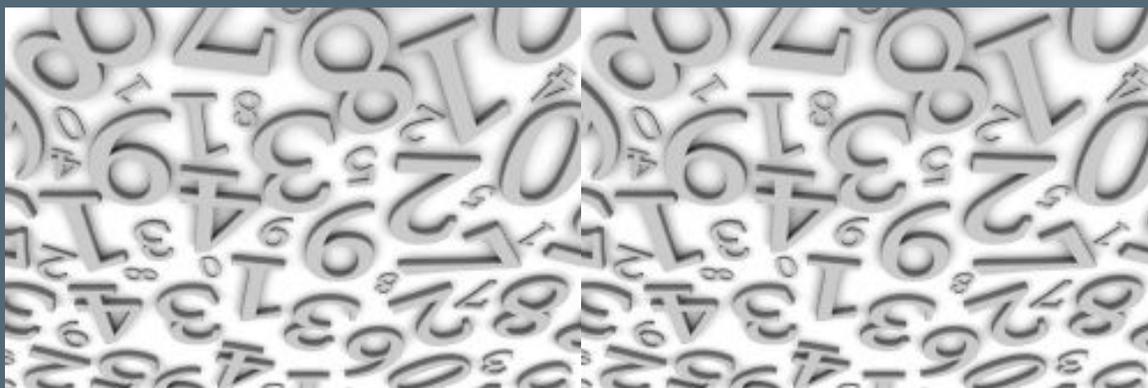
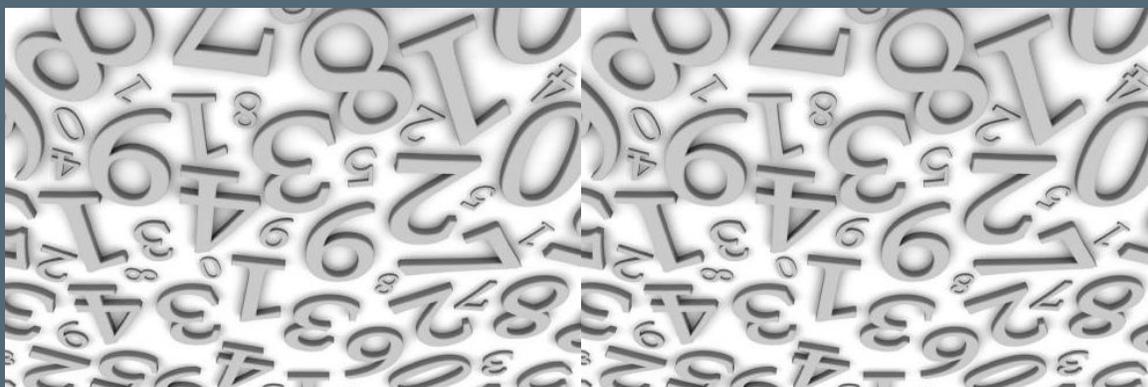


Università La Sapienza
Corso di Laurea in Chimica
2015-2016

Istituzioni di Matematica II



LEZIONI



Dispense delle
Lezioni
Istituzioni di Matematica II
tenute agli studenti [M-Z]
del Corso di Laurea in Chimica
nel secondo semestre
2015 - 2016
dal prof. Lamberto Lamberti

Seconda edizione
corredata di
Esercizi svolti

<http://www.mat.uniroma1.it/people/lamberti/>
<http://www1.mat.uniroma1.it/people/pensionati/lamberti/>

Ultima revisione 27 giugno 2016

Indice

Parte 1. Algebra lineare	1
Capitolo 1. Spazi vettoriali	3
1. Vettori	3
2. Spazi vettoriali	4
3. Indipendenza lineare, dimensione	4
4. Prodotto scalare	7
Capitolo 2. Geometria analitica in \mathbb{R}^2 ed \mathbb{R}^3	9
1. Equazione di un piano	9
2. Equazione della retta	9
3. Distanza punto-piano	10
4. Equazione dell'ellissoide	10
Capitolo 3. Matrici	13
1. Introduzione	13
2. Prodotto matrice vettore	14
3. Matrice trasposta	15
4. Basi e coordinate	16
5. Prodotto tra matrici	17
6. Linearit�	18
Capitolo 4. Determinanti	21
1. Il caso 2×2 e quello 3×3	21
2. Propriet� dei determinanti	22
3. Prodotto vettoriale in \mathbb{R}^3	23
4. Le matrici a scalini	24
5. Determinanti generali	25
6. Il teorema di Binet	27
7. Il rango di una matrice	28
Capitolo 5. Sistemi lineari	31
1. Sistemi lineari in due incognite	31
2. La matrice inversa	35
3. Determinanti e formule di Cramer	36
4. Il metodo di Gauss	37
5. Sistemi <i>non-Cramer</i>	38
6. Sistemi omogenei	40
Capitolo 6. Autovalori e autovettori	41

1. Il caso di matrici 2×2	41
2. Matrici diagonalizzabili	43
Capitolo 7. Complementi	45
1. Coefficienti variabili	45
2. Derivata di un determinante	45
3. Stime numeriche	46
4. Notazioni vettoriali in Analisi	47
Parte 2. Funzioni di due variabili	49
Capitolo 8. Il piano cartesiano	51
1. La metrica	51
2. Convergenza in \mathbb{R}^2	51
3. Sottoinsiemi importanti del piano	52
4. Punti interni e punti esterni a un insieme S	55
5. Funzioni di due variabili	56
6. Insieme di definizione	57
7. Quando si parla di funzioni continue ?	58
8. Grafico o linee di livello	59
9. Le funzioni radiali	60
10. Le funzioni ondose	61
11. Il teorema di Weierstrass	62
12. Il teorema d'esistenza degli zeri	63
13. Le conseguenze	64
Capitolo 9. I limiti	67
1. Il concetto di limite	67
2. Prolungamento per continuit�	69
3. Limite infinito	69
4. Limiti all'infinito	70
Capitolo 10. Le derivate	71
1. Derivate parziali	71
2. La pendenza di una superficie secondo una direzione	72
3. Le derivate parziali: prime, seconde,...	74
4. Il teorema di Schwarz	74
5. Il teorema di Lagrange	75
6. Il piano tangente	76
7. La derivazione delle funzioni composte	78
8. Il teorema del valor medio	80
9. Interpretazione geometrica	82
Capitolo 11. Formula di Taylor	83
1. Introduzione	83
2. La formula di Taylor in due variabili	85
3. Formule di Taylor di ordine superiore	88
4. Formule di Taylor quasi gratuite...	89

5. Riflettiamo sulla formula di Taylor	90
Capitolo 12. Massimi e minimi	93
1. Introduzione	93
2. La selezione: condizioni sufficienti	94
3. Massimo e minimo in insiemi chiusi e limitati	96
4. Massimi e minimi vincolati	99
Parte 3. Integrali curvilinei	103
Capitolo 13. Integrali curvilinei	105
1. Lunghezza di una curva	105
2. Il calcolo della lunghezza	107
3. Integrali curvilinei	109
4. Proprietà degli integrali curvilinei	111
5. Baricentro di una curva Γ	112
Capitolo 14. Campi vettoriali	113
1. Introduzione	113
2. Il campo del gradiente	114
3. Lavoro di campi vettoriali	116
4. Il lavoro dei campi gradiente	119
5. Il potenziale	120
6. Il rotore	122
7. Condizioni sufficienti	125
8. Riassunto	125
Parte 4. Integrali doppi	127
Capitolo 15. Misura di Peano-Jordan nel piano	129
1. Proprietà dell'area	129
2. L'algoritmo di Peano-Jordan	129
3. L'area della frontiera...	130
4. Aree di unioni e intersezioni...	131
5. Un insieme non misurabile	131
Capitolo 16. Integrali multipli	133
1. Le somme integrali	133
2. Il teorema del modulo	134
3. Somme, differenze e prodotti di funzioni integrabili	134
4. Il teorema della media	135
5. Integrali tripli	135
Capitolo 17. Formule di riduzione degli integrali	137
1. Integrali sopra rettangoli	137
2. Integrali su domini normali	139
3. Utilità delle formule di riduzione	140
Capitolo 18. Trasformazioni e cambiamenti di coordinate	141

1. Cambiamenti di coordinate affini	141
2. Cambi di coordinate generali	144
3. Le coordinate polari	145
Capitolo 19. Il teorema della divergenza nei rettangoli	149
1. Introduzione	149
2. Il flusso attraverso il bordo	149
3. La regola di integrazione per parti	151
Capitolo 20. Il teorema di Stokes	153
1. L'orientamento	153
2. Introduzione al teorema di Stokes	153
3. Qualche disegno...	154
4. Le formule di Green	156
5. Riassumendo	157
6. Integrali tripli	157
Capitolo 21. Superfici	159
1. Superfici regolari parametriche	159
2. Alcune superfici fondamentali	161
3. Le superfici di rotazione	165
Capitolo 22. Area di una superficie	167
1. Il caso cartesiano	167
2. Area di una superficie parametrica	169
3. Integrali superficiali	171
4. Elemento d'area	172
5. Il teorema di Stokes nello spazio	173
6. Il Teorema della divergenza nello spazio	176
7. Riassumendo	176
Parte 5. Esercizi	179
Capitolo 23. Esercizi sui vettori	181
Capitolo 24. Esercizi sulle matrici	187
Capitolo 25. Esercizi su insiemi del piano	195
Capitolo 26. Esercizi su derivate parziali	205
Capitolo 27. Esercizi sulla formula di Taylor	213
Capitolo 28. Esercizi su integrali curvilinei	223
Capitolo 29. Esercizi su campi vettoriali	233
Capitolo 30. Esercizi su integrali doppi	243
Capitolo 31. Esercizi su cambio di coordinate	255
Capitolo 32. Esercizi su integrali superficiali	265

Indice analitico

277

Parte 1

Algebra lineare

CAPITOLO 1

Spazi vettoriali

1. Vettori

Un vettore bidimensionale \mathbf{p} è una coppia ordinata di numeri (u, v) : i due numeri u e v sono le componenti del vettore \mathbf{p} .

Analogamente una terna (u, v, w) rappresenta un vettore tridimensionale e, in generale, una n -pla (u_1, u_2, \dots, u_n) rappresenta un vettore n -dimensionale.

Nel caso bidimensionale e in quello tridimensionale i vettori sono tradizionalmente determinati da *lunghezza*, *direzione* e *verso* e interpretati con le *tradizionali freccette*.

Il vettore con tutte le componenti nulle si chiama *vettore nullo*.

DEFINIZIONE 1.1. *L'insieme dei vettori n -dimensionali si chiama \mathbb{R}^n*

Nel caso $n = 1$ l'insieme dei vettori 1-dimensionali è null'altro che l'insieme stesso \mathbb{R} dei numeri reali, nel caso di $n = 2$ o $n = 3$ \mathbb{R}^2 ed \mathbb{R}^3 corrispondono al piano e allo spazio ordinari.

DEFINIZIONE 1.2. *Si definisce modulo o lunghezza di un vettore n -dimensionale $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ il numero*

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

Nel caso $n = 1$ la definizione di modulo coincide con quella già introdotta per i numeri reali

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u^2} = |u|$$

Nel caso di un vettore bidimensionale $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ il modulo è la lunghezza dell'ipotenusa del triangolo rettangolo di cateti $|u_1|$ e $|u_2|$; nel caso $n = 3$ il modulo del vettore $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ è la lunghezza della diagonale del parallelepipedo di lati $|u_1|$, $|u_2|$, $|u_3|$.

Ovviamente

$$\|\mathbf{u}\| \geq 0, \quad \|\mathbf{u}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = (0, 0, \dots, 0)$$

I vettori, bidimensionali, tridimensionali o in generale n -dimensionali, possono essere moltiplicati per un fattore $\lambda \in \mathbb{R}$ e combinati linearmente con coefficienti assegnati: riferendosi, ad esempio, a vettori bidimensionali $\mathbf{p} = (x_p, y_p)$, $\mathbf{q} = (x_q, y_q)$, di \mathbb{R}^2 si ha per ogni λ e $\mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{p} &= (\lambda x_p, \lambda y_p), & \mu \mathbf{q} &= (\mu x_q, \mu y_q) \\ \lambda \mathbf{p} + \mu \mathbf{q} &= (\lambda x_p + \mu x_q, \lambda y_p + \mu y_q) \end{aligned}$$

DEFINIZIONE 1.3. *Due vettori \mathbf{p} e \mathbf{q} non nulli si dicono paralleli, o aventi la stessa direzione se esiste un numero $\lambda \neq 0$ tale che $\mathbf{p} = \lambda \mathbf{q}$.*

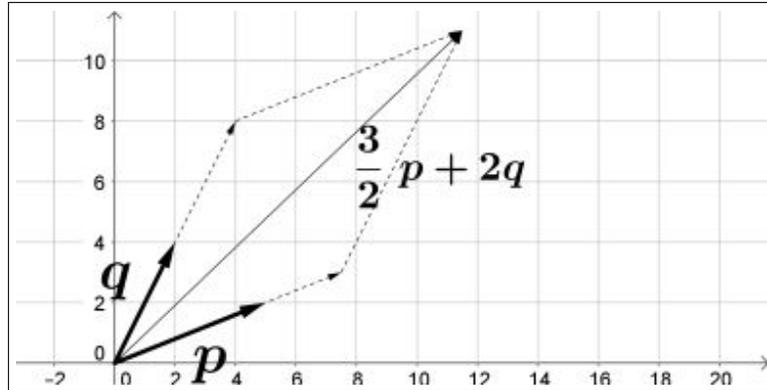


FIGURA 1. L'ordinaria combinazione lineare con il parallelogramma

2. Spazi vettoriali

Numerosi oggetti matematici si prestano ad essere trattati come vettori: i polinomi di grado ≤ 2 , quelli di grado ≤ 5 , le funzioni della forma $a + b \cos(x) + c \sin(x)$, ecc. ecc. Per gli elementi degli spazi vettoriali:

- ha senso la moltiplicazione per un fattore reale λ ,
- ha senso eseguire combinazioni lineari,

Gli insiemi di tali oggetti prendono quindi il nome di *spazi vettoriali*

3. Indipendenza lineare, dimensione

DEFINIZIONE 3.1. Due (o piú) vettori si dicono *linearmente indipendenti* se l'unica loro combinazione lineare che dia il vettore nullo è quella a coefficienti tutti nulli.

L'indipendenza lineare per una famiglia di vettori è una proprietà tecnica che somiglia all'essere *sostanzialmente diversi*:

- i due vettori $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (2, 4, 6)$ sono uno il doppio dell'altro, massima somiglianza, essi costituiscono una coppia di vettori linearmente dipendenti

$$2\mathbf{u} - \mathbf{v} = 0$$

- i due vettori $\mathbf{u} = (1, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1)$ costituiscono una coppia di vettori linearmente indipendenti: infatti $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = (\alpha, \beta)$ risulta il vettore nullo solo se $\alpha = \beta = 0$.
- i tre vettori $\mathbf{u} = (1, 0)$, $\mathbf{v} = (1, 1)$, $\mathbf{w} = (2, 3)$ sono linearmente dipendenti infatti

$$\mathbf{u} - 3\mathbf{v} + \mathbf{w} = 0$$

ESEMPIO 3.2. Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2 :

$$P_1(x) = 1 + x^2, \quad P_2(x) = 5 - x, \quad P_3(x) = x - x^2, \dots$$

sono elementi di V .

P_1 e P_2 sono linearmente indipendenti, infatti

$$\alpha P_1 + \beta P_2 = \alpha(1 + x^2) + \beta(5 - x) = \alpha + 5\beta - 5\beta x + \alpha x^2$$

da cui

$$\alpha P_1 + \beta P_2 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha + 5\beta = 0 \\ -5\beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \rightarrow \alpha = \beta = 0$$

COROLLARIO 3.3. *Se m vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_m$ sono linearmente dipendenti allora uno almeno di essi è combinazione lineare degli altri $m - 1$.*

DIMOSTRAZIONE. Gli m vettori sono linearmente dipendenti se esiste una loro combinazione lineare che produce il vettore nullo

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + c_3 \mathbf{u}_3, \dots, + c_m \mathbf{u}_m = 0$$

con almeno uno dei coefficienti $c_k \neq 0$.

Supponiamo, ad esempio che sia $c_m \neq 0$ allora riesce

$$c_m \mathbf{u}_m = -c_1 \mathbf{u}_1 - c_2 \mathbf{u}_2 - c_3 \mathbf{u}_3, \dots$$

da cui, dividendo per c_m si ottiene

$$\mathbf{u}_m = -\frac{c_1}{c_m} \mathbf{u}_1 - \frac{c_2}{c_m} \mathbf{u}_2 - \frac{c_3}{c_m} \mathbf{u}_3, \dots$$

□

PROPOSIZIONE 3.4. *Se due vettori \mathbf{p} e \mathbf{q} non nulli sono linearmente indipendenti allora*

$$\lambda \mathbf{p} + \mu \mathbf{q} = \eta \mathbf{p} + \nu \mathbf{q}, \text{ con } \lambda, \mu, \eta, \nu \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \eta \\ \mu = \nu \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE.

$$\lambda \mathbf{p} + \mu \mathbf{q} = \eta \mathbf{p} + \nu \mathbf{q} \Leftrightarrow (\lambda - \eta) \mathbf{p} + (\mu - \nu) \mathbf{q} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda - \eta = 0 \\ \mu - \nu = 0 \end{cases}$$

□

3.1. Basi.

DEFINIZIONE 3.5. *Un insieme di vettori $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ di uno spazio vettoriale costituisce una base dello spazio se*

- $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ sono linearmente indipendenti,
- ogni vettore dello spazio si rappresenta come combinazione lineare degli $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

COROLLARIO 3.6. *Le basi di uno spazio vettoriale sono sempre formate da uno stesso numero di elementi, numero che coincide con la dimensione dello spazio.*

ESEMPIO 3.7. *Sia V lo spazio dei polinomi di grado ≤ 2 precedentemente introdotto: i tre vettori*

$$P_1(x) = 1, P_2(x) = x, P_3(x) = x^2$$

costituiscono una base di V : infatti sia $P(x) = a + bx + cx^2 \in V$ si ha, ovviamente

$$P = aP_1 + bP_2 + cP_3$$

Anche i tre vettori

$$Q_1(x) = 1 + x, \quad Q_2(x) = x + x^2, \quad Q_3(x) = 1 + x^2$$

rappresentano una base.

