ESAME ORALE!

VINCENZO NESI
25 NOVEMBRE 2016

1. Introduzione

Tutte le informazioni qui contenute possono essere utili esclusivamente per affrontare l'esame di Istituzione di Matematica nel Corso di Studio triennale di Chimica, per il canale (F-N) nell'a.a 2016-2017. Codificare l'esame orale è molto più difficile che codificare l'esame scritto. Quindi, mentre per gli scritti e gli esoneri i docenti del corso si sono coordinati ferreamente per avere lo stesso tipo di prove, per gli orali questo è impossibile e, forse, nemmeno auspicabile.

2. Finalità dell'esame orale

L'esame orale è una tradizione consolidata e, a parere di chi scrive, spesso porta ad ingiustizie clamorose. La più grande fonte di tali ingiustizie è essere interrogati da persone diverse da quelle con le quali abbiamo seguito il corso. Questo elemento, nel nostro caso, non si applica. Tutti saranno interrogati personalmente dal titolare del corso come sarebbe auspicabile ma non è previsto nè dalla legge, nè dalla consuetudine.

La finalità ideale, a mio parere, è avere un'ultima occasione di insegnare quel poco che si sa in una modalità molto diversa dalla "didattica frontale" che significa parlare a cento persone tutte diverse, per carattere, preparazione, interesse. Qui si ha l'occasione di un contatto ravvicinato che prevede, quasi per definizione, che chi viene interrogata/o sia concentrata a capire cosa si dice. Ma, soprattutto, si arriva a questo colloquio, dopo che la studentessa o lo studente ha avuto modo di pensare per diversi giorni a quello che gli è stato proposto durante l'anno.

La ricettività è al suo massimo. Quindi l'orale è una grande occasione per controllare se il modo che abbiamo di studiare la materia è efficace oppure no.

Sarà stato efficace se sarete capace di spiegare a me, che ho il privilegio ingrato di dovervi giudicare, quello che avete imparato.

Ecco quindi qualche consiglio generale.

1) Vi chiederò delle definizioni. Non assumete di saperle. Verificatelo prima dell'orale. Preparatevi una lista di definizioni che con alta probabilità vi potrei chiedere e provate a rispondere alla domanda: "Scriva la definizione di successione". Concentratevi sull'imperativo: "Scriva". Non ho detto: "Mi racconti, mi descriva, mi dia una sua versione". "Scriva!". E si intende scrivere solo formule matematiche. Poco ricorso a parole ambigue o che rimandano ad altre parole non definite.

Esempio. Definizione di successione convergente.
Passo 1. “Una successione è una funzione $A : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definita sui numeri naturali ed a valore, ad esempio, in $\mathbb{R}$.” E $\forall\, n \in \mathbb{N}$ il valore $A(n)$ si denota con a_n.
Passo 2. Una successione si dice convergente al numero reale L se

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, : \, |a_n - L| < \epsilon, \, \forall n \geq n_\epsilon.$$

Passo 3. Una successione si dice convergente se $\exists L \in \mathbb{R}$, tale che

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, : \, |a_n - L| < \epsilon, \, \forall n \geq n_\epsilon.$$

2) Imparata una definizione, provate a dare esempi e “controesempi”.
“Mi dia un esempio di successione convergente, divergente, oscillante limitata e oscillante non limitata”.
Ecco qua, nell’ordine

$$\forall n \in \mathbb{N}, \, a_n = 0, \, a_n = n, \, a_n = (-1)^n, \, a_n = (-1)^n \, n.$$

3) Adesso dobbiamo avere almeno un teorema di cui ricordiamo l’enunciato sull’argomento.
Teorema: ogni successione monotona crescente (o non decrescente) ammette limite. Più precisamente:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$$

Un importante corollario è che se una successione monotona non decrescente è limitata superiormente, allora converge!
4) Ciliegina sulla torta: “qualche applicazione del risultato 3)”.
5) Come enunciare un teorema. Proviamo a seguire alcune regole guida.
5a) L’enunciato deve essere scritto in “matematichese”. Evitate il ricorso a circonlocuzioni.
5b) L’enunciato deve essere formato da una ipotesi e da una tesi. I teoremi privi di ipotesi sono sempre falsi. I teoremi con troppe ipotesi sono ridondanti. Una volta scritto l’enunciato verificatelo su quello che vi appare un caso ovvio.
Esempio: ricerca dell’enunciato per tentativi (da evitare all’esame ma praticare in allenamento).

Primo tentativo:
“Ogni funzione continua ammette massimo e minimo”. No! Ad esempio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x$ è un contro esempio. Non ammette massimo e non ammette minimo essendo illimitata.

Secondo tentativo:
“Ogni funzione continua definita su un intervallo limitato ammette massimo e minimo”. No! Ad esempio $f : (0,1) \to (0,1)$ con $f(x) = x$ è un contro esempio. Non ammette massimo e non ammette minimo essendo monotona: $\inf f = 0 \neq f(x)\,, \forall x \in (0,1)$ e $\sup f = 1 \neq f(x)\,, \forall x \in (0,1)$.

Terzo tentativo: “Ogni funzione continua definita su un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, $a < b$, ammette massimo e minimo”. Si! E cosa vuol dire esattamente la tesi?

$$\exists \, x_m, \, x_M \in [a,b], : \, f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)\,, \forall x \in [a,b].$$

Il punto x_m si dice un punto di minimo mentre il valore $m := f(x_m)$ si dice il minimo di f su $[a, b]$. Il punto x_M si dice un punto di massimo mentre il valore $M := f(x_M)$ si dice il massimo di f su $[a, b]$.
5c) Infine vediamo di ricordare l'ultima precauzione: scrivere formule senza quantificatori. Un tipico studente poco preparato potrebbe scrivere l'enunciato del teorema in questo modo:

"Ogni funzione continua definita su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, $a < b$, ammette massimo e minimo". Si! E cosa vuol dire esattamente la tesi? Ad esempio cosa vuol dire che f ammette massimo?

"Vuol dire che: $f(x) \leq M$".

A questo punto dirò: "La frase è incompleta e quindi non so se è vera oppure falsa, mancano i quantificatori che sono solo due: $\forall$ e $\exists$. Quali vogliamo inserire? E dove?"

Possibile replica: "Ahh, si, $f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$". Ed io: "E che mi dice su M?".

Possibile replica: "Ahh, si, $\exists M\ :\ f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$".

Insisto: "Ma allora $f(x) \leq M + 1$ è ancora vera. Sta solo dicendo che f è limitata da M, affermazione giusta, ma non è quella che vogliamo".

'Contro replica 'Ma M è il massimo di f".

"E cioè?"

Replica: "$f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$".

"No, non basta. Meglio ripassare la definizione di massimo di una funzione: non solo M è un maggiorante di f, quello che lei insiste a ricordare e quindi $f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$, ma M appartiene all'insieme immagine ovvero $M \in f([a, b])$ o, in altre parole, $\exists\, x_M \in [a, b], f(x_M) = M$".