VARIABILE COMPLESSA

PIERO D'ANCONA E VINCENZO NESI

1. Nozioni di base

1.1. $\mathbb{C}$ **come spazio vettoriale.** Richiamiamo rapidamente le nozioni elementari sui numeri complessi $\mathbb{C}$ è semplicemente $\mathbb{R}^2$, l'insieme delle coppie *ordinate* di numeri reali (x, y) (il piano cartesiano), con un'operazione in piú e delle nuove notazioni.

La nuova notazione è la seguente: il vettore $(0, 1)$ si indica anche con i, detta *l'unità immaginaria*, e il vettore (x, y) si scrive anche $z = x + iy = (x, y)$. Le componenti x e y si dicono *parte reale* e *parte immaginaria* di z:

$$z = x + iy, \quad x = \Re z, \quad y = \Im z;$$

la somma di vettori nelle nuove notazioni diventa

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

da cui si vede che $\Re(z_1 + z_2) = \Re(z_1) + \Re(z_2)$ e analogamente per $\Im$. Inoltre il *coniugato* di $z = x + iy$ è definito da $\overline{z} = \overline{x + iy} = x - iy$.

Un numero complesso allora si dice reale se la sua parte immaginaria è zero, e immaginario puro se la sua parte reale è zero.

La nuova operazione è il *prodotto* di numeri complessi:

$$z_1 z_2 = (x + iy_1)(x + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

e in particolare si ha subito $i^2 = i\ i = -1$. Il *modulo* di z è esattamente il modulo del vettore $z = (x, y)$:

$$|z| = |x + iy| = |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e si ha facilmente che $|z|^2 = z\overline{z}$.

Per ogni $z \neq 0$ si può definire il suo *inverso* come l'unico numero w tale che $zw = 1$, ossia

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Quindi possiamo dividere un numero complesso per un altro, se il denominatore è diverso da zero (e naturalmente z/w vuol dire semplicemente $z \cdot 1/w$). In questo modo abbiamo costruito il *corpo dei numeri complessi* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, che è anche dotato di un prodotto scalare e di una metrica.

Un altro modo di individuare i numeri complessi è utilizzando le *coordinate polari* (ρ, θ). La definizione di ρ è molto semplice: dato un numero complesso z, ρ è esattamente il suo modulo $\rho = |z|$. La definizione di θ è piú delicata; esso è l'angolo in radianti formato dall'asse x e dal vettore (x, y) (misurato in radianti a partire dall'asse x). Una definizione precisa è

Date: 9 gennaio 2017.

la seguente: dato $z = x + iy$, è possibile determinare il numero reale θ in modo che

$$\begin{cases} x = \rho \ \cos(\theta) \\ y = \rho \ \sin(\theta) \end{cases}$$

ossia $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$. Quando $z = 0$, qualunque numero reale θ soddisfa le relazioni e diciamo che allora θ non è definito. Anche quando $z \neq 0$ esistono infiniti valori di θ possibili, dato che sin e cos sono funzioni periodiche; tuttavia, se θ è una soluzione, tutte le altre sono date da $\theta + 2k\pi$ per tutti i $k \in \mathbb{Z}$. Questi valori si indicano anche con $\theta = \mathrm{Arg}(z)$ (argomento di z). Naturalmente è opportuno dare una definizione univoca e privilegiare uno soltanto di questo valori che si chiamerà la *determinazione principale dell'argomento* di z e si indica anche con $\arg(z)$; la scelta si fa imponendo che il valore cada in un fissato intervallo semiaperto di lunghezza 2π. Le scelte piú comuni sono $\theta \in [0, 2\pi[$, oppure $\theta \in]-\pi, \pi]$. Dopo aver fissato l'intervallo di determinazione, ogni complesso $z \neq 0$ è individuato in modo unico da una coppia $(\rho, \theta) = (|z|, \arg(z))$ di coordinate polari.