Infatti se $P(x) = a + bx + cx^2 \in V$ si ha

$$P(x) = \alpha Q_1(x) + \beta Q_2(x) + \gamma Q_3(x) \rightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = a \\ \alpha + \beta = b \\ \beta + \gamma = c \end{cases}$$

Da cui

$$\alpha = \frac{1}{2}(a + b - c), \quad \beta = \frac{1}{2}(c - a + b), \quad \gamma = \frac{1}{2}(a - b + c)$$

DEFINIZIONE 3.8. Il numero massimo di elementi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale si dice *dimensione dello spazio*.

PROPOSIZIONE 3.9. In \mathbb{R}^n esistono sempre n -uple $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ di vettori linearmente indipendenti che prendono il nome di *basi dello spazio*.

L'esempio piú importante di base di \mathbb{R}^n , cioè di n -pla di vettori linearmente indipendenti, è quella fornita dai vettori

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{p}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ogni vettore $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ si rappresenta con

$$\mathbf{q} = q_1 \mathbf{p}_1 + q_2 \mathbf{p}_2 + \dots + q_n \mathbf{p}_n$$

Gli esempi di spazi vettoriali offerti ad esempio dalla famiglia dei polinomio di grado $\leq m$ forniscono esempi di spazi di dimensione $m + 1$ anche grande, superando quindi la suggestione geometrico-naturalistica che porta a ritenere come uniche vere dimensioni, quella 2 del piano e quella 3 dello spazio.

3.2. Inviluppo lineare.

L'operazione di combinazione lineare permette di associare ad un insieme di vettori

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_m$$

l'insieme infinito di tutte le loro combinazioni lineari

$$c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + c_3 \mathbf{u}_3 + \dots + c_m \mathbf{u}_m$$

insieme che prende il nome di *inviluppo lineare* $L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \dots, \mathbf{u}_m)$ degli m vettori.

ESEMPIO 3.10. Siano $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0)$ riesce

$$L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \{c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 = (c_1, c_2), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

ovvero $L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbb{R}^2$.

COROLLARIO 3.11. Se $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\}$ sono linearmente indipendenti allora $L(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m)$ è uno spazio vettoriale di dimensione m .

4. Prodotto scalare

DEFINIZIONE 4.1. Si definisce prodotto scalare di due vettori n -dimensionali $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ il numero reale

$$u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n$$

che viene indicato con $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ o con (\mathbf{u}, \mathbf{v}) .

Riesce ovviamente

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u}), \quad (\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|^2$$

La relazione $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^n (a_i - \lambda b_i)^2 \geq 0$ implica la nota disuguaglianza di Cauchy-Schwartz

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

e implica, in particolare,

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \rightarrow \left| \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right| \leq 1 \rightarrow \exists \theta : \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = \cos(\theta)$$

Nel caso dei vettori bidimensionali (o tridimensionali) riesce

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos(\vartheta)$$

essendo $\vartheta \in [0, \pi]$ l'angolo, convesso, formato dai due vettori.

DEFINIZIONE 4.2. Due vettori non nulli che abbiano prodotto scalare nullo sono detti ortogonali fra loro.

PROPOSIZIONE 4.3. Due o piú vettori non nulli, ortogonali fra loro, sono linearmente indipendenti.

DIMOSTRAZIONE. Siano, ad esempio \mathbf{p} , \mathbf{q} ed \mathbf{r} tre vettori ortogonali tra loro

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (\mathbf{p}, \mathbf{r}) = (\mathbf{r}, \mathbf{q}) = 0$$

e siano λ , μ e ν tre numeri tali che

$$\lambda \mathbf{p} + \mu \mathbf{q} + \nu \mathbf{r} = \mathbf{0}$$

Il prodotto scalare di tale combinazione lineare con \mathbf{p} produce

$$0 = \lambda \|\mathbf{p}\|^2 + \mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \nu(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \lambda \|\mathbf{p}\|^2 \Rightarrow \lambda = 0$$

Analogamente moltiplicando scalarmente per \mathbf{q} e per \mathbf{r} si ottengono $\mu = 0$ e $\nu = 0$.

Cioè l'unica combinazione lineare di vettori tra loro ortogonali nulla è quella a coefficienti tutti nulli. \square

4.1. Esercizi.

ESERCIZIO 4.4. *Calcolare il modulo del vettore $\mathbf{u} = 3(1,2) - 2(1,3)$ e verificare che*

$$\|\mathbf{u}\| \leq \|3(1,2)\| + \|2(1,3)\|$$

ESERCIZIO 4.5. *Verificare che i tre vettori*

$$\mathbf{u} = (1,2), \mathbf{v} = (2,1), \mathbf{w} = (-4, -4)$$

sono linearmente dipendenti.

ESERCIZIO 4.6. *Determinare per quali valori del numero k i due vettori $\mathbf{u} = (1, -k)$ e $\mathbf{v} = (8, 2k)$ sono ortogonali.*

CAPITOLO 2

Geometria analitica in \mathbb{R}^2 ed \mathbb{R}^3

1. Equazione di un piano

Un piano può essere determinato

- assegnato un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$
- assegnato un vettore \mathbf{v}

come la totalità dei punti $P = (x, y, z)$ tali che

$$(P - P_0, \mathbf{v}) = 0$$

da cui l'equazione cartesiana

$$v_x(x - x_0) + v_y(y - y_0) + v_z(z - z_0) = 0$$

ESEMPIO 1.1. *Il piano che contiene $P_0 = (1, 2, 3)$ e che è ortogonale al vettore $\mathbf{v} = (3, 2, 1)$ ha l'equazione cartesiana*

$$3(x - 1) + 2(y - 2) + (z - 3) = 0 \quad \rightarrow \quad 3x + 2y + z - 10 = 0$$

Assegnato il piano $ax + by + cz + d = 0$ il vettore $\mathbf{n} = (a, b, c)$ è ortogonale al piano.

Il vettore

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a, b, c)$$

è ortogonale al piano e ha modulo 1.

ESEMPIO 1.2. *Il piano di equazione cartesiana $x + y = 1$ ha come vettore ortogonale $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$. Si tratta quindi di un piano verticale, cioè parallelo all'asse z .*

2. Equazione della retta

Una retta è determinata dall'intersezione di due piani: quindi assegnate le equazioni

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

l'equazione cartesiana di una retta è il sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Naturalmente esistono più coppie di piani la cui intersezione sia la stessa retta.

ESEMPIO 2.1. *La retta coincidente con l'asse x è l'intersezione dei due piani $z = 0$ e $y = 0$.*

Essa è anche intersezione $y + z = 0$ e $y - z = 0$.

Una retta può essere determinata anche da

- un suo punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$,
- un vettore τ ,

I punti della retta sono $P = P_0 + t \tau$, ovvero la retta viene fornita con le equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + \tau_x t \\ y = y_0 + \tau_y t \\ z = z_0 + \tau_z t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

ESEMPIO 2.2. La retta passante per $P_0 = (3, 6, 1)$ e parallela al vettore $\tau = (1, -1, 2)$ ha equazioni parametriche

$$x = 3 + t, \quad y = 6 - t, \quad z = 1 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}$$

3. Distanza punto-piano

Assegnati un piano $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ e un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ si definisce distanza di P_0 da α il minimo

$$\min_{P \in \alpha} \overline{P_0 P}$$

Considerato il versore (vettore di lunghezza unitaria)

$$v = \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

ortogonale ad α il minimo cercato è il modulo della proiezione su v del vettore $P_0 P$ con $P \in \alpha$:

$$\text{dist}(P_0, \alpha) = |(P_0 P, v)| = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

ESEMPIO 3.1. Assegnato il piano $\alpha : x + 2y + 3z - 4 = 0$ la distanza δ dell'origine $P_0 = (0, 0, 0)$ da α è

$$\delta = \frac{4}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{4}{\sqrt{14}}$$

4. Equazione dell'ellissoide

Il luogo dei punti (x, y, z) che verificano l'equazione cartesiana

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

costituisce l'ellissoide di semiassi a, b, c .

Si tratta di una superficie ovoidale centrata nell'origine degli assi, simmetrica sia rispetto all'origine che rispetto ai piani coordinati:

- l'asse x buca l'ellissoide nei due punti $(-a, 0, 0)$ e $(a, 0, 0)$
- l'asse y buca l'ellissoide nei due punti $(0, -b, 0)$ e $(0, b, 0)$
- l'asse z buca l'ellissoide nei due punti $(0, 0, -c)$ e $(0, 0, c)$

Nel caso particolare $a = b = c = R$ l'ellissoide diventa una sfera di centro l'origine e raggio R e la sua equazione si scrive piú semplicemente come

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

4.1. Le quadriche generali.

Numerose importanti superfici analoghe all'ellissoide nella forma della loro equazione cartesiana si possono vedere sul sito <https://it.wikipedia.org/wiki/Quadrica>

Nelle Figure (1) sono riportate tre forme canoniche frequenti

- una somma di tre quadrati $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$,
- due sommati e uno sottratto $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 1$,
- uno sommato e due sottratti $x^2 - 2y^2 - 3z^2 = 1$,

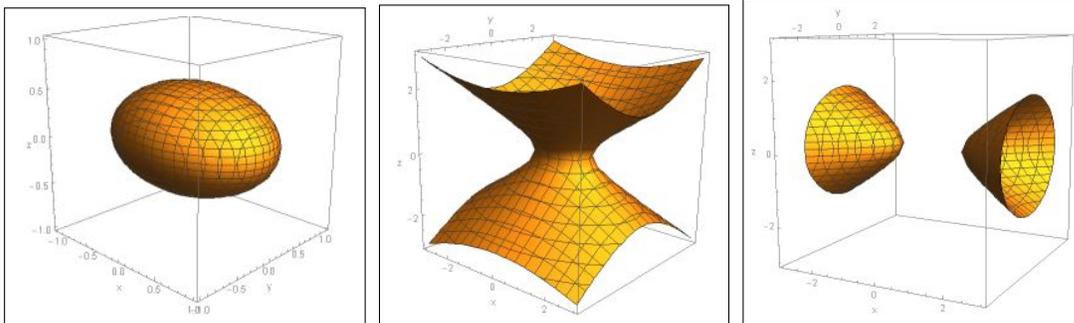


FIGURA 1. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$, $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 1$, $x^2 - 2y^2 - 3z^2 = 1$

CAPITOLO 3

Matrici

1. Introduzione

DEFINIZIONE 1.1. Una matrice A , di tipo 2×2 o 3×3 , è una tabella di numeri disposti su due righe e due colonne, ovvero su tre righe e tre colonne

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$$

I numeri che compongono la matrice ad esempio nel caso 2×2 , si indicano con

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

gli indici apposti si riferiscono alla posizione del numero nella matrice: a_{11} numero prima riga e prima colonna, a_{12} numero prima riga e seconda colonna, ecc.

DEFINIZIONE 1.2. La matrice $A n \times n$ si dice *simmetrica* se

$$a_{i,j} = a_{j,i} \quad \forall i, j \in [1, n].$$

ESEMPIO 1.3. Posto

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

A è *simmetrica*, B non lo è.

Le matrici

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

che hanno solo i termini della diagonale diversi da zero si dicono *matrici diagonali*.

Le matrici diagonali con i termini (della diagonale) tutti uguali a 1 si chiamano *matrici unitarie*.

Una matrice che abbia tutti i termini sotto la diagonale nulli si dice *matrice triangolare*

Una matrice che abbia tutti i termini zero si dice *matrice nulla*

ESEMPIO 1.4. Dette

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 7 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

la prima A è *triangolare*, l'altra, la B non lo è.

Come per i vettori si possono considerare matrici più generali, tabelle con numero di righe e numero di colonne diversi da 2 o da 3 ed eventualmente anche diversi tra loro.

1.1. L'uso dei vettori colonna.

Indicati con A_1, A_2 , ecc. i vettori formati dalla prima colonna, dalla seconda, ecc. della matrice A spesso è conveniente indicare A con la notazione

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$$

ESEMPIO 1.5. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

riesce

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

da cui la ovvia notazione

$$A = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$$

Tornando al caso generale di matrici $n \times m$, n righe ed m colonne, avremo ovviamente m vettori colonna, ciascuno di essi formato da n componenti.

1.2. Combinazione lineare di matrici.

Le matrici di uno stesso tipo, cioè con lo stesso numero di righe e lo stesso di colonne, si moltiplicano per un fattore e si combinano linearmente come i vettori

$$\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a + \mu e & \lambda b + \mu f \\ \lambda c + \mu g & \lambda d + \mu h \end{pmatrix}$$

Le matrici di uno stesso tipo, per esempio quelle 2×2 o quelle 3×3 , sulle quali ha senso l'operazione di *combinazione lineare*, costituiscono **spazi vettoriali**.

Quelle 2×2 formano uno spazio vettoriale di dimensione 4, quelle 3×3 uno spazio di dimensione 9: una base dello spazio vettoriale delle matrici 2×2 è fornita dalle quattro matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

2. Prodotto matrice vettore

DEFINIZIONE 2.1. Si definisce *prodotto della matrice* $A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ $n \times m$ per il vettore $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ il vettore

$$A\mathbf{u} = u_1A_1 + u_2A_2 + \dots + u_mA_m$$

vettore ad n componenti, *combinazione lineare delle m colonne di A con coefficienti le m componenti di \mathbf{u}*

Il prodotto matrice vettore definito sopra ha spesso il nome di *prodotto righe per colonne*: infatti detto $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}$ riesce,

$$v_1 = \sum_{k=1}^m a_{1k} u_k, \quad v_2 = \sum_{k=1}^m a_{2k} u_k, \dots, \quad v_n = \sum_{k=1}^m a_{nk} u_k$$

ovvero gli n elementi v_k di $\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}$ sono ciascuno il prodotto scalare della riga k -esima della matrice per la colonna rappresentata dalle m componenti del vettore \mathbf{u} .

ESEMPIO 2.2. Assegnato $\vartheta \in [0, \pi]$ sia A la matrice 2×2

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \right)$$

Il prodotto $\mathbf{A}\mathbf{u}$ produce la trasformazione di $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ seguente

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow x \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos(\vartheta) - y \sin(\vartheta) \\ x \sin(\vartheta) + y \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

Geometricamente il vettore $\mathbf{A}\mathbf{u}$ rappresenta il vettore ottenuto ruotando \mathbf{u} in senso antiorario di un angolo ϑ .

Ad esempio scelto $\vartheta = \pi/2$ si ha

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

3. Matrice trasposta

DEFINIZIONE 3.1. Si dice matrice trasposta di $A = \{a_{i,j}\}$ la matrice A^T di elementi

$$b_{ij} = a_{ji}$$

In altri termini gli elementi che costituivano la prima colonna di A costituiranno la prima riga di A^T , quelli della seconda colonna formeranno la seconda riga, ecc.

Se A è una matrice $n \times m$ allora la trasposta A^T è una matrice $m \times n$.

Se

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1,k} x_k \\ \sum_{k=1}^n a_{2,k} x_k \\ \dots \\ \sum_{k=1}^n a_{n,k} x_k \end{pmatrix} \Rightarrow A^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{k,1} x_k \\ \sum_{k=1}^n a_{k,2} x_k \\ \dots \\ \sum_{k=1}^n a_{k,n} x_k \end{pmatrix}$$

La matrice trasposta ha un ruolo particolare nei prodotti scalari: riesce infatti

$$(1) \quad (\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{A}^T \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}$$

ESEMPIO 3.2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Detti $\mathbf{u} = (a, b)$ e $\mathbf{v} = (\alpha, \beta)$ riesce, infatti,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{u} &= (a+2b, \quad 3a+4b) & \rightarrow & (\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (a+2b)\alpha + (3a+4b)\beta \\ \mathbf{A}^T \mathbf{v} &= (\alpha+3\beta, \quad 2\alpha+4\beta) & \rightarrow & (\mathbf{u}, \mathbf{A}^T \mathbf{v}) = a(\alpha+3\beta) + b(2\alpha+4\beta) \end{aligned}$$

COROLLARIO 3.3. Sia A simmetrica allora $A^T = A$ e quindi

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}: (\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v})$$

4. Basi e coordinate

Sia $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ una base dello spazio vettoriale V : allora ogni $\mathbf{v} \in V$ si rappresenta in uno e un solo modo come combinazione lineare

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{b}_1 + c_2 \mathbf{b}_2 + \dots + c_n \mathbf{b}_n$$

I coefficienti (c_1, c_2, \dots, c_n) si dicono coordinate di \mathbf{v} nella base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$.

