sin(2x)$ e $h(x) = \dfrac{1}{25+x^2}$. *(min 0 punti, max 8 punti)*

- **5A** Calcolare tutte le primitive della funzione f.
- **5B** Dire se la funzione f è integrabile nell'intervallo $[4,6]$.
- **5C** Calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_0^{\pi} g(x)\,dx$.
- **5D** Calcolare l'integrale definito $\displaystyle\int_0^{3} h(x)\,dx$.

Soluzione:

- $\int \frac{1}{4(x-5)^3}\,dx = \frac{1}{4}\int (x-5)^{-3}\,dx = -\frac{1}{8}(x-5)^{-2}+c$
- f presenta un asintoto verticale in $x=5$, punto appartenente a $[4,6]$, quindi non é integrabile in $[4,6]$.
- $\int_0^{\pi} x\sin(2x)\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x(\cos(2x))'\,dx = -\frac{1}{2}\,x\cos(2x)|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(2x)dx = -\frac{\pi}{2}$
- $\int_0^3 \frac{1}{25+x^2}\,dx = \frac{1}{5}\int_0^3 \frac{\frac{1}{5}}{1+\left(\frac{x}{5}\right)^2}\,dx = \frac{1}{5}\arctan\left(\frac{x}{5}\right)\Big|_0^3 = \frac{1}{5}\arctan\left(\frac{3}{5}\right)$

6. Sia $L(y) = y'' + y' + \frac{5}{2}y.$ *(min 0 punti, max 8 punti)*

6A Scrivere il polinomio caratteristico dell'equazione e calcolarne le radici.

6B Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea $L(y)=0$.

6C Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea $L(y)=1$.

6D Calcolare la soluzione di $L(y)=0$ con condizioni iniziali $y(0)=2$ e $y'(0)=1$.

Soluzione:

- $p(\lambda) := \lambda^2+\lambda+\frac{5}{2}, \quad p(\lambda)=0 \;\rightarrow\; \begin{cases} \lambda_1 = \frac{-1-3i}{2} \\ \lambda_2 = \frac{-1+3i}{2} \end{cases}$
- $y_0(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x} = e^{-\frac{1}{2}x}\left\{c_1e^{-i\frac{3}{2}x} + c_2e^{+i\frac{3}{2}x}\right\} \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ ovvero, analogamente
  $y_0(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(\alpha\cos(\frac{3}{2}x) + \beta\sin(\frac{3}{2}x)\right) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- Si determina una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $\overline{y}(x) = \frac{2}{5}$, e si aggiunge all'integrale generale dell'omogenea $y(x) = \frac{2}{5} + y_0(x)$
- Deriva dalla risposta 6B scegliendo le costanti in modo da soddisfare le condizioni iniziali richieste
  $y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(2\cos(\frac{3}{2}x) + \frac{4}{3}\sin(\frac{3}{2}x)\right)$

CAPITOLO 4

Esami scritti

1. 26 gennaio 2016

Istituzioni di Matematica I – **Soluzioni**

1. Si consideri la successione $a_n = \dfrac{1+2n^2}{1+n^2}$, $n \in \mathbb{N}$:

1A	$\{a_n\}$ è limitata.	**V**	F
1B	$\{a_n\}$ ha limite $\ell = 1$.	V	**F**
1C	$\{a_n\}$ è crescente.	**V**	F
1D	la successione $b_n = a_n + \dfrac{1}{a_n}$ è convergente.	**V**	F

2. Sia data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+e^x}$

2A	f è limitata.	**V**	F
2B	f è infinitesima per $x \to -\infty$.	V	**F**
2C	f è infinitesima per $x \to 2\pi$.	**V**	F
2D	f è monotona.	V	**F**

3. Sia $f(x) = \dfrac{1}{1+4x^2}$:

3A	si ha $\displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\,dx = \pi/4$.	V	**F**
3B	si ha $\displaystyle\int_0^{1} x\,f(x)\,dx = \frac{\ln(5)}{8}$.	**V**	F
3C	si ha $\displaystyle\int_0^{1} x^2 f(x)\,dx < 1$.	**V**	F
3D	la funzione $F(x) = \displaystyle\int_0^{x} f(t)\,dt$ è crescente.	**V**	F