Se introduciamo la notazione

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

per θ reale, possiamo quindi scrivere

$$z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

dove $\rho = |z|$ e $\theta \in \mathrm{Arg}(z)$. È facile verificare che $|e^{i\theta}| = 1$, e che per ogni θ_1, θ_2 si ha

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

Queste relazioni non hanno nulla di magico, infatti la definizione appena data dell'esponenziale di $i\theta$ si può giustificare in vari altri modi equivalenti (ad esempio utilizzando gli sviluppi in serie, o le equazioni differenziali).

Le coordinate polari ci permettono di dare un senso geometrico molto chiaro alle operazioni introdotte all'inizio. Se $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ abbiamo subito

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

il che vuol dire

$$|z_1 z_2| = |z_1|\ |z_2|, \qquad \mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2).$$

(Notare che questa formula non vale per arg: bisogna fare il riporto all'intervallo principale). Analogamente si ha subito, per $z = \rho e^{i\theta}$,

$$\overline{z} = \rho e^{-i\theta} \qquad \Longrightarrow \qquad |\overline{z}| = |z|, \quad \mathrm{Arg}(\overline{z}) = -\mathrm{Arg}(z),$$

e quindi per l'inverso di z

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\overline{\rho e^{i\theta}}}{\rho^2} = \frac{1}{\rho}e^{-i\theta} \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}, \quad \mathrm{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\mathrm{Arg}(z)$$

e per il rapporto

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}(z_1) - \mathrm{Arg}(z_2).$$

I numeri complessi furono introdotti per poter estrarre radici di qualunque numero reale; ma il risultato fu superiore alle aspettative, perché di radici non ce n'è mai una soltanto. Se $n \geq 1$ è un intero, trovare le radici n-esime di z vuol dire trovare tutte le soluzioni w dell'equazione $w^n = z$ ossia, scrivendo in coordinate polari $w = re^{i\phi}$ e $z = \rho e^{i\theta}$,

$$r^n e^{in\phi} = \rho e^{i\theta}.$$

Uguagliando moduli e argomenti otteniamo subito che $r = \sqrt[n]{\rho}$ nel senso della radice n-esima (positiva) di numeri reali positivi. Per l'argomento abbiamo naturalmente la solita indeterminazione che riportata all'intervallo principale (ad esempio $[0, 2\pi[$) fornisce n possibilità distinte:

$$\phi = \frac{\theta}{n}, \frac{\theta + \pi}{n}, \ldots, \frac{\theta + (n-1)\pi}{n}.$$

Riassumendo, abbiamo n radici n-esime distinte

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{\rho}\ e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)} : 0 \leq k \leq n-1 \right\}$$

e questa si chiama la *formula di De Moivre* (1722).

1.2. **Qualche osservazione.** La prima equazione che si incontra negli studi superiori è quella di primo grado $a\,x + b = 0$. Per essere effettivamente di primo grado si deve avere $a \neq 0$ e quindi si può dividere per a. Dividendo per a si ottime l'equazione in forma "canonica" $x + k = 0$ dove $k = \frac{b}{a}$. Ora che conosciamo i numeri complessi, potremmo anche risolvere l'equazione $a\,z + b = 0$ con tutti i termini complessi. Ovviamente in questo caso possiamo trovare che la soluzione sia complessa. Ad esempio $z - i = 0$.

La seconda equazione è quella di secondo grado che scriviamo nella forma canonica $x^2 + b\,x + c = 0$. Al contrario di quelle di primo grado, per le equazioni di secondo grado può accadere che anche se tutti i coefficienti b e c in questo caso, sono reali, le soluzioni non lo sono. Ad esempio $x^2 + 1 = 0$ ammette soltanto le due soluzioni i e meno i. Tuttavia la somma ed il prodotto delle radici sono sempre reali se i coefficienti dell'equazione sono tutti reali. In questo caso in fatto $i + (-i) = 0$ e $i\,(-i) = 1$. Questo è un fatto completamente generale che è facile da dimostrare. Prima di farlo ecco alcune conseguenze. Siano $z_1, z_2, \ldots, z_n$ le radici di $z^n = q$ dove q è un numero reale. Allora la somma ed il prodotto delle n radici è un numero reale.