4.1. Cambiamenti di base. Siano $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$ due basi di V .

Ogni vettore di una base si può rappresentare come combinazione lineare di elementi dell'altra:

$$(2) \quad \mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^n s_{ij} \mathbf{w}_j, \quad \mathbf{w}_i = \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \mathbf{u}_j \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Dette $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ le coordinate di uno stesso vettore \mathbf{v} rispetto alle basi $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$ si ha, tenuto conto delle (2),

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{u}_k = \sum_{k=1}^n x_k \sum_{j=1}^n s_{kj} \mathbf{w}_j = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n s_{kj} x_k \right) \mathbf{w}_j$$

Quindi

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{w}_j \quad \rightarrow \quad y_j = \sum_{k=1}^n s_{kj} x_k$$

Si riconosce pertanto che

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

avendo indicato con S la matrice degli s_{ij} e con S^T la sua trasposta.

Ovvero, conosciuta la matrice S che lega le due basi si passa dalle coordinate di un vettore in una base a quelle nell'altra.

ESEMPIO 4.1. Siano

$$\{\mathbf{u}_1 = (1, 0), \mathbf{u}_2 = (0, 1)\}, \quad \{\mathbf{v}_1 = (1, -1), \mathbf{v}_2 = (1, 1)\}$$

due basi di \mathbb{R}^2 .

Un qualsiasi vettore \mathbf{v} si rappresenta, servendosi della prima delle due basi, come

$$\mathbf{v} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2$$

I due coefficienti a e b prendono il nome di coordinate di \mathbf{v} rispetto alla prima base. Tenuto conto del resto che

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$$

ovvero

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2, \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2$$

si ha

$$\mathbf{v} = a \left\{ \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 \right\} + b \left\{ -\frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 \right\} = \left(a\frac{1}{2} - b\frac{1}{2} \right) \mathbf{v}_1 + \left(a\frac{1}{2} + b\frac{1}{2} \right) \mathbf{v}_2$$

I due coefficienti

$$\alpha = a\frac{1}{2} - b\frac{1}{2}, \quad \beta = a\frac{1}{2} + b\frac{1}{2}$$

rappresentano quindi le coordinate di \mathbf{v} nella seconda base.

Si noti che

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

5. Prodotto tra matrici

Siano A e B due matrici $n \times n$ e siano

$$A: R^n \rightarrow R^n, \quad \mathbf{u} \rightarrow A\mathbf{u}, \quad B: R^n \rightarrow R^n, \quad \mathbf{u} \rightarrow B\mathbf{u}$$

le trasformazioni da esse determinate.

La trasformazione composta

$$C: R^n \rightarrow R^n, \quad \mathbf{u} \rightarrow B(A\mathbf{u})$$

è determinata dalla matrice $C = B \cdot A$ con

$$(3) \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{ik}a_{kj}$$

ESEMPIO 5.1. Sia, ad esempio, $n = 2$

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad C = B \cdot A = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$$

Con il linguaggio delle colonne si ha

$$C = B \cdot A = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, \beta \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right\}$$

Si noti che l'operazione di prodotto tra due matrici $n \times n$ definita sopra aggiunge allo spazio vettoriale delle matrici $n \times n$ una nuova operazione, il prodotto appunto, che si aggiunge a quelle di combinazione lineare presenti in ogni spazio vettoriale.

Il prodotto fra due matrici non è commutativo: questo significa che in generale

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

ESEMPIO 5.2. *Siano*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Riesce

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

5.1. Trasposta del prodotto.

Siano A e B due matrici, quadrate dello stesso ordine: riesce

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

cioè la trasposta di un prodotto è il prodotto delle trasposte prese nell'ordine opposto. Il risultato è evidente se si pensa alla relazione fondamentale (1) di pagina 15 che lega una matrice e la sua trasposta nei prodotti scalari

$$\forall u, v: (A \cdot B u, v) = (B u, A^T v) = (u, B^T \cdot A^T v) \rightarrow (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

6. Linearità

Assegnata una A , $n \times m$ il prodotto matrice - vettore definisce una trasformazione

$$A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \mathbf{u} \rightarrow A\mathbf{u}$$

lineare nel senso che se \mathbf{p} e \mathbf{q} sono due vettori di \mathbb{R}^m e λ, μ sono due numeri riesce

$$A(\lambda \mathbf{p} + \mu \mathbf{q}) = \lambda A\mathbf{p} + \mu A\mathbf{q}$$

La matrice trasposta, A^T che è di tipo $m \times n$ determina naturalmente una operazione opposta

$$A^T \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

6.1. Proprietà dell'immagine e del nucleo: rango.

DEFINIZIONE 6.1. *Nucleo e immagine della trasformazione determinata dalla matrice A :*

- l'insieme dei vettori tali che $A\mathbf{p} = 0$ si dice **nucleo** di A e si indica con $\text{Ker}(A)$
- l'insieme dei vettori $A\mathbf{q}$ ottenuti al variare comunque di \mathbf{q} si dice **immagine** di A e si indica con $\text{Range}(A)$.

PROPOSIZIONE 6.2. *Se i vettori colonna A_1, A_2, \dots, A_m della matrice A sono linearmente indipendenti il nucleo di A è costituito dal solo vettore nullo.*

DIMOSTRAZIONE. Il vettore $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ appartenga al nucleo di A : dobbiamo provare che non può che essere il vettore nullo.

$A\mathbf{u} = 0$ significa

$$u_1 \mathbf{A}_1 + u_2 \mathbf{A}_2 + \dots + u_m \mathbf{A}_m = 0$$

L'ipotesi che i vettori colonna $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_m$ siano linearmente indipendenti implica del resto che tale annullamento accade solo se i coefficienti u_1, u_2, \dots, u_m sono tutti nulli: quindi tale annullamento implica

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

□

COROLLARIO 6.3. *Se i vettori colonna $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_m$ della matrice A sono linearmente dipendenti il nucleo di A contiene vettori non nulli.*

DIMOSTRAZIONE. L'ipotesi che le n colonne $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_m$ siano linearmente dipendenti significa che esistono n numeri x_1, x_2, \dots, x_m non tutti nulli tali che

$$x_1 \mathbf{A}_1 + x_2 \mathbf{A}_2 + \dots + x_m \mathbf{A}_m = \mathbf{0}$$

Ma allora il vettore $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ è non nullo e riesce

$$A\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{u} \in \text{Ker}(A)$$

□

ESEMPIO 6.4. *Il nucleo della trasformazione determinata dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ è formato dal solo vettore nullo infatti le due colonne di A*

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

sono due vettori ortogonali, quindi (4.3, pagina 7) linearmente indipendenti.

TEOREMA 6.5. *Detti v_0 i vettori del nucleo di A^T , l'immagine di A è costituita da tutti e soli i vettori ortogonali a tutti i v_0*

$$\text{Range}(A) = \{\text{ker}(A^T)\}^\perp$$

DIMOSTRAZIONE. Che i vettori $b = A\mathbf{u}$ debbano essere ortogonali ai v_0 del nucleo di A^T è conseguenza dell'uguaglianza (1), vedi pagina 15, seguente

$$(4) \quad A^T v_0 = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad (u, A^T v_0) = 0 \quad \rightarrow \quad (A\mathbf{u}, v_0) = 0$$

Che tale proprietà sia anche sufficiente richiede una dimostrazione un po' più complessa che omettiamo. □

Una conseguenza importante del precedente Teorema è che se il nucleo di A^T contiene solo il vettore nullo allora l'immagine di A coincide con \mathbb{R}^m .

TEOREMA 6.6. *Assegnata la matrice A , $n \times n$ e assegnato il vettore $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ le soluzioni dell'equazione*

$$A\mathbf{u} = \mathbf{p}$$

nell'incognita \mathbf{u} sono date da $\mathbf{u}_0 + \mathbf{q}$ dove \mathbf{u}_0 è una qualunque soluzione particolare dell'equazione $A\mathbf{u}_0 = \mathbf{p}$ e \mathbf{q} appartiene a $\text{Ker}(A)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $A\mathbf{u}_0 = \mathbf{p}$ e \mathbf{u}_1 un'altra soluzione $A\mathbf{u}_1 = \mathbf{p}$: sottraendo membro a membro si ha, per linearità

$$A(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0) = \mathbf{0}$$

da cui detta \mathbf{q} la differenza $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0$ riesce \mathbf{q} appartenente al nucleo di A e quindi

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0 + (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0) = \mathbf{u}_0 + \mathbf{q}$$

Viceversa per ogni \mathbf{q} appartenente al nucleo di A si ha, ovviamente per linearità,

$$A(\mathbf{u}_0 + \mathbf{q}) = A\mathbf{u}_0 + A\mathbf{q} = A\mathbf{u}_0 = \mathbf{p}$$

□

COROLLARIO 6.7. *Se le colonne della matrice A sono linearmente indipendenti allora l'equazione $A\mathbf{u} = \mathbf{p}$ nell'incognita \mathbf{u} se ha soluzione ne ha una sola.*

DIMOSTRAZIONE. Tenuto conto della [Proposizione 6.2](#) il nucleo di A è formato dal solo vettore nullo: quindi, tenuto conto della [Proposizione 6.6](#) se $A\mathbf{u}_0 = \mathbf{p}$ anche tutte le (altre) soluzioni sono $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0 + \mathbf{0} = \mathbf{u}_0$. □

CAPITOLO 4

Determinanti

1. Il caso 2×2 e quello 3×3

Il determinante di una matrice 2×2 è definito come

$$\text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

ed è indicato con la notazione $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Il determinante di una matrice 3×3 è definibile, per ricorrenza, come

$$\text{Det} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & k \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

dove nei tre determinanti a secondo membro si riconoscono i determinanti delle matrici ricavate sopprimendo dalla matrice 3×3 la prima riga e, rispettivamente, la prima, la seconda o la terza colonna.

1.1. La regola di Sarrus.

L'espressione per il determinante di una matrice 3×3 si ottiene anche con la regola di Sarrus basata sul costruire la matrice di 5 colonne ottenuta ripetendo dopo le prime tre colonne nuovamente la prima e la seconda colonna

$$\begin{pmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{pmatrix}$$

e sommando i prodotti delle prime tre diagonali principali, rosse in figura, e sottraendo quelli delle ultime tre diagonali secondarie, blu in figura.

$$\text{det } A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$$

2. Proprietá dei determinanti

Si puó dimostrare che:

- scambiando tra loro due righe o due colonne di una matrice il determinante cambia di segno,
- moltiplicando gli elementi di una stessa colonna o di una stessa riga per un fattore ρ il determinante risulta moltiplicato per tale stesso fattore,
- sostituendo una colonna o una riga con una combinazione lineare delle altre righe o delle altre colonne il determinante non cambia,
- trasponendo una matrice quadrata, cioè disponendo le sue colonne come righe e viceversa, il determinante non cambia,
- il determinante di una matrice diagonale o di una matrice triangolare è il prodotto degli elementi della diagonale.

2.1. Significato geometrico.

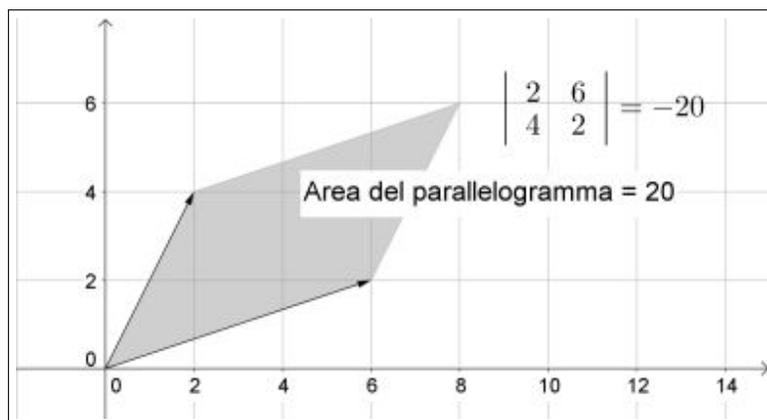


FIGURA 1. Determinanti e area del parallelogramma

Il modulo del determinante della matrice 2×2 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ rappresenta l'area del parallelogramma che ha come lati i due vettori (a, c) e (b, d) .

Il modulo del determinante della matrice 3×3 $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ rappresenta il volume del parallelepipedo, in generale non retto, che ha come lati i tre vettori (a, d, g) , (b, e, h) e (c, f, i) .

Tali proprietà aiutano a comprendere come l'annullarsi del determinante corrisponda, nel caso 2×2 al parallelismo dei vettori colonne (o righe) di una matrice 2×2 e nel caso 3×3 all'appartenere di un vettore al piano determinato dagli altri due.

TEOREMA 2.1. *Condizione necessaria e sufficiente perchè due vettori bidimensionali o tre vettori tridimensionali siano linearmente dipendenti è che la matrice da essi formata abbia determinante nullo.*

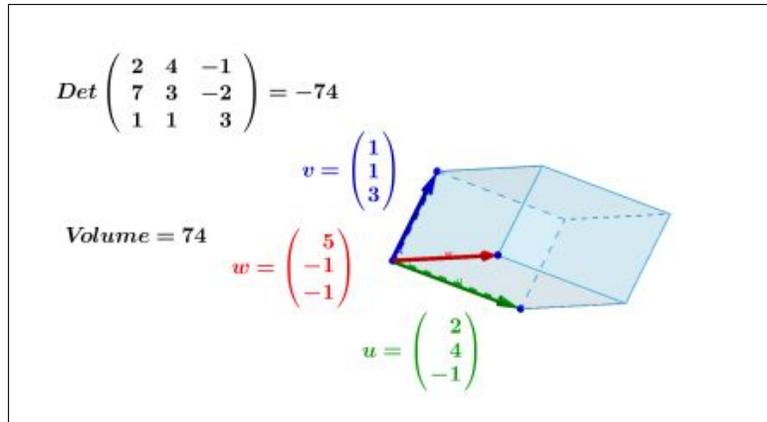


FIGURA 2. Determinanti e volume del prisma

3. Prodotto vettoriale in \mathbb{R}^3

Assegnati due vettori

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

si definisce loro prodotto vettoriale $\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ il vettore di componenti

$$w_1 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \quad w_2 = - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \quad w_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

vettore che si ricorda bene con la suggestiva notazione in forma di determinante 3×3

$$\mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

avendo indicato

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

È facile riconoscere che

$$\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

3.1. Proprietà del prodotto vettoriale.

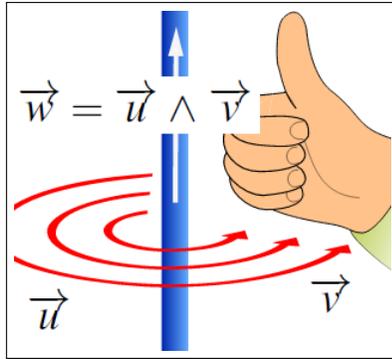
- $\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è ortogonale sia a \mathbf{u} che a \mathbf{v} ,
- se $\mathbf{u} \neq 0$ e $\mathbf{v} \neq 0$ allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = 0$ se e solo \mathbf{u} e \mathbf{v} sono paralleli,
- dati tre vettori \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} i prodotti scalari

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}), \quad \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \wedge \mathbf{u})$$

sono tutti e tre uguali e il loro valore assoluto rappresenta il volume del prisma che ha i tre vettori come lati,

- riesce

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \pm \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$



DEFINIZIONE 3.1. Tre vettori \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} , considerati nell'ordine indicato, si dicono costituire una terna destrorsa se

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} > 0$$

La terna

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

è destrorsa.

Una lettura intuitiva del carattere destrorso di una terna \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} si ha pensando a \mathbf{w} come la direzione in cui avanza (retrocede) una vite ruotata da \mathbf{u} a \mathbf{v} in senso antiorario.

4. Le matrici a scalini

DEFINIZIONE 4.1. Una matrice A si dice a scalini se verifica entrambe le seguenti proprietà:

- Se una riga è nulla, tutte le righe ad essa sottostanti sono nulle.
- Sotto il primo elemento non nullo di ciascuna riga, e sotto tutti gli zeri che lo precedono, ci sono solo elementi nulli.

In una matrice a scalini, il primo elemento non nullo di una riga è detto il *pivot* della data riga. Osserviamo che il numero dei *pivot* uguaglia il numero delle righe non nulle.

Le proprietà osservate sui determinanti consentono di manipolare una matrice senza modificare il determinante:

- sottrarre da una riga una qualsiasi combinazione lineare delle altre righe,
- sottrarre da una colonna una qualsiasi combinazione lineare delle altre colonne.

Tali due operazioni consentono di ridurre ogni matrice alla forma detta *a scalini* :

ESEMPIO 4.2. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Sottraendo dalla seconda la prima riga moltiplicata per 5 e dalla terza ancora la prima moltiplicata per 9 si ottiene

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{pmatrix}$$

Sottraendo ancora dalla terza riga il doppio della seconda si ottiene

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matrice a scalini che si dice associata a quella di partenza.

Il determinante di una matrice è pertanto il prodotto degli elementi della diagonale principale della matrice a scalini ad essa associata.

5. Determinanti generali

Assegnata la matrice M di tipo $n \times n$ possiamo considerare per ogni scelta $i, j \in [1, n]$ la nuova matrice M_{ij} di tipo $(n-1) \times (n-1)$ formata cancellando da M la colonna j -esima e la riga i -esima che si chiama minore di M corrispondente all'elemento a_{ij} .