4. Sia $f(x) = x^2 \cos(x)$

4A	f è una funzione pari.	**V**	F
4B	il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in $x_0 = 0$ è $T = 1 + x^2$.	V	**F**
4C	il minimo di f in $[0,1]$ è zero.	**V**	F
4D	la retta tangente nel punto $x_0 = \pi/2$ è $y = -\dfrac{\pi^2}{4}x$.	V	**F**

5. Sia $L[y] = y'' - 7y' + 12y$. Assegnata l'equazione differenziale $L[y] = 0$, determinare

5A tutte le soluzioni dell'equazione omogenea $L[y] = 0$.

5B tutte le soluzioni dell'equazione omogenea, tali che $y(0) = 1$.

5C la soluzione del problema di Cauchy con dati iniziali $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

5D tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea $L[y] = 1 + x$.

$\boxed{\text{Soluzioni:}}$

- Polinomio caratteristico: $p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 12$: radici: $\quad \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 4$

$$L[y] = 0 \ \rightarrow \ y(x) = c_1 e^{3x} + c_1 e^{4x}, \qquad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- $y(0) = 1 \quad \rightarrow \quad c_1 + c_2 = 1 \quad \rightarrow \quad c_2 = 1 - c_1$

$$y(x) = c_1 e^{3x} + (1 - c_1) e^{4x} \qquad \forall c_1 \in \mathbb{R}$$

- $y'(x) = 3c_1 e^{3x} + 4(1 - c_1) e^{4x} \quad \rightarrow \quad y'(0) = 3c_1 + 4(1 - c_1)$

$$y'(0) = 1 \quad \rightarrow \quad c_1 = 3 \quad \rightarrow \quad y(x) = 3e^{3x} - 2e^{4x}$$

- Una soluzione particolare

$$\overline{y}(x) = A + Bx \quad \rightarrow \quad -7B + 12A + 12Bx = 1 + x \quad \rightarrow \quad \begin{cases} B = \frac{1}{12} \\ \\ A = \frac{19}{144} \end{cases}$$

Tutte le soluzioni

$$y(x) = \frac{19}{144} + \frac{1}{12} x + c_1 e^{3x} + c_1 e^{4x}$$

6. Assegnata la funzione di due variabili $f(x,y) = x^3 + y^2 - 3x$, determinare

6A le derivate parziali prime;

6B i punti dove entrambe le derivati parziali prime si annullano.

6C il polinomio di Taylor di ordine 2 nel punto $P = (-1,0)$;

6D dire se il punto $Q = (1,0)$ è punto di minimo locale per la funzione.

Soluzioni:

- $$f(x,y) = x^3 + y^2 - 3x \quad \to \quad \begin{cases} f_x(x,y) = 3x^2 - 3 \\ \\ f_y(x,y) = 2y \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} f_{xx}(x,y) = 6x \\ f_{xy} = 0 \\ f_{yy}(x,y) = 2 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} 3x^2 - 3 & = 0 \\ \\ 2y & = 0 \end{cases} \quad \to \quad x = \pm 1,\ y = 0$$
- $$T_2(x,y) \quad = \quad f(-1,0) + f_x(-1,0)(x+1) + f_y(-1,0)y +$$
  $$\frac{1}{2}\left\{ f_{xx}(-1,0)(x+1)^2 + 2 f_{xy}(-1,0)(x+1)y + f_{yy}(-1,0)y^2 \right\}$$
  da cui nel punto $(-1,0)$ $\quad T_2(x,y) = 2 - 3(x+1)^2 + y^2$
- Nel punto $Q = (1,0)$ la formula di Taylor è invece
  $$T_2(x,y) = 2 + 3(x+1)^2 + y^2$$
  i due termini di secondo grado rappresentano un contributo positivo e quindi $Q = (1,0)$ è punto di minimo relativo.

2. 23 febbraio 2016

3. 14 giugno 2016

4. 5 luglio 2016

5. 13 settembre 2016