Lemma 1.1. *Sia* $P = P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ *con* $a_n \neq 0$. *Assumiamo che* $a_i \in \mathbb{R}$ *per ogni* i. *Allora, se* w *è una radice di* $P(z) = 0$, *anche* $\overline{w}$ *è una radice.*

Corollario 1.2. *Sia* $P = P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ *con* $a_n \neq 0$. *Assumiamo che* $a_i \in \mathbb{R}$ *per ogni* i.

$$\sum_{i=1}^n z_i \in \mathbb{R}, \quad \prod_{i=1}^n z_i \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Per dimostrare il lemma, si deve mostrare che $P(w) = 0$ implica $P(\overline{w}) = 0$. Si osservi che se $w \in \mathbb{R}$ l'affermazione è vera ma ovvia perché $\overline{w} = w$ in quel caso.

Procediamo con la verifica ricordando che per definizione, sia ha $P(w) = \sum_{i=0}^{n} a_i w^i$ e per ipotesi $P(w) = 0$.

$$P(\overline{w}) = \sum_{i=0}^{n} a_i (\overline{w})^i = \sum_{i=0}^{n} \overline{a}_i (\overline{w})^i = \sum_{i=0}^{n} \overline{a}_i \overline{w^i} = \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i\, w^i} = \overline{P(w)} = \overline{0} = 0.$$

La prima uguaglianza è la definizione di P, la seconda usa il fatto che $a_i \in \mathbb{R}$ e quindi $\overline{a_i} = a_i$. La terza usa il fatto che il coniugio del prodotto è uguale al prodotto dei coniugi: $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$, quindi, in particolare $\overline{w^2} = (\overline{w})^2$ e quindi $\overline{w^i} = (\overline{w})^i$ per ogni i. La quarta usa il fatto che il coniugio della somma è uguale alla somma dei coniugi: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ e quindi il coniugio della somma di $n+1$ termini è la somma dei coniugi: $\overline{\sum_{i=0}^{n} z_i} = \sum_{i=0}^{n} \overline{z_i}$. La quinta disuguaglianza è la definizione di $\overline{P(w)}$ e la sesta segue perché $P(w) = 0$ per ipotesi.

Il corollario si dimostra osservando che delle n radici, ve ne possono essere $2k$ non reali, con $2k \leq n$. Ognuna delle k coppie, è deformata da z_j e $\overline{z_j}$. Quindi tale coppia contribuisce alla somma delle radici con $2\,\Re\, z_j \in \mathbb{R}$ e al prodotto delle radici con $z_j\,\overline{z_j} = |z_j|^2 \in \mathbb{R}$.

Proposizione 1.3. *Sia* $P(z) \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$ *con* $a_n \neq 0$ *e siano* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *le radici dell'equazione* $P(z) = 0$. *Allora si hanno le seguenti identità*

$$a_0 = \prod_{i=0}^{n} z_i, \quad a_{n-1} = \sum_{i=0}^{n} z_i$$

.

Esempio 1.1. Per trovare la somma ed il prodotto delle radici di $z^{23} = 14$ basta scrivere l'equazione nella forma $z^{23} - 14 = 0$ ed osservare che $a_0 = -14$, mentre $a_{n-1} = a_{22} = 0$.

Esercizio 1.1. Sia $P(z) = z^3 + 13z^2 + 14z - 3$ e siano z_1, z_2, z_3, le radici di $P(z) = 0$. Calcolare:

$$z_1 + z_2 + z_3, \quad z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1, \quad z_1 z_2 z_3.$$

Si suggerisce di usare l'identità

$$z^3 + 13z^2 + 14z - 3 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3).$$

Esercizio 1.2. Trovare le 8 radici delle seguenti equazioni

$$z^8 = 2^8, \quad z^8 = -2^8, \quad z^8 = i\, 2^8, \quad z^8 = -iz^8.$$