Il numero

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

si chiama complemento algebrico dell'elemento a_{ij} della matrice M .

DEFINIZIONE 5.1. *Il determinante di una matrice M di tipo $n \times n$ è la somma degli elementi di una qualsiasi riga o di una qualsiasi colonna per i corrispondenti complementi algebrici*

$$\det(M) = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

È evidente il carattere ricorsivo della definizione posta: il calcolo del determinante di una matrice $n \times n$ è ricondotto al calcolo di n determinanti di matrici $(n-1) \times (n-1)$, i complementi algebrici.

Quindi possedendo l'algoritmo di calcolo del determinante per matrici 3×3 si costruisce l'algoritmo per quelle 4×4 , con quello di queste si costruisce l'algoritmo per le 5×5 ecc. ecc.

ESEMPIO 5.2. *Sia*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(M) = -7$$

La matrice dei determinanti dei minori $\det(M_{ij})$ e quella dei complementi algebrici A_{ij} sono pertanto, nell'ordine le seguenti

$$(M_{ij}) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 10 & 0 & -11 \end{pmatrix} \quad (A_{ij}) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ 10 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$

Verifichiamo come il valore $\det(M)$ coincida con la somma degli elementi della prima riga per i rispettivi complementi algebrici

$$\sum_{j=1}^3 a_{1j}A_{1j} = 1 \times (-3) + 3 \times (0) - 1 \times 4 = -7$$

Analogamente servendosi della seconda riga

$$\sum_{j=1}^3 a_{2j}A_{2j} = 4 \times (-1) + 1 \times (0) + 3 \times (-1) = -7$$

Analogamente ancora servendosi, ad esempio della terza colonna

$$\sum_{i=1}^3 a_{i3}A_{i3} = -1 \times (4) + 3 \times (-1) + 0 \times (-111) = -7$$

5.1. Proprietà dei determinanti.

Sia in generale

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = (A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$$

La funzione

$$\det: A = (A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) \rightarrow R$$

è una funzione che ha i seguenti requisiti:

- è *multilineare rispetto alle colonne*: cioè se, ad esempio la prima colonna A_1 è sostituita con

$$c_1B + c_2C$$

allora

$$\det(c_1B + c_2C, A_2, A_3, \dots, A_n) = c_1 \det(B, A_2, A_3, \dots, A_n) + c_2 \det(C, A_2, A_3, \dots, A_n)$$

- è *alternata* cioè scambiando tra loro due colonne si ha un cambio di segno: ad esempio, scambiando le prime due colonne,

$$\det(A_2, A_1, A_3, \dots, A_n) = -\det(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n)$$

- è tale che se A è la matrice unitaria $\det(A) = 1$.

COROLLARIO 5.3. *La seconda proprietà implica che $\det(A_1, A_2, \dots, A_n) = 0$ se due colonne sono uguali, proprietà che unita al carattere multilineare implica che se A_1, A_2, \dots, A_n sono linearmente dipendenti allora riesce $\det(A_1, A_2, \dots, A_n) = 0$.*

ESEMPIO 5.4. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right)$$

Indicati con

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

si ha

$$\begin{aligned} A &= (aE_1 + cE_2, bE_1 + dE_2) \rightarrow \det(A) = \\ &= ab \det(E_1, E_1) + ad \det(E_1, E_2) + cb \det(E_2, E_1) + cd \det(E_2, E_2) \end{aligned}$$

Tenute presenti le proprietà della funzione \det , cioè

$$\det(E_1, E_1) = \det(E_2, E_2) = 0, \det(E_1, E_2) = 1, \det(E_2, E_1) = -1$$

si ha

$$\det(A) = ad \det(E_1, E_2) + cb \det(E_2, E_1) = ad - cb$$

6. Il teorema di Binet

TEOREMA 6.1. *Siano A e B due matrici quadrate di ordine n allora riesce*

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

DIMOSTRAZIONE. Sia A fissa e poniamo $C = A \cdot B$: le colonne di C sono combinazioni lineari delle colonne di B , quindi

$$\det(C) = \gamma \det(B)$$

con $\gamma = f(A)$. Supponiamo ora $B = U$ la matrice unitaria:

$$\begin{cases} C = A \cdot U = A \\ \det(C) = \det(A) = \gamma \det(U) = \gamma \end{cases} \rightarrow \gamma = \det(A)$$

Ne segue quindi, vedi pagina 17,

$$\det(C) = \det(A \cdot B) = \det(A) \det(B)$$

□

PROPOSIZIONE 6.2. *Sia M una matrice quadrata 3×3 : detto \triangle_{ABC} il triangolo determinato da A, B, C e $\triangle_{A'B'C'}$ quello determinato dai trasformati $A' = M.A, B' = M.B, C' = M.C$ riesce*

$$\text{Area}(\triangle_{A'B'C'}) = |\det(M)| \text{Area}(\triangle_{ABC})$$

Il valore $\det(M)$ rappresenta quindi il fattore di modifica delle aree.

Sotto questo punto di vista il Teorema di Binet risulta del tutto evidente:

- la prima trasformazione, B , produce una dilatazione di fattore $|\det(B)|$,
- la seconda, A , ne produce una di fattore $|\det(A)|$,
- la loro composta $C = A.B$ produce inevitabilmente una trasformazione di fattore $|\det(A)| |\det(B)|$

da cui non può che essere

$$|\det(C)| = |\det(A) \det(B)|$$

7. Il rango di una matrice

Sia

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

una matrice $m \times n$ assegnata: essa determina naturalmente

- gli n vettori colonna, vettori ad m componenti ciascuno,
- gli m vettori riga, vettori ad n componenti ciascuno

ESEMPIO 7.1. Sia

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Ci sono 3 vettori colonna a due componenti ciascuno $(1,4)$, $(2,5)$, $(3,6)$ e 2 vettori riga a 3 componenti ciascuno $(1,2,3)$, $(4,5,6)$.

DEFINIZIONE 7.2. Il massimo numero di vettori colonna di una matrice tra loro linearmente indipendenti si dice rango della matrice: tale numero coincide anche con il massimo numero di righe tra loro linearmente indipendenti.

Per convenzione, il rango della matrice nulla è posto uguale a zero. Tutte le altre matrici hanno rango maggiore o uguale a 1.

PROBLEMA:

*Come determinare il massimo numero di vettori colonna di A indipendenti ?
e come determinare il massimo numero di vettori riga indipendenti ?
In una parola, come determinare il rango di una matrice ?*

Esiste un algoritmo per rispondere alle domande poste: l'algoritmo si serve dei determinanti delle matrici quadrate contenute in \mathbf{A}

DEFINIZIONE 7.3. I minori di una matrice \mathbf{A} di tipo $n \times m$ sono tutte le sottomatrici quadrate di \mathbf{A} : un minore si ottiene cioè scegliendo p righe e p colonne di \mathbf{A} , con $p \leq \min(m,n)$: il numero p si dice ordine del minore.

ESEMPIO 7.4. Sia

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

abbiamo 9 minori di ordine 1, 9 minori di ordine 2

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ g & h \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix}$$

e, ovviamente un solo minore di ordine 3, l'intera matrice \mathbf{A} stessa.

DEFINIZIONE 7.5. Dato un minore M di ordine s di una matrice A , diremo che il minore M_0 di ordine $s + 1$ è un orlato di M se esso contiene M , se cioè si ottiene da M aggiungendo ad esso gli elementi di un'altra riga e un'altra colonna di A .

TEOREMA 7.6. Una matrice A di tipo $m \times n$ ha rango p se:

- Esiste almeno un minore di ordine p con determinante non nullo.
- Tutti i minori di ordine $p + 1$ (se esistono) hanno determinante nullo.

La seguente *Proposizione* riduce in qualche modo il numero dei minori da controllare per determinare il rango di una matrice:

PROPOSIZIONE 7.7. Sia A una matrice $m \times n$ e M un suo minore di ordine p con determinante non nullo. Se tutti i minori orlati di M hanno determinante nullo allora il rango di A è esattamente p (l'ordine di M).

L'algoritmo più efficace per calcolare il rango di una matrice è basato sulla sua riduzione a matrice a scalini, detto algoritmo di Gauss, e sul semplice conto dei *pivot* che essa conterrà:

TEOREMA 7.8. Il rango di una matrice a scalini uguaglia il numero dei suoi *pivot*.

ESEMPIO 7.9. Consideriamo l'esempio di pagina 24: la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

è stata ridotta ad una a scalini che ha due soli *pivot*: pertanto si dovrà riconoscere che la matrice A ha rango 2.

Infatti:

- il minore $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ ha determinante diverso da zero,
- i due minori orlati di esso

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

hanno entrambi determinante zero.

CAPITOLO 5

Sistemi lineari

1. Sistemi lineari in due incognite

Un sistema lineare di due equazioni in due incognite, denotate con x e y

$$(5) \quad \begin{cases} ax + by = h \\ cx + dy = k \end{cases}$$

rappresenta il problema di determinare i numeri x_0 e y_0 che soddisfino entrambe le equazioni: i coefficienti a, b, c, d e i termini noti h, k sono numeri assegnati.

ESEMPIO 1.1. *Determinare i numeri x_0 e y_0 che abbiano somma 10 e differenza 4*

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Sommando membro a membro si ottiene $2x = 14 \Rightarrow x = 7$ da cui, ovviamente si trova $x_0 = 7, y_0 = 3$.

Un sistema lineare di due equazioni in due incognite può essere interpretato in modo geometrico come determinazione del punto (x_0, y_0) di intersezione delle due rette

$$r_1 : ax + by = h \quad r_2 : cx + dy = k$$

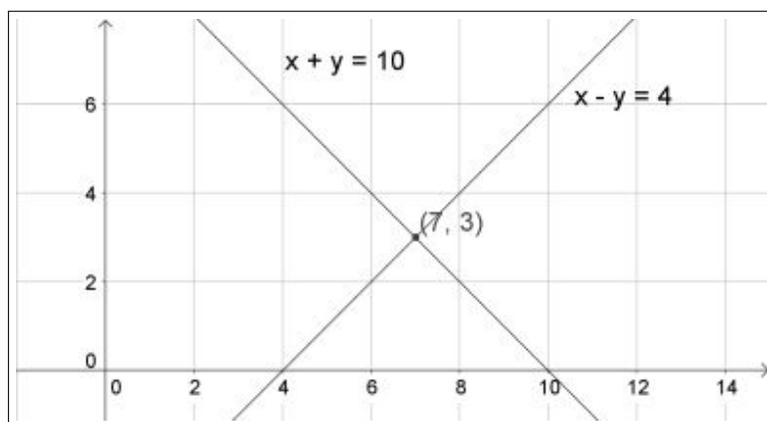


FIGURA 1. Intersezione di due rette

Può essere interpretato in modo vettoriale come la determinazione dei due coefficienti x_0 ed y_0 da utilizzare per ottenere che

$$x_0 \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y_0 \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

ESEMPIO 1.2. Sia assegnato il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

si devono trovare i coefficienti x_0 e y_0 tali che

$$x_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

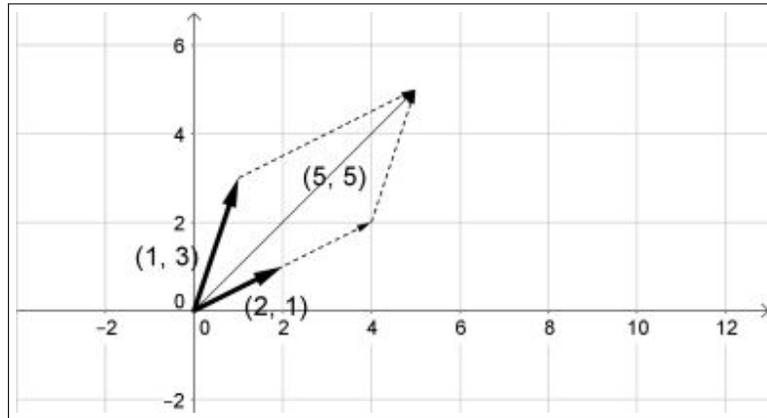


FIGURA 2. Combinazione lineare di due vettori

Sono evidenti le risposte: $x_0 = 2$, $y_0 = 1$.

Letto infine nella forma di prodotto matrice - vettore

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \quad \text{ovvero} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

corrisponde a cercare il vettore $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ che venga trasformato dal prodotto con la matrice A in $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$

1.1. Problemi collegati.

Le interpretazioni di un sistema proposte suggeriscono alcuni problemi:

- il punto di intersezione di due rette
 - esiste ed è unico per due rette distinte e incidenti,
 - non esiste se le due rette distinte sono parallele,
 - è indeterminato, nel senso che ne esistono infiniti, se le due rette coincidono,
- l'interpretazione vettoriale mostra che solo se i due vettori $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ sono non paralleli esiste una e una sola coppia (x_0, y_0) adatta mentre se sono paralleli e $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ non è anche lui parallelo ad essi non esiste alcuna coppia soluzione,

- la terza interpretazione, quella matriciale, apre una problematica importante circa l'invertibilità o meno dell'operazione di prodotto matrice - vettore.
Si pensi al caso simile, unidimensionale,

$$ax = h$$

che per essere risolvibile in x qualunque sia h richiede $a \neq 0$.

1.2. Esercizi.

ESERCIZIO 1.3. *Determinare per quali valori del numero k il sistema*

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 21x + 35y = 15k \end{cases}$$
ammette soluzioni.

ESERCIZIO 1.4. *Determinare i coefficienti α e β tali che*

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

ESERCIZIO 1.5. *Determinare nel piano cartesiano l'intersezione delle due rette $x + 3y - 1 = 0$ e $2x - 2y + 5 = 0$.*

1.3. Le formule di Cramer. Le formule di Cramer¹ sono espressioni eleganti delle soluzioni di sistemi lineari.

Moltiplicando membro a membro le equazioni del sistema (5) per i quattro coefficienti d, b, c, a si ottengono le seguenti implicazioni

$$(6) \quad \begin{cases} ax + by = h \\ cx + dy = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} adx + bdy = dh \\ bcx + bdy = bk \end{cases} \\ \begin{cases} acx + bcy = ch \\ acx + ady = ak \end{cases} \end{cases}$$

da cui, sottraendo membro a membro, si ottengono le due equazioni

$$(7) \quad (ad - bc)x = dh - bk, \quad (ad - bc)y = ak - ch$$

Se $ad - bc \neq 0$ le (7) determinano direttamente la coppia (x_0, y_0) soluzione del sistema

$$(8) \quad x_0 = \frac{dh - bk}{ad - bc}, \quad y_0 = \frac{ak - ch}{ad - bc}.$$

La particolare eleganza delle formule di Cramer emerge servendosi dei determinanti: le formule (8) si scrivono in tal caso

$$(9) \quad x_0 = \frac{\begin{vmatrix} h & b \\ k & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a & h \\ c & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

¹Gabriel Cramer (31-07-1704, 4-01-1752)

Stesso denominatore, numeratori che includono i termini noti: nella prima colonna per la prima incognita, nella seconda colonna per la seconda incognita.

TEOREMA 1.6. Il sistema $\begin{cases} ax+by=h \\ cx+dy=k \end{cases}$ con $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ ammette una e una sola soluzione (x_0, y_0) espressa dalle formule

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} h & b \\ k & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} a & h \\ c & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

1.4. Il caso $ad - bc = 0$.

Se $ad - bc = 0$ il sistema incorre in due patologie collegate al tipo di secondi membri h e k assegnati:

- può non ammettere alcuna soluzione, essere sistema "impossibile",
- può ammettere più soluzioni diverse, essere sistema "indeterminato",

Se $ad - bc = 0$ infatti i primi membri delle (7)

$$(ad - bc)x = dh - bk, \quad (ad - bc)y = ak - ch$$

sono entrambi nulli e quindi se h e k non sono tali da annullare anche i secondi membri, cioè se

$$dh - bk \neq 0, \quad \text{oppure} \quad ak - ch \neq 0$$

il sistema è "impossibile", cioè non ammette alcuna soluzione.

Secondo la lettura geometrica il caso di sistema "impossibile" corrisponde al fatto che le due rette

$$ax + by = h, \quad cx + dy = k$$

sono parallele e distinte.

Se

$$(10) \quad ad = bc, \quad dh = bk, \quad ak = ch$$

occorre distinguere due casi: quello in cui uno almeno dei coefficienti a, b, c, d , sia diverso da zero e quello in cui invece i coefficienti siano tutti nulli.

- Sia, ad esempio, $a \neq 0$:

$$\begin{cases} ax+by=h \\ cx+dy=k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by=h \\ acx+ady=ak \end{cases}$$

tenuto conto che $ad = bc$ e $ak = ch$

$$\begin{cases} ax+by=h \\ acx+bcy=ch \end{cases} \Leftrightarrow ax+by=h$$

Le infinite coppie (x, y) che soddisfano l'ultima equazione sono soluzioni del sistema che pertanto ha infinite soluzioni, tutti i punti della retta $ax + by = h$.

- $a = b = c = d = 0$

$$\begin{cases} 0x + 0y = h \\ 0x + 0y = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 0 \\ k = 0 \end{cases}$$

Il sistema è compatibile se e solo se $h = k = 0$ e le sue soluzioni sono tutti i punti del piano.

OSSERVAZIONE 1.7. Si noti che l'insieme delle soluzioni del sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \quad \begin{cases} ax + by = h \\ cx + dy = k \end{cases}$$

può essere solo uno dei seguenti insiemi

- tutto il piano \mathbb{R}^2 ,
- una retta di \mathbb{R}^2 ,
- un punto di \mathbb{R}^2 .

Le formule di Cramer provano che se $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ allora

- il nucleo di \mathcal{A} è costituito dal solo vettore nullo,
- l'immagine di \mathcal{A} è tutto \mathbb{R}^2 .

2. La matrice inversa

Le formule di Cramer stabiliscono che se $ad - bc \neq 0$ il sistema

$$(11) \quad \begin{cases} ax + by = h \\ cx + dy = k \end{cases} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

ha una e una sola soluzione espressa da

$$x_0 = \frac{dh - bk}{ad - bc}, \quad y_0 = \frac{ak - ch}{ad - bc}$$

Con le notazioni del prodotto matrice vettore le formule risolutive si scrivono come

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad - bc} & -\frac{b}{ad - bc} \\ -\frac{c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

In altri termini la soluzione del sistema (11) si esprime come il prodotto della matrice

$$B = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

per il vettore dei termini noti $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$.

La matrice B per il ruolo che svolge prende il nome di matrice inversa di A e si indica con A^{-1} .

3. Determinanti e formule di Cramer

Consideriamo un sistema di tre equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Indicati con A_1, A_2, A_3 i tre vettori colonna della matrice dei coefficienti e con B il vettore dei termini noti, il sistema assegnato equivale a

$$x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 = B$$

Supponiamo che α, β, γ siano tre soluzioni, cioè supponiamo che

$$B = \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3$$

Calcoliamo ora il determinante della matrice (B, A_2, A_3) :

$$\det(B, A_2, A_3) = \det(\alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3, A_2, A_3) = \alpha \det(A_1, A_2, A_3)$$

Riesce quindi,

$$\alpha = \frac{\det(B, A_2, A_3)}{\det(A_1, A_2, A_3)}$$

purchè $\det(A_1, A_2, A_3) \neq 0$.

Analogamente si ottengono le altre formule

$$\beta = \frac{\det(A_1, B, A_3)}{\det(A_1, A_2, A_3)}, \quad \gamma = \frac{\det(A_1, A_2, B)}{\det(A_1, A_2, A_3)}$$

3.1. Esercizi.

ESERCIZIO 3.1. Scrivere le formule di Cramer per il sistema letterale $\begin{cases} \lambda x + 3y = 1 \\ -x + 2\lambda y = \mu \end{cases}$

ESERCIZIO 3.2. Determinare per quali h e k il vettore (x_0, y_0) soluzione del sistema $\begin{cases} \lambda x + 3y = h \\ -3x - y = k \end{cases}$ è ortogonale al vettore (h, k) dei termini noti.

ESERCIZIO 3.3. Per quali valori λ il vettore soluzione del sistema $\begin{cases} \lambda x + y = 0 \\ x + \lambda y = 1 \end{cases}$ ha modulo maggiore?

ESERCIZIO 3.4. Determinare il nucleo e l'immagine della trasformazione \mathcal{A} determinata dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$

ESERCIZIO 3.5. Detta \mathcal{A} la trasformazione determinata dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ determinare la soluzione dell'equazione

$$\mathcal{A}p + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 3.6. Determinare la matrice inversa di $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

3.2. Il caso dei sistemi $n \times n$.

Analogamente le soluzioni di un sistema di n equazioni in n incognite si esprimono, se la matrice dei coefficienti ha determinante diverso da zero come

$$x_k = \frac{\det(A_1, \dots, A_{k-1}, B, A_{k+1}, \dots, A_n)}{\det(A_1, \dots, A_n)}, \quad k = 1, \dots, n$$

essendo B il vettore dei termini noti.

Si noti l'analogia con le formule del caso 2×2 : tutte le incognite sono espresse da frazioni che hanno a denominatore il determinante della matrice dei coefficienti e a numeratori determinanti di matrici che includono i termini noti: nella prima colonna per la prima incognita, nella seconda colonna per la seconda incognita, ...

4. Il metodo di Gauss

I sistemi lineari di più facile soluzione sono naturalmente quelli con matrice dei coefficienti diagonale o almeno triangolare: così, ad esempio il sistema

$$\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 3 \\ y + z = 1 \\ 2z = 6 \end{cases}$$

Permette di ricavare direttamente dalla terza equazione $z = 3$ da cui, sostituendo nelle altre due si perviene a

$$\begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ y = -1 \end{cases}$$

e quindi, ricavato $y = -1$ si sostituisce nella prima e si arriva a $3x = -3$ ovvero $x = -1$.

Il procedimento detto *metodo di Gauss* consiste in una sequela di passaggi leciti attraverso il quale ridurre un sistema alla comoda forma *triangolare superiore* apprezzata nell'esempio precedente.

Consideriamo il *metodo di Gauss* sul seguente esempio

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{cases}$$

sottraendo membro a membro dalla seconda equazione il doppio della prima, e dalla terza il suo triplo si perviene al sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ \quad + 2y - 7z = -17 \\ \quad + 3y - 11z = -27 \end{cases}$$

Ancora sottraendo dalla terza equazione la seconda moltiplicata per $3/2$ si ha

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ \quad 2y - 7z = -17 \\ \quad \quad - \frac{1}{2}z = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Ne segue $z = 3$, $y = 2$ e $x = 1$.

Il metodo di Gauss è in generale vantaggioso rispetto alle formule di Cramer, vantaggioso nel senso che il numero di operazioni da eseguire per pervenire alle soluzioni è in generale minore di quello richiesto per le formule di Cramer.

Non si dimentichi tuttavia che la soluzione di un sistema è un problema banale che qualunque metodo permette di risolvere con carta e matita con pochissimo sforzo finché il numero di incognite e equazioni è basso, tre o quattro: il problema invece diviene estremamente complesso se il numero di equazioni lievita anche di non molto.

Per un sistema di 10 equazioni in 10 incognite le formule di Cramer richiedono l'esecuzione di oltre $11! = 39916800$ operazioni, richiesta che può mettere in difficoltà anche grossi computer.

5. Sistemi non-Cramer

Diamo questo nome ai sistemi lineari che non rientrano nel Teorema di Cramer:

- o di tipo non quadrato, cioè con un numero m di incognite diverso dal numero n di equazioni,
- o quadrati ma con determinante dei coefficienti nullo.

Consideriamo il sistema

$$(12) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \cdots = \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

Indicate con

- $A = (a_{ij})$ la matrice dei coefficienti delle incognite nelle varie equazioni,
- indicate con A_1, A_2, \dots, A_m le sue colonne,
- con B la colonna (b_1, b_2, \dots, b_n) dei termini noti delle equazioni del sistema

Il sistema (12) si può scrivere anche come

$$(13) \quad x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_mA_m = B$$

TEOREMA 5.1. *Il sistema (13) ha soluzione se e solo se il vettore B appartiene all'involuppo lineare $L(A_1, A_2, \dots, A_m)$ degli m vettori colonna della matrice.*

La soluzione è anche unica se gli m vettori colonna della matrice sono linearmente indipendenti.

Il teorema precedente viene spesso enunciato ricorrendo alla nozione di rango di una matrice, vedi Definizione di *rango* a pagina 28, nella forma detta di Rouchè-Capelli seguente

TEOREMA 5.2. *Il sistema (12) ha soluzione se e solo se la matrice A dei coefficienti e la matrice C detta completa ottenuta aggiungendo alle colonne di A la colonna B dei termini noti hanno lo stesso rango.*

Se inoltre tale comune rango coincide con il numero m delle incognite la soluzione è unica.

OSSERVAZIONE 5.3. *Come osservato precedentemente riguardo ai sistemi con numerose equazioni e/o incognite, anche il calcolo del rango della matrice A dei coefficienti e la verifica che la matrice completa C abbia lo stesso rango è lavoro numericamente estremamente complesso, assolutamente fuori della portata di carta e matita come pure di potenti computer; non appena le matrici con le quali lavorare escano dai semplici casi 2×2 , 3×3 o poco più.*

ESEMPIO 5.4. *Sia S il sistema*

$$\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 6x + 10y = \lambda \end{cases}$$

Determinare le proprietà del sistema al variare del parametro λ .

Si ha

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A) = 0$$

Si tratta di un sistema non-Cramer: il precedente Teorema di Rouchè-Capelli 5.2 afferma che ci sono soluzioni se e solo se

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 6 & 10 & \lambda \end{pmatrix}$$

Il rango di A , cioè il numero di colonne indipendenti è 1.

Il rango di B , cioè il numero di colonne indipendenti dipende dal valore di λ :

- *se $\lambda = 14$ anche il numero delle colonne indipendenti di B è 1*
- *se $\lambda \neq 14$ il numero di colonne indipendenti di B passa a 2*

Quindi se $\lambda = 14$ il sistema ha soluzioni, mentre se $\lambda \neq 14$ il sistema non ha soluzioni.

Essendo inoltre, per $\lambda = 14$ il comune rango delle due matrici 1, minore del numero 2 delle incognite il sistema avrà più soluzioni.

I risultati ottenuti sono del resto evidenti: il primo membro della seconda equazione, $6x + 10y$ è il doppio di quello $3x + 5y$ della prima, quindi anche i secondi membri devono stare nella stessa proporzione, se il termine noto della prima è 7 quello della seconda deve essere il doppio, $\lambda = 14$.

Con tale scelta, inevitabile di $\lambda = 14$ si osserva che le due equazioni sono di fatto la stessa: quindi tutte le coppie (x, y) che soddisfano la prima equazione soddisferanno anche la seconda, saranno cioè soluzioni del sistema.

5.1. Rouchè Capelli: immagine grafica.

Sia r il rango di entrambe le matrici A dei coefficienti e C della matrice ottenuta aggiungendo ad A la ulteriore colonna dei termini noti del sistema (12).

- selezioniamo le r righe e le r colonne che formano un minore M (matrice quadrata $r \times r$) con determinante diverso da zero, per semplicità immaginiamo che siano le primi r colonne e le prime r righe,

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l|l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r & + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \cdots & = \cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rm}x_m & + \cdots + a_{rm}x_m = b_r \\ \hline \cdots & = \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nr}x_r & + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{array} \right.$$

- consideriamo il sistema di matrice M , avendo portato a secondo membro le $m - r$ colonne non incluse in M , e attribuiti loro $m - r$ valori parametrici ξ_k , $k = r + 1, \dots, m$ liberamente,

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}\xi_{r+1} - \cdots - a_{1m}\xi_m \\ \cdots = \cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rm}x_m = b_r - a_{r,r+1}\xi_{r+1} - \cdots - a_{rm}\xi_m \end{array} \right.$$

- risolviamo con le formule di Cramer il sistema di matrice M : le soluzioni trovate dipenderanno dagli $m - r$ parametri liberi ξ_k , $k = r + 1, \dots, m$ introdotti (naturalmente se $r = m$ non ci sono parametri liberi introdotti).
- si può provare che, essendo r il rango della matrice completa, le soluzioni trovate soddisfano anche le $n - r$ equazioni delle righe non incluse in M

6. Sistemi omogenei

6.1. Indipendenza lineare. n vettori $v_1 = \{a_{11}, a_{1,2}, \dots, a_{1,m}\}, \dots, v_n = \{a_{n1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,m}\}$ sono linearmente indipendenti se e solo se

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

ovvero se il sistema lineare omogeneo

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,m}x_m = 0 \\ \cdots = 0 \\ a_{n1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,m}x_m = 0 \end{array} \right.$$

ha solo la soluzione nulla. Cosa che si verifica se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è pari al numero m delle incognite.

CAPITOLO 6

Autovalori e autovettori

1. Il caso di matrici 2×2

Assegnata la matrice A e detta \mathcal{A} la trasformazione di \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^2 da essa determinata cerchiamo i vettori non nulli \mathbf{p} e i numeri λ tali che

$$(16) \quad \mathcal{A}\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p}$$

ovvero $(\mathcal{A} - \lambda)\mathbf{p} = 0$.

Cerchiamo cioè gli eventuali vettori non nulli \mathbf{p} che vengano trasformati da A in vettori $\mathcal{A}\mathbf{p}$ che abbiano la stessa direzione.

In dimensione 1 la matrice A si riduce ad un solo numero a e l'equazione $(\mathcal{A} - \lambda)\mathbf{p} = 0$ ha soluzioni \mathbf{p} non nulle se e solo se $\lambda = a$.

In dimensione maggiore il problema è piú articolato: consideriamo il caso di matrici

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$(\mathcal{A} - \lambda)\mathbf{p} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il problema corrisponde a cercare le (eventuali) soluzioni $\mathbf{p} = (u_0, v_0)$ non nulle del sistema

$$(17) \quad \begin{cases} (a - \lambda)u + bv = 0 \\ cu + (d - \lambda)v = 0 \end{cases}$$

che prendono il nome di *autovettori* della matrice.

Se \mathbf{p} è un autovettore allora anche ogni suo multiplo $\mu\mathbf{p}$ lo è: quindi quasi sempre ha interesse scegliere l'autovettore

$$\mathbf{p}_0 = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p}$$

autovettore di modulo unitario.

Le formule di Cramer dicono che se

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} \neq 0$$

l'unica soluzione del sistema (17), sistema con i termini noti nulli, è il vettore nullo.

Restano da considerare i valori λ per i quali il determinante della matrice è nullo

$$(18) \quad \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - \lambda(a + d) + ad - bc = 0$$

Se λ soddisfa l'equazione di secondo grado (18) detta *equazione caratteristica* della matrice il sistema (17) ha soluzioni (u_0, v_0) non nulle.

DEFINIZIONE 1.1. I valori λ che soddisfano l'equazione di secondo grado (18) si dicono AUTOVALORI DELLA MATRICE $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Per ciascun autovalore λ_i ogni soluzione non nulla del sistema (17) si dice AUTOVETTORE DI TALE MATRICE relativo a tale AUTOVALORE.

L'equazione $\lambda^2 - \lambda(a+d) + ad - bc = 0$ che determina gli autovalori della matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ può avere, come tutte le equazioni di secondo grado,

- due radici reali distinte,
- una sola radice reale,
- nessuna radice reale

PROPOSIZIONE 1.2. Se la matrice ha due autovalori distinti, esistono due autovettori distinti \mathbf{p}_1 e \mathbf{p}_2 linearmente indipendenti.

DIMOSTRAZIONE. Siano \mathbf{p}_1 un autovettore corrispondente a λ_1 e \mathbf{p}_2 uno corrispondente a λ_2 : se, per assurdo fosse

$$\mathbf{p}_2 = \mu \mathbf{p}_1$$

si avrebbe, per linearità,

$$\mathcal{A} \mathbf{p}_1 = \lambda_1 \mathbf{p}_1 \Rightarrow \mathcal{A} \mu \mathbf{p}_1 = \lambda_1 \mu \mathbf{p}_1 \rightarrow \mathcal{A} \mathbf{p}_2 = \lambda_1 \mathbf{p}_2$$

da cui

$$\begin{cases} \mathcal{A} \mathbf{p}_2 = \lambda_1 \mathbf{p}_2 \\ \mathcal{A} \mathbf{p}_2 = \lambda_2 \mathbf{p}_2 \end{cases} \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

contrariamente all'ipotesi $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

□

Nel caso di un solo autovalore possono aversi due autovettori linearmente indipendenti o uno soltanto; nel terzo, nessun autovalore, naturalmente non ci sono autovettori.

ESEMPIO 1.3. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0$$

ha un solo autovalore $\lambda = 1$.

Si tratta della matrice detta identità infatti riesce, qualunque sia il vettore p

$$Ap = p$$

Quindi A , pur possedendo un solo autovalore ha tuttavia ancora due autovettori linearmente indipendenti

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

come pure qualsiasi altra coppia di vettori linearmente indipendenti. Anzi, nel caso della matrice identità tutti i vettori sono autovettori.

ESEMPIO 1.4. *La matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0$$

ha un solo autovalore $\lambda = 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} u+v = u \\ v = v \end{cases} \rightarrow v = 0$$

Gli autovettori sono pertanto tutti multipli del solo $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Il caso di matrici di ordine 3×3 (o superiore) si tratta in maniera analoga:

- si studia l'equazione caratteristica $\text{Det}(A - \lambda I) = 0$, equazione di terzo grado nell'incognita λ , essendo naturalmente I la matrice unitaria 3×3 ,
- per ogni radice λ_i di tale equazione si cercano i corrispondenti autovettori, le soluzioni non nulle del sistema $(A - \lambda_i)\mathbf{p} = 0$,
- a seconda del numero di radici reali distinte che l'equazione cubica caratteristica possiede si possono avere tre, due o un solo autovettore (si ricordi infatti che le equazioni cubiche una radice reale l'hanno sempre!).

2. Matrici diagonalizzabili

DEFINIZIONE 2.1. *La matrice A si dice diagonalizzabile se i suoi autovettori formano una base.*

Siano infatti u_1, u_2, \dots, u_n autovettori di A : $Au_k = \lambda_k u_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ che formino una base dello spazio vettoriale.

Allora ogni vettore \mathbf{v} dello spazio si scrive combinazione lineare

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_n \mathbf{u}_n$$

e si ha quindi

$$A\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n c_k A\mathbf{u}_k = \sum_{k=1}^n c_k \lambda_k \mathbf{u}_k$$

I coefficienti c_1, c_2, \dots, c_n rappresentano le coordinate del vettore \mathbf{v} nella base costituita dagli n autovettori u_1, u_2, \dots, u_n : la formula osservata

$$A\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n c_k \lambda_k \mathbf{u}_k$$

corrisponde alla

$$A \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 c_1 \\ \lambda_2 c_2 \\ \dots \\ \lambda_n c_n \end{pmatrix}$$

ovvero al fatto che A sia la matrice diagonale

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

PROPOSIZIONE 2.2. *Le matrici 2×2 simmetriche hanno due autovalori distinti, quindi due autovettori linearmente indipendenti, quindi sono diagonalizzabili.*

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad b \neq 0$$

L'equazione caratteristica è

$$(a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} \left\{ a + c + \sqrt{a^2 + ac + c^2 + b^2} \right\} \\ \lambda_2 = \frac{1}{2} \left\{ a + c - \sqrt{a^2 + ac + c^2 + b^2} \right\} \end{cases}$$

autovalori $\lambda_1 \neq \lambda_2$ distinti tenuto conto che $b \neq 0 \rightarrow a^2 + ac + c^2 + b^2 > 0$.

I due autovettori corrispondenti \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 sono quindi, vedi Proposizione 1.2 di pagina 42, necessariamente indipendenti. \square

Sussiste il seguente, fondamentale teorema, che estende la proposizione precedente, di cui omettiamo la dimostrazione:

TEOREMA 2.3. *Ogni matrice simmetrica è diagonalizzabile.*

2.1. Esercizi.

ESERCIZIO 2.4. *Determinare gli autovalori e gli autovettori di una matrice diagonale*

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 2.5. *Determinare gli autovalori e gli autovettori della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$*

ESERCIZIO 2.6. *Determinare per quali valori di k la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ -k & 1 \end{pmatrix}$ ha l'autovalore $\lambda = 4$.*

CAPITOLO 7

Complementi

1. Coefficienti variabili

Quanto osservato per sistemi lineari a coefficienti e termini noti numeri assegnati può essere naturalmente proposto anche nel caso di coefficienti e/o termini noti funzioni di una variabile x .

Naturalmente se i coefficienti e i termini noti variano al variare di x anche le soluzioni, ammesso che esistano, varieranno al variare di x .

Si può enunciare il teorema di Cramer

TEOREMA 1.1. *Il sistema lineare*

$$\begin{cases} a(x)u + b(x)v = h(x) \\ c(x)u + d(x)v = k(x) \end{cases}$$

per tutti gli x tali che $\begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix} \neq 0$ ammette una e una sola soluzione $(u(x), v(x))$ espressa dalle formule

$$u(x) = \frac{\begin{vmatrix} h(x) & b(x) \\ k(x) & d(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}}, \quad v(x) = \frac{\begin{vmatrix} a(x) & h(x) \\ c(x) & k(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}}$$

2. Derivata di un determinante

Assegnata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}$$

con $a(x), b(x), c(x), d(x)$ funzioni derivabili anche il determinante

$$\begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix} = a(x)d(x) - b(x)c(x)$$

risulta una funzione di x derivabile.

L'espressione del determinante, differenza di due prodotti, lascia prevedere per la derivata una somma (algebraica) di quattro addendi.

La derivata del determinante si esprime del resto in modo particolarmente elegante tramite le notazioni stesse dei determinanti

$$\begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} a'(x) & b'(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c'(x) & d'(x) \end{vmatrix}$$

2.1. Esercizi.

ESERCIZIO 2.1. Calcolare la derivata del determinante $\begin{vmatrix} e^{3x} & e^{4x} \\ 3e^{3x} & 4e^{4x} \end{vmatrix}$.

ESERCIZIO 2.2. Calcolare le derivate prima e seconda del determinante $\begin{vmatrix} \sin(x) & \cos(x) \\ -\cos(x) & \sin(x) \end{vmatrix}$.

3. Stime numeriche

Un problema numerico importante è valutare quanto varino le soluzioni di un sistema al variare dei termini noti: siano (x_1, y_1) e (x_2, y_2) le soluzioni di uno stesso sistema relative a termini noti diversi (h_1, k_1) e (h_2, k_2)

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 = h_1 \\ cx_1 + dy_1 = k_1 \end{cases} \quad \begin{cases} ax_2 + by_2 = h_2 \\ cx_2 + dy_2 = k_2 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro si ottiene

$$\begin{cases} a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = h_1 - h_2 \\ c(x_1 - x_2) + d(y_1 - y_2) = k_1 - k_2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a\Delta x + b\Delta y = \Delta h \\ c\Delta x + d\Delta y = \Delta k \end{cases}$$

avendo indicato con $\Delta x, \Delta y, \Delta h, \Delta k$ le varie differenze.

Quindi, dalle formule di Cramer,

$$\Delta x = \frac{d\Delta h - b\Delta k}{ad - bc}, \quad \Delta y = \frac{a\Delta k - c\Delta h}{ad - bc}$$

Supponendo che i coefficienti del sistema e il determinante della matrice verifichino le disuguaglianze

$$|a| \leq M, |b| \leq M, |c| \leq M, |d| \leq M, |ad - bc| \geq \gamma > 0$$

Riesce

$$(19) \quad |\Delta x| \leq \frac{M}{\gamma} (|\Delta h| + |\Delta k|) \quad |\Delta y| \leq \frac{M}{\gamma} (|\Delta h| + |\Delta k|)$$

Le maggiorazioni (19) sono particolarmente importanti per apprezzare quanto una incertezza sui termini noti (errori di misura, ecc.) influisca sulla precisione delle soluzioni.

Supponendo che i termini noti del sistema siano calcolati a meno di un errore ε le soluzioni ottenute saranno affette da un errore minore o uguale a

$$2 \frac{M}{\gamma} \varepsilon$$

L'incertezza sulle soluzioni aumenta al crescere dei coefficienti e principalmente al diminuire della quantità $|ad - bc|$.

L'interpretazione geometrica di un sistema, intersezione di due rette, illustra bene il fenomeno:

- spostando di poco due rette di direzioni molto diverse si sposta di poco il punto di intersezione,
- spostando di poco due rette quasi parallele si può spostare di molto il loro punto di intersezione.

3.1. Esercizi.

ESERCIZIO 3.1. *Determinare una maggiorazione per la soluzione del sistema* $\begin{cases} 5x + by = 1 \\ cx + 2y = 3 \end{cases}$ *sapendo che* $|b| \leq 1$ *e* $|c| \leq 1$.

ESERCIZIO 3.2. *Determinare una maggiorazione per il modulo del vettore* (x_0, y_0) *soluzione del sistema* $\begin{cases} 3x + 4y = \cos(\vartheta) \\ 2x + 3y = \sin(\vartheta) \end{cases}$ *valida qualunque sia l'angolo* ϑ .

4. Notazioni vettoriali in Analisi

In numerose occasioni si incontrano, ad esempio in Analisi, algoritmi di calcolo che riguardano oggetti vettoriali.

- Gradiente di una funzione scalare

$$f(x, y, z) \rightarrow \nabla f(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z))$$

- Divergenza di un vettore

$$(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)) \rightarrow \operatorname{div}(u, v, w) = u_x + v_y + w_z$$

- Rotore di un vettore

$$(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)) \rightarrow \operatorname{rot}(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

ovvero, con la scrittura facilmente memorizzabile,

$$\operatorname{rot}(u, v, w) = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u(x, y, z) & v(x, y, z) & w(x, y, z) \end{pmatrix}$$

http://mathinsight.org/divergence_curl_notation

Parte 2

Funzioni di due variabili

CAPITOLO 8

Il piano cartesiano

1. La metrica

DEFINIZIONE 1.1. La distanza di due punti $P = (x_P, y_P)$ $Q = (x_Q, y_Q)$ si definisce come il modulo del vettore $Q - P$ da essi determinato

$$d(P, Q) = \|P - Q\| = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$$

La distanza si indica spesso anche con la notazione $d(P, Q) = \overline{PQ}$.

DEFINIZIONE 1.2. Un sottinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice limitato se $\exists M \geq 0$ tale che $\forall P \in A$ si abbia $\|P\| \leq M$.

ESEMPIO 1.3. Il cerchio $x^2 + y^2 \leq 4$ è un insieme limitato. La retta $y = 2x + 5$ non è limitata.

1.1. Le proprietà della distanza.

- La distanza tra due punti P e Q è nulla se e solo se i due punti coincidono.
- La distanza è simmetrica: la distanza di P da Q è la stessa della distanza di Q da P
- Vale la proprietà triangolare : comunque si prendano tre punti P, Q ed R riesce

$$\overline{PQ} \leq \overline{PR} + \overline{RQ}$$

1.2. Gli intorni circolari. Il disco aperto o intorno circolare aperto di centro $C = (\alpha, \beta)$ e raggio δ è l'insieme $I_\delta(C)$ dei punti $P = (x, y)$ tali che

$$\overline{PC} < \delta \quad \rightarrow \quad \{(x, y) : (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 < \delta^2\}.$$

L'insieme $\{(x, y) : (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \delta^2\}$ è la circonferenza che delimita l'intorno circolare, la frontiera di $I_\delta(C)$

L'insieme

$$\{(x, y) : (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 \leq \delta^2\}.$$

che include anche la circonferenza, si dice invece intorno chiuso di C .

2. Convergenza in \mathbb{R}^2

Tenuto conto della definizione di distanza nel piano, vedi Definizione 1.1, una successione di punti $\{P_n\} = \{(x_n, y_n)\}$ $n = 1, 2, \dots$ può essere:

- **limitata** : se esiste un disco (un cerchio) che contenga tutti i punti P_n

ESEMPIO 2.1.

– La successione $P_n = (n, n^2)$ non è limitata,

– La successione $P_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$ è limitata.

è evidente che

- dire che la $\{P_n = (x_n, y_n)\}$ è limitata equivale a dire che sono limitate entrambe le successioni reali $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$,
- dire che la $\{P_n = (x_n, y_n)\}$ non è limitata equivale a dire che non è limitata una almeno delle due $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$.

- **convergente** : se esiste un punto $C = (\alpha, \beta)$ tale che per ogni suo intorno circolare $I_\delta(C)$ i punti P_n della successione finiscano definitivamente, cioè da un certo indice n in poi, dentro $I_\delta(C)$: in questo caso si scrive

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = C$$

e C si chiama ancora **limite** della successione P_n .

ESEMPIO 2.2.

- La successione $\{P_n\} = \{\cos(n)/n, \sin(n)/n\}$ è convergente all'origine.
- La successione $\{P_n\} = \{n, n\}$ non è convergente.

Una successione $\{P_n = (x_n, y_n)\}$ di punti del piano corrisponde a... due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ di numeri reali: pertanto

- **non limitata** oppure **limitata e non convergente**.
 - La successione precedente $\{P_n\} = \{n, n\}$ è non limitata
 - La successione $\{P_n\} = \{(-1)^n, (-1)^n\}$ è limitata ma non convergente.

TEOREMA 2.3. *Condizione necessaria e sufficiente perchè la successione*

$$P_n = (x_n, y_n) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

converga al punto $C = (\alpha, \beta)$ è che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta$$

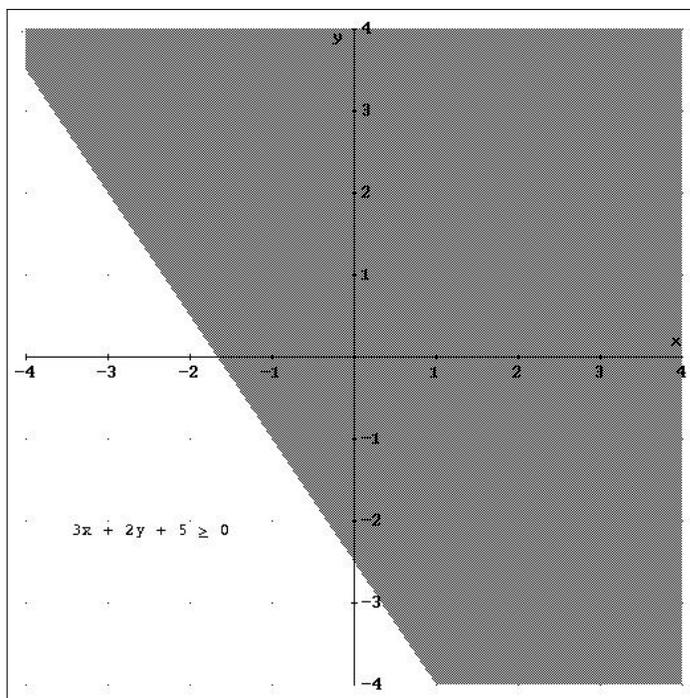
3. Sottoinsiemi importanti del piano

- semipiani:

semipiani : $ax + by + c > 0$, semipiano aperto esclusa la retta che lo delimita, o $ax + by + c \geq 0$ semipiano chiuso che include anche la retta che lo delimita.

Per riconoscere un semipiano assegnato come in Figura 1, basta

- disegnare la retta che lo delimita
- provare prendendo un punto in uno, a caso, dei due semipiani, se esso soddisfa o meno la disequazione richiesta.
- Nel caso di Figura 1, si può provare, ad esempio con l'origine: riconosciuto che $3 \times 0 + 2 \times 0 + 5 = 5 \geq 0$ si conclude che il semipiano determinato dalla disequaglianza $3x + 2y + 5 \geq 0$ è, dei due determinati dalla retta $3x + 2y + 5 = 0$, quello che contiene l'origine

FIGURA 1. Il semipiano $3x + 2y + 5 \geq 0$

- **rettangoli:**
domini rettangolari aperti: $a < x < b$, $c < y < d$, il rettangolo senza la sua cornice-frontiera, o $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, il rettangolo inclusa la frontiera.
- **dischi:**
dischi aperti $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 < r^2$
- interno aperto di un'ellisse $(x - \alpha)^2/a^2 + (y - \beta)^2/b^2 < 1$
- **domini normali o sottografici:**
insiemi E determinati da due grafici

$$E : (x, y) : a \leq x \leq b, \quad g(x) \leq y \leq f(x)$$

essendo $g(x), f(x)$ funzioni definite su $[a, b]$ con $g(x) \leq f(x)$.

Un insieme determinato come E si dice anche *dominio normale* rispetto all'asse x .

Analogamente un insieme

$$F : (x, y) : c \leq y \leq d, \quad g(y) \leq x \leq f(y)$$

si dice *dominio normale* rispetto all'asse y .

3.1. Equazioni e disequazioni. Si noti come gli insiemi del piano considerati finora siano determinati tramite DISEQUAZIONI.

Anche le equazioni, ad esempio

$$(20) \quad x^2 + y^2 = 1,$$

determinano insiemi del piano: ma essi sono, diversamente dai precedenti, quasi sempre composti da linee del piano.

Nel caso dell'equazione (20) si rappresenta la circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

È particolarmente importante saper riconoscere le linee del piano relative alle equazioni formate da un polinomio di secondo grado,

$$ax^2 + by^2 = 1:$$

si tratta di linee dette *coniche*,

- $a = b > 0$ circonferenze di centro l'origine e raggio $r = 1/\sqrt{a}$
- $a > 0, b > 0, a \neq b$ ellissi di centro l'origine e semiassi $1/\sqrt{a}, 1/\sqrt{b}$, vedi Figura 2

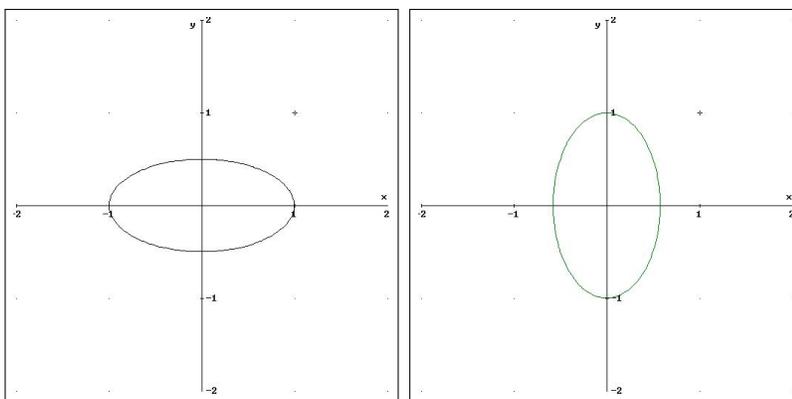


FIGURA 2. Due ellissi: $x^2 + 4y^2 = 1$, $3x^2 + y^2 = 1$

- $a \cdot b < 0$ (a e b di segni opposti) iperboli di centro l'origine e semiassi $1/\sqrt{|a|}, 1/\sqrt{|b|}$, Figura 3

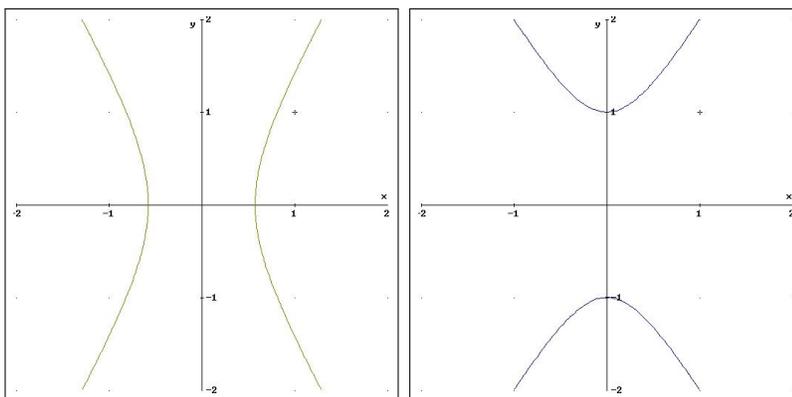


FIGURA 3. Due iperboli: $3x^2 - y^2 = 1$, $-3x^2 + y^2 = 1$

4. Punti interni e punti esterni a un insieme S

DEFINIZIONE 4.1. *Un punto P si dice interno ad un insieme S se esiste almeno un disco aperto di centro P completamente contenuto (interno) ad S.*

DEFINIZIONE 4.2. *Un punto P si dice esterno ad un insieme S se esiste almeno un disco aperto di centro P che non interseca S, ovvero tutto contenuto nel complementare di S.*

Se, per esempio, l'insieme S è il quadrato chiuso di estremi (0,0) e (1,1) allora

- il punto $P_1 = (0.5, 0.5)$ è interno ad S e il raggio massimo r_0 che gli compete è 0.5
- il punto $P_2 = (0.8, 0.5)$ è ancora interno ad S e il raggio massimo che gli compete è $r_0 = 0.2$, infatti dischi di raggi maggiori fuoriescono da S
- il punto $P_3 = (1, 1)$ non è interno ad S e non è neanche esterno ad S.

4.1. Punti di frontiera. Ogni insieme E del piano classifica tutti i punti del piano in tre categorie

- i punti interni ad E
- i punti esterni ad E
- gli *altri...* cioè i punti che non sono nè interni ad E nè esterni ad E

I punti - *altri* - che non siano nè interni nè esterni ad un insieme S prendono il nome di punti di frontiera di S.

DEFINIZIONE 4.3. *Un punto P si dice punto di frontiera dell'insieme S se ogni δ -intorno di P, cioè ogni cerchio di centro P e raggio δ , contiene punti di S e punti del complementare di S.*

L'insieme dei punti di frontiera di S si chiama frontiera di S e si denota con $\mathcal{F}S$ o con ∂S .

ESEMPIO 4.4. *Nel caso di un semipiano*

$$ax + by + c > 0$$

i punti di frontiera sono tutti e soli i punti della retta $ax + by + c = 0$.

Nel caso di un disco aperto (cioè escludendo la circonferenza che lo delimita)

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 < r^2$$

i punti di frontiera sono tutti e soli quelli che verificano l'uguaglianza

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

Anche nel caso del disco chiuso (cioè includendo la circonferenza che lo delimita)

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 \leq r^2$$

i punti di frontiera sono, ancora, tutti e soli quelli che verificano l'uguaglianza

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

OSSERVAZIONE 4.5. *I punti interni ad un insieme sono, ovviamente punti appartenenti all'insieme. I punti esterni sono, altrettanto ovviamente punti non appartenenti all'insieme. I punti di frontiera possono sia appartenere all'insieme che appartenere, invece, al suo complementare (vecchia e ben nota conflittualità dei paesi frontalieri...).*

4.2. Gli insiemi chiusi.

DEFINIZIONE 4.6. *Un insieme E si dice chiuso se contiene tutti i suoi eventuali punti di frontiera.*

ESEMPIO 4.7. *Il semipiano $x + y \leq 1$ è un insieme chiuso: infatti la retta $x + y = 1$ che costituisce la sua frontiera appartiene, vista la \leq , all'insieme.*

L'intorno circolare di $P_0 = (1, 1)$

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 < 4$$

non è un chiuso: la circonferenza frontiera, $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$, non appartiene all'insieme.

4.3. Gli insiemi connessi. La qualifica di *connesso* per un insieme corrisponde all'idea intuitiva di insieme fatto di *un solo pezzo*.

DEFINIZIONE 4.8. *Assegnati $n + 1$ punti $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ si dice poligonale Π da essi determinata l'insieme unione degli n segmenti¹*

$$P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}P_n$$

I due punti P_0 e P_n si dicono estremi della poligonale Π .

DEFINIZIONE 4.9. *Un insieme A si dice connesso per poligonali se comunque si prendano due suoi punti P e Q esiste una poligonale di estremi P e Q interamente contenuta in A*

Nel seguito chiameremo *connessi* gli insiemi che siano connessi per poligonali.

4.4. Connessi evidenti...

È facile riconoscere che sono connessi gli insiemi

convessi,

come il disco, gli insiemi cioè che se contengono due punti P e Q contengono di conseguenza tutto il segmento PQ .

5. Funzioni di due variabili

Una funzione

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad z = f(x, y)$$

fa corrispondere ai punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ numeri $z \in \mathbb{R}$:

- l'input è un punto di \mathbb{R}^2 cioè una coppia di numeri reali,
- l'output un numero reale.

Il grafico di una funzione $z = f(x, y)$ ha, quasi sempre l'aspetto di una superficie dello spazio.

ESEMPIO 5.1. *Pensando, ad esempio, alla funzione $f(x, y) = 1 + x + y$ la superficie grafico è il piano $z = 1 + x + y$.*

Mentre per la funzione $g(x, y) = x^2 + y^2$ la superficie grafico è una sorta di coppa rotonda, la superficie ottenuta ruotando intorno al suo asse una parabola.

¹si noti che i segmenti in questione non devono essere necessariamente paralleli agli assi.

ATTENZIONE:

Nel piano non c'è ordinamento: non ha senso quindi dire che il punto P_1 sia minore di un altro P_2 come si faceva invece normalmente su \mathbb{R}^1 in cui presi due punti diversi x_1 e x_2 si riconosceva immediatamente che o $x_1 < x_2$ o viceversa.

La perdita dell'ordinamento nel piano implica la perdita relativamente alle funzioni di due variabili dei requisiti *funzione crescente* o *funzione decrescente*: in altri termini non esistono funzioni di due variabili *monotone*.

5.1. Funzioni: di quante variabili... ?

Una funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$ fa corrispondere ai punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ numeri $z \in \mathbb{R}$. Questa corretta definizione può non far considerare casi particolarmente semplici e importanti:

- le funzioni costanti: a tutti i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fanno corrispondere lo stesso valore,
- le funzioni che a tutti i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fanno corrispondere valori determinati dalla sola x , ovvero valori che non dipendono da y ,
- le funzioni che a tutti i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fanno corrispondere valori determinati dalla sola y , ovvero valori che non dipendono da x .

Si tratta, negli esempi proposti di casi in cui la dipendenza da due variabili sembra inappropriata, quando invece non c'è nulla di contraddittorio.

ESEMPIO 5.2. Consideriamo ad esempio la funzione

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \rightarrow x^2$$

È interessante osservare il suo grafico, pagina 57, che ricorda una grondaia.

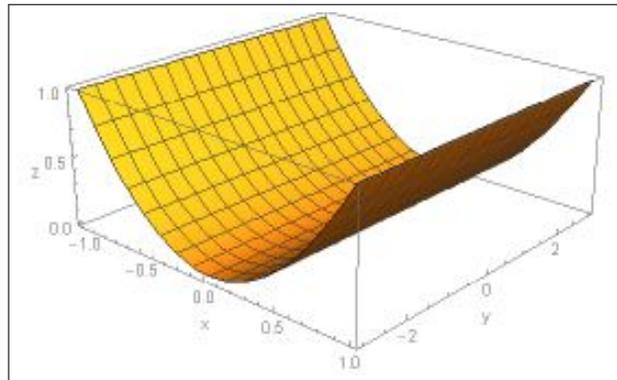


FIGURA 4. $f(x, y) = x^2$, una grondaia...

6. Insieme di definizione

Una funzione di due variabili è assegnata indicando un procedimento di calcolo che può essere applicabile ad alcuni punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e non ad altri.

L'insieme dei punti (x, y) ai quali il procedimento relativo alla funzione è correttamente applicabile si dice *insieme di definizione* o *dominio* della funzione.

- $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$: $x + y \neq 0$ l'insieme di definizione è l'intero piano \mathbb{R}^2 privato della retta $x + y = 0$
- $g(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$: $1 - x^2 - y^2 > 0 \rightarrow x^2 + y^2 < 1$ l'insieme di definizione è il disco aperto di centro l'origine e raggio 1.
- $\sqrt{3x^2 + 2y^2 - 5}$: $3x^2 + 2y^2 - 5 \geq 0$ l'insieme di definizione è l'intero piano \mathbb{R}^2 privato dell'interno dell'ellisse

$$\frac{x^2}{5/3} + \frac{y^2}{5/2} = 1$$

7. Quando si parla di funzioni continue ?

Dire che una funzione $f(x, y)$ è *continua* significa che

i valori che produce su punti vicini sono valori vicini

frase che mette bene in evidenza come il concetto di continuità sia strettamente collegato alla nozione di vicinanza, quindi alla disponibilità di una *distanza*.

Il fenomeno opposto a quello di continuità è la presenza di salti: le funzioni non continue più facilmente immaginabili sono quelle che producono valori sempre e solo interi.

Valori che, a meno che la funzione non sia costante, producono inevitabilmente dei salti: due valori interi diversi distano almeno di 1 ...!

7.1. La continuità. Il concetto di continuità, di una funzione in un punto (x_0, y_0) è collegato ai valori della funzione nei punti (x, y) vicini ad (x_0, y_0) : per continuità di $f(x, y)$ nel punto (x_0, y_0) si intende

$$(x, y) \approx (x_0, y_0) \rightarrow f(x, y) \approx f(x_0, y_0)$$

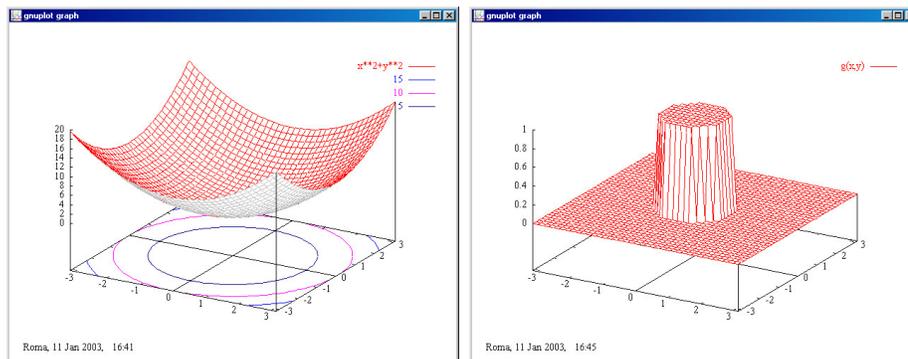


FIGURA 5. La funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$, continua, la funzione $\chi(x, y)$ caratteristica del disco $x^2 + y^2 \leq 1$, non continua

La maniera di precisare meglio l'idea intuitiva precedente è basata su un argomento (ε, δ) sostanzialmente identico a quello visto per funzioni di una variabile

DEFINIZIONE 7.1. Una funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ si dice continua in $P_0 = (x_0, y_0)$ se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$$

ESEMPIO 7.2. La funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ è continua in ogni punto: è infatti facilmente prevedibile che se $(x,y) \approx (x_0,y_0)$ allora

$$x \approx x_0, \quad \rightarrow \quad x^2 \approx x_0^2, \quad y \approx y_0, \quad \rightarrow \quad y^2 \approx y_0^2,$$

da cui

$$x^2 + y^2 \approx x_0^2 + y_0^2$$

Diversamente vanno le cose, vedi Figura 5, riferendosi alla funzione caratteristica del disco $x^2 + y^2 \leq 1$, denotata con χ , funzione a valori interi, che vale 1 in tutti i punti di tale disco e 0 nei punti che non appartengono al disco.

Ad esempio $\chi(1,0) = 1$ mentre $\chi(1.001,0) = 0$. . . eppure il punto $(1.001,0)$ è abbastanza vicino al punto $(1,0)$. È evidente che ci sono punti comunque vicini a $(1,0)$ sui quali la χ vale 0 e quindi differisce notevolmente dal valore 1 preso in $(1,0)$

La definizione di continuità data sopra si riferisce alla continuità in un punto (x_0, y_0) : quando si dice semplicemente che una funzione è continua si sottintende che lo è in tutti i punti del suo insieme di definizione.

7.2. Funzioni elementari. La maggior parte delle funzioni di uso comune, dette anche funzioni elementari, sono continue.

Se $A(t)$ e $B(t)$ funzioni continue di una variabile allora le funzioni di due variabili $A(x) + B(y)$, $A(x) \cdot B(y)$, $A(x)/B(y)$ sono funzioni continue di due variabili.

La composizione, quando possibile, di funzioni continue produce funzioni continue.

Quindi

- sono continui i polinomi $P(x,y)$
- sono continue (nel loro insieme di definizione) le funzioni razionali $f(x,y) = P(x,y)/Q(x,y)$ quozienti di due polinomi.
- sono continue le funzioni esponenziali $e^{P(x,y)}$ con $P(x,y)$ polinomio.
- sono continue le funzioni $f(x,y)$ polinomi in $\cos(x), \cos(y), \sin(x), \sin(y)$
- e molte altre !

ESEMPIO 7.3. La funzione $\sin(t)$ è continua, la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ è continua, quindi la funzione $\sin(x^2 + y^2)$ è continua.

8. Grafico o linee di livello

Il grafico di una funzione reale di due variabili reali $f(x,y)$ (ragionevolmente regolare) è una superficie:

- si prende (x,y) nell'insieme di definizione di f ,
- si disegna il punto, dello spazio, $(x,y, f(x,y))$ di quota appunto il valore $f(x,y)$.

Il grafico, una superficie dello spazio, si ottiene generalmente con gli espedienti del disegno prospettico (assonometria, prospettiva).

La realizzazione di grafici di funzioni di due variabili non può che essere attualmente affidata ai computer: lo strumento software migliore attualmente disponibile è GNUPLOT liberamente distribuito, <http://www.gnuplot.info/>, <http://gnuplot.sourceforge.net/demo/> per ogni sistema (Mac, Windows, Linux).

Un modo non prospettico di rappresentare la funzione $f(x,y)$ è quello di disegnare nel piano (x,y) le *linee di livello*

$$f(x,y) = 0, \quad f(x,y) = 1, \quad f(x,y) = 2, \dots$$

vedi Figura 6.

Si tratta cioè di disegnare nell'insieme di definizione, insieme del piano, un certo numero di curve su ciascuna delle quali la funzione produce lo stesso valore.

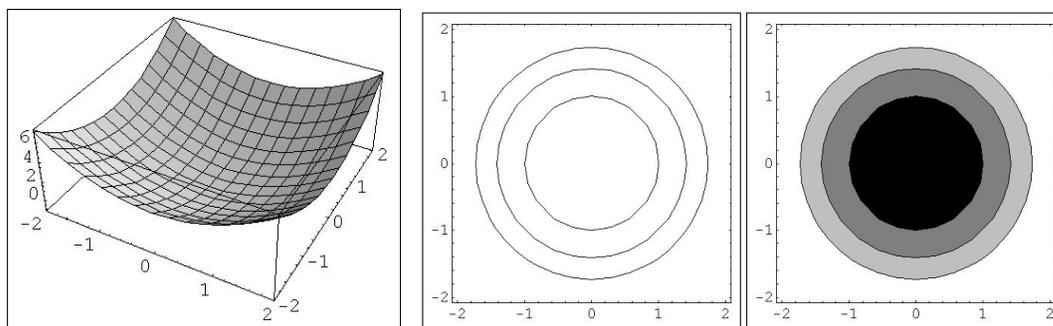


FIGURA 6. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, $f(x,y) = 0$, $f(x,y) = 1$, $f(x,y) = 2$

OSSERVAZIONE 8.1. *Il metodo delle linee di livello è quello usato nelle carte geografiche: la funzione che i cartografi considerano è l'altitudine $f(x,y)$ (sul livello del mare) del punto di coordinate (x,y) (avendo localmente trattato la superficie terrestre come un piano).*

Un metodo che arricchisce quello delle linee di livello, anch'esso usato in cartografia, è quello delle scale cromatiche che rappresentano i rilievi: toni di marrone via via più deciso per le catene montuose, toni di blu sempre più intenso per le profondità degli oceani...

9. Le funzioni radiali

Le funzioni radiali sono quelle funzioni che prendono lo stesso valore su tutti i punti (x,y) che hanno la stessa distanza $x^2 + y^2$ dall'origine: esse cioè non dipendono realmente dal punto (x,y) ma solo dalla sua distanza, il raggio, dall'origine, donde l'aggettivo *radiali*.

ESEMPIO 9.1. *Sono funzioni radiali le seguenti funzioni $z = f(x,y)$:*

$$z = 1, \quad z = 1 + x^2 + y^2, \quad z = \sin(x^4 + 2x^2y^2 + y^4), \quad z = (x^2 + y^2 + 5)^5$$

Se indichiamo con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ le funzioni precedenti si esprimono anche come

$$z = 1, \quad z = 1 + r^2, \quad z = \sin(r^4), \quad z = (r^2 + 5)^5$$

Ad ogni funzione $f(t)$ di una variabile, definita per $t \geq 0$ possiamo associare una funzione $F(x, y)$ di due variabili radiale

$$F(x, y) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

Se $f(t)$ è funzione continua di $t \in \mathbb{R}$ allora la funzione radiale associata $f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ è funzione continua di $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

OSSERVAZIONE 9.2. *Le funzioni $f(x, y)$ radiali godono di evidenti proprietà di simmetria:*

$$f(x, y) = f(-x, y) = f(x, -y) = f(-x, -y)$$

9.1. Il grafico di una funzione radiale. Conosciuto il grafico di $f(t)$ per $t \geq 0$ si ottiene, molto facilmente, il grafico di $F(x, y) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$: basta far ruotare, intorno all'asse verticale, la linea grafico di f : la superficie ottenuta con tale rotazione è il grafico di F

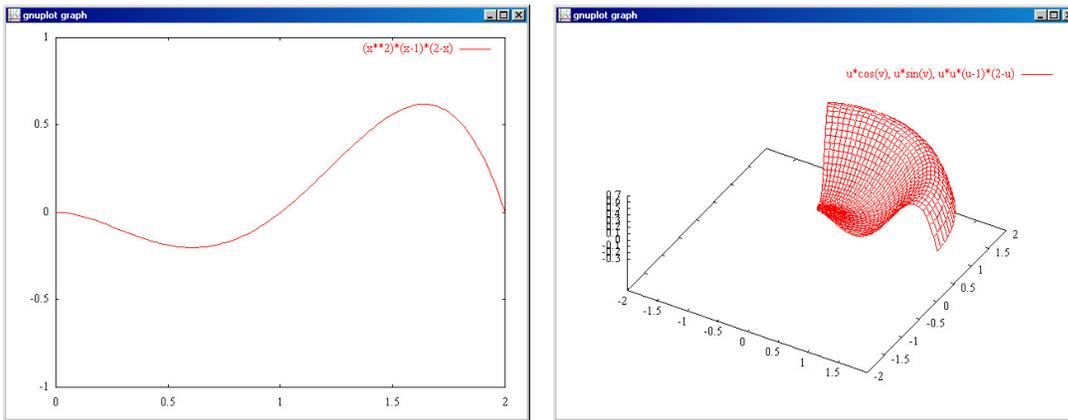


FIGURA 7. a) Il grafico di $f(x) = x^2(x-1)(2-x)$ $x \in [0, 2]$ b) La superficie ottenuta ruotando con $\theta \in [0, 2]$

10. Le funzioni ondose

Consideriamo la nota *campana di Gauss*

$$f(x) = e^{-x^2}$$

le funzioni $f(x-1)$, $f(x-2)$, $f(x-3)$, ... hanno grafici ottenuti da quello di $f(x)$ con traslazioni, verso destra, di 1, di 2, di 3, ecc.

Scelto un valore v le funzioni delle due variabili x e t

$$u(x, t) = f(x - vt) = e^{-(x-vt)^2}$$

hanno grafici deducibili da quello di $f(x)$ con traslazioni vt .

L'unica onda, centrata nell'origine, che caratterizza il grafico della $f(x) = e^{-x^2}$ si ritrova nei profili altimetrici della $u(x,t)$ relativi a $t = t_0$, centrata nei punti $x = vt_0$.

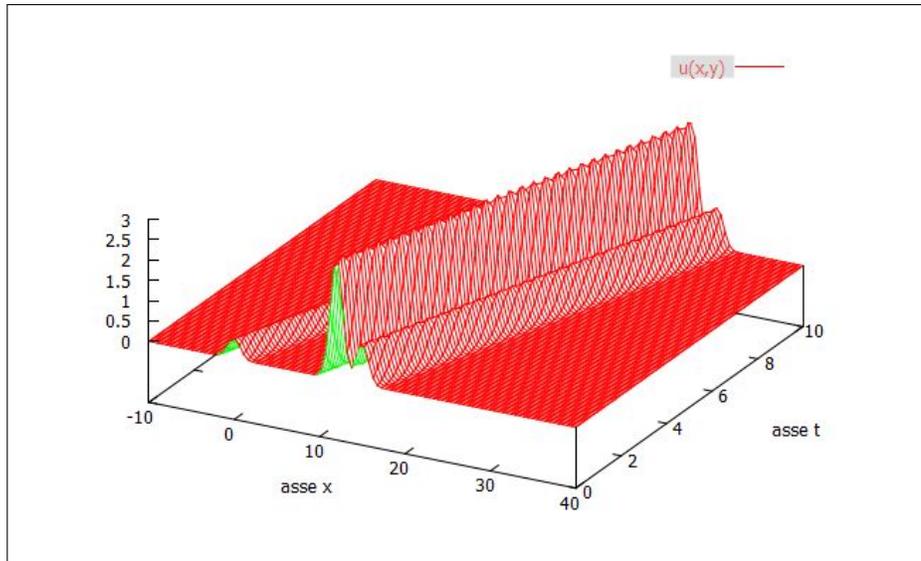


FIGURA 8. $u(x,t) = g(x-t)$

Guardando i profili altimetrici della $u(x,t)$ relativi ai diversi tempi $t = t_0$ si assiste ad una sorta di avanzamento della campana a velocità v .

Il fenomeno risulta ancora più evidente e interessante se in luogo della $f(x) = e^{-x^2}$ si considera una combinazione di *campane di Gauss* quale, ad esempio

$$g(x) = 0.5 f(x) + 3 f(x - 12) + f(x - 15)$$

la corrispondente $u(x,t) = g(x - vt)$, con $v = 1$ ha il grafico di Figura 8.

11. Il teorema di Weierstrass

11.1. L'insieme immagine.

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, per ogni insieme $E \subseteq A$ possiamo considerare l'insieme

$$f(E) = \{f(x,y), \forall (x,y) \in E\}$$

dei valori $f(x,y)$ relativi ai valori $(x,y) \in E$.

L'insieme $f(E)$ si dice immagine di E tramite f .

Puó accadere che l'insieme immagine sia non limitato o limitato ma, ad esempio, privo di minimo o privo di massimo:

- la prima possibilità, immagine non limitata, si incontra molto facilmente pensando a funzioni definite su insiemi E non limitati, quali $f(x,y) = x^2 + y^2$ definita in tutto il piano \mathbb{R}^2

- la seconda possibilità si incontra, ad esempio, pensando all'immagine di funzioni definite su insiemi che non includano interamente la loro frontiera, quali ad esempio $e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$ che ha immagine l'intervallo $(0, 1)$, limitato ma privo sia di massimo che di minimo.

TEOREMA 11.1 (Weierstrass). *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua e sia $E \subseteq A$ con E chiuso e limitato, l'immagine $f(E)$ è un insieme chiuso e limitato.*

Il teorema afferma che

- se $E \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^2$ è chiuso e limitato
 - se f è continua in un insieme A che contiene E
 - l'insieme immagine di f $F = \{f(x, y), \forall (x, y) \in E\}$
 - è limitato
 - è chiuso,
- quindi ha minimo e ha massimo.

ESEMPIO 11.2. *Determinare massimo e minimo della funzione*

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

sull'insieme $A : x^2 + y^2 \leq 1$.

RISPOSTA:

L'insieme A assegnato è chiuso e limitato e la funzione f è continua in \mathbb{R}^2 , quindi, per il Teorema di Weierstrass, esiste sia il minimo che il massimo.

Il minimo è 0, il massimo è 1.

C'è un solo punto di minimo che è l'origine.

Ci sono più punti di massimo, che sono tutti i punti della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$.

12. Il teorema d'esistenza degli zeri

Il titolo corrisponde all'esistenza di soluzioni $(x, y) \in A$ per l'equazione $f(x, y) = 0$, o in generale,

$$f(x, y) = k$$

La risposta dipende anche qui da

- il tipo di insieme A
- il tipo di funzione f
- il tipo di valore k

TEOREMA 12.1 (Teorema esistenza degli zeri). *Se*

- A è connesso per poligoni,
- f è continua,

se riesce $f(P_1) < f(P_2)$ in corrispondenza a due punti $P_1, P_2 \in A$ allora per ogni

$$f(P_1) \leq k \leq f(P_2)$$

esiste almeno un punto $Q \in A$ tale che $f(Q) = k$.

ESEMPIO 12.2. *Sia $f(x, y) = x^3 + y^3$ e sia A il quadrato $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.*

Riesce $f(0, 0) = 0, f(1, 1) = 2$ allora, per ogni $k \in [0, 2]$ esistono certamente punti $(x_k, y_k) \in A$ tali che $f(x_k, y_k) = k$.

Il Teorema 12.1 riconosce che una funzione continua, definita su un insieme connesso per poligonalità, che produca due valori $f(P_1) < f(P_2)$ produce, di conseguenza, anche tutti i valori k intermedi $f(P_1) \leq k \leq f(P_2)$.

Il nome di teorema d'esistenza degli zeri discende dal caso in cui $f(P_1) < 0$ ed $f(P_2) > 0$ nel quale si deduce l'esistenza di almeno un punto $Q \in A$ in cui $f(Q) = 0$, esistenza appunto di uno zero per la funzione.

12.1. Un enunciato alternativo...

TEOREMA 12.3 (Teorema dei valori intermedi). *Se*

- *A è connesso per poligonalità,*
- *f è continua,*

l'insieme immagine è un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$.

.. se l'immagine I contiene due numeri α e β contiene, di conseguenza, tutti i γ intermedi.

13. Le conseguenze

I due teoremi precedenti, 11.1 e 12.1 aiutano a determinare l'insieme immagine di funzioni continue:

- se la funzione continua è definita su un insieme
 - connesso
 - chiuso
 - limitato

allora l'insieme immagine è l'intervallo chiuso e limitato $[m, M]$ avendo indicato con m e M il minimo e il massimo della funzione,

- se la funzione continua è definita su un insieme connesso (ma non anche chiuso e limitato) allora l'insieme immagine rimane un intervallo che però può essere illimitato o può non includere gli estremi.

ESEMPIO 13.1. *L'insieme immagine della funzione $x^2 + y^2$ considerata definita sul quadrato di estremi l'origine e il punto $(1, 1)$ è l'intervallo $[0, 2]$.*

ESEMPIO 13.2. *L'insieme immagine della funzione*

$$\frac{1}{1+x^2+y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

è l'intervallo $(0, 1]$ che include 1 ma non 0

ESEMPIO 13.3. *La funzione*

$$\frac{1}{x+y}$$

è definita per $x+y \neq 0$.

L'immagine del semipiano (connesso per poligonalità) $x+y > 0$ è un intervallo (Teorema 12.3).

Poichè tale immagine contiene sia valori positivi molto grandi² sia valori positivi molto

²valori della funzione su (x, y) vicini alla frontiera

piccoli ³ non può che essere l'intervallo dei numeri positivi.

Tenuto conto che la funzione non produce mai il valore 0 se ne conclude che l'immagine del semipiano $x + y > 0$ mediante la funzione $1/(x + y)$ è l'intervallo aperto $z > 0$.

Discorso analogo per l'immagine dell'altro semipiano $x + y < 0$: l'immagine è l'intervallo aperto $z < 0$.

Concludendo: l'immagine della funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{x + y}$$

definita (ovviamente) per $x + y \neq 0$, insieme non limitato, non chiuso e non connesso è l'insieme $\mathbb{R} - \{0\}$, insieme non limitato, non chiuso, non connesso.

³valori della funzione su (x, y) molto lontano dall'origine

CAPITOLO 9

I limiti

1. Il concetto di limite

Avere limite in un punto (x_0, y_0) significa che i valori della funzione $f(x, y)$ si *stabilizzano* per $(x, y) \approx (x_0, y_0)$ su un valore L .

Tanto piú (x, y) è vicino a (x_0, y_0) tanto piú il risultato $f(x, y)$ deve essere vicino a L .

Se $f(x, y)$ è continua nel punto (x_0, y_0) allora ovviamente ha limite in tale punto e il limite è il valore $f(x_0, y_0)$.

I punti piú interessanti sui quali cercare il limite di una funzione sono senza dubbio i punti di frontiera dell'insieme di definizione, come negli esempi seguenti:

ESEMPIO 1.1. *La funzione*

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

non ha limite per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$: i suoi valori assumono valori costanti su ogni retta passante per l'origine: infatti se $y = mx$ riesce

$$f(x, mx) = \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1 + m^2}$$

valori diversi da m a m : valore 0 sull'asse x la retta $y = 0$, valore $1/2$ sulla bisettrice la $y = x$, valore $2/5$ sulla $y = 2x$ ecc.

ESEMPIO 1.2. *La funzione*

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

ha limite 0 per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$: riesce infatti

$$|f(x, y)| = |xy| \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} |xy| \leq \frac{1}{4} (x^2 + y^2)$$

e quindi diventa sempre piú piccola vicino a 0 mano mano che il punto (x, y) è vicino all'origine.

ESEMPIO 1.3. *La funzione*

$$\frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

ha limite per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$: indicato con

$$\rho^2 = x^2 + y^2 : (x, y) \approx (0, 0) \rightarrow \rho \approx 0$$

è noto che

$$\rho \approx 0 \rightarrow \frac{\sin(\rho^2)}{\rho^2} \approx 1$$

DEFINIZIONE 1.4. Sia E l'insieme di definizione di f , si dice che

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \ell$$

con ℓ numero reale, se per ogni $\varepsilon > 0$ che si assegna esista un raggio δ_ε tale che

$$0 < \overline{PP_0} \leq \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(P) - \ell| < \varepsilon$$

Notate che nella definizione precedente si considerano punti P tali che

$$0 < \overline{PP_0} \leq \delta_\varepsilon$$

La disuguaglianza a sinistra significa che si considerano soltanto punti

$$0 < \overline{PP_0} \quad \Leftrightarrow \quad P \neq P_0.$$

Cercare il limite significa *riconoscere* se i valori della funzione f nei punti $(x, y) \approx (x_0, y_0)$

- si stabilizzano intorno a un certo valore L (esista il limite)
- non si stabilizzano su alcun valore particolare ma oscillano o divergono (non esista limite)

OSSERVAZIONE 1.5. La precedente affermazione sul limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

ovviamente si riferisce alle proprietà della funzione nei punti $(x, y) \neq (0, 0)$ in $(0, 0)$ la frazione infatti non è neanche definita.

La maggior parte dei problemi di ricerca del limite per $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ si riferisce, come accennato sopra, proprio alla indagine sui valori della funzione in punti vicini a un punto (x_0, y_0) in cui essa non è definita.

TEOREMA 1.6. Sia A aperto e sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, sia $P_0 \in A$: f è continua in P_0 se e solo se

- esiste $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)$
- tale limite coincide con $f(P_0)$

OSSERVAZIONE 1.7. Riconosciuto per qualche motivo che la funzione $f(x, y)$ è continua in A allora il limite per $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ è $f(x_0, y_0)$

OSSERVAZIONE 1.8. Se una funzione $f(x, y)$ produce solo valori interi allora

- o è costante,
- o non è continua.

2. Prolungamento per continuità

Sia f continua in $A - P_0$: se esiste, finito, il

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = \ell \in \mathbb{R}$$

si può *prolungare* f fin su P_0 attribuendo ad f in tale punto il valore del limite ℓ e approdando con tale prolungamento ad una funzione continua in A incluso P_0 .

ESEMPIO 2.1. Sia

$$f(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

tenuto conto che, deditto $P_0 = (0, 0)$ riesce $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = 0$ si può prolungare $f(x, y)$ nella funzione continua in tutto \mathbb{R}^2 seguente:

$$f^*(x, y) = \begin{cases} 0 & (x, y) = (0, 0) \\ e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

3. Limite infinito

Conoscere il limite di una funzione $f(x, y)$ in un punto (x_0, y_0) vuol dire disporre di un'informazione sui valori $f(x, y)$ della funzione nei punti $(x, y) \approx (x_0, y_0)$.

Anche il sapere che $f(x, y)$ diverge positivamente, o negativamente, per $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ è un'informazione che può essere utile: sotto questo punto di vista si parla a volte, oltre che di limite finito, anche di limiti $+\infty$ o $-\infty$:

DEFINIZIONE 3.1.

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = +\infty$$

significa che comunque si prenda un M esiste δ_M tale che se $0 < \overline{PP_0} \leq \delta_M$ riesce $f(P) > M$

ESEMPIO 3.2. La funzione

$$\frac{1}{x^2 + y^2}$$

ha limite $+\infty$ per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

ESEMPIO 3.3. La funzione

$$\frac{1}{x + y}$$

non ha limite (neanche $\pm\infty$) per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

4. Limiti all'infinito

Un'altra informazione importante per una funzione può essere quella relativa ai valori $f(P)$ che prende sui punti P via via più lontani dall'origine: se essi si stabilizzano su una quota ℓ diremo che

$$\lim_{OP \rightarrow \infty} f(P) = \ell$$

ovvero che L è il limite di f per $P \rightarrow \infty$.

ESEMPIO 4.1. *La funzione*

$$\frac{1}{1+x^2+y^2}$$

ha limite 0 per $P \rightarrow \infty$.

Le funzioni

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^\alpha, \quad \alpha \in Z$$

Z insieme degli interi, sono funzioni radiali: prendono cioè lo stesso valore su tutti i punti (x, y) che hanno la stessa distanza $\sqrt{x^2 + y^2}$ dall'origine.

Riesce

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 0 \end{cases}$$

ESEMPIO 4.2. *La funzione*

$$3 + \frac{\sin(xy)}{1+x^2+y^2}$$

ha limite 3 per $P \rightarrow \infty$.

OSSERVAZIONE 4.3. *Attenzione: nel caso di funzioni $f(x, y)$ di due variabili non ha alcun senso parlare di limiti a $-\infty$ o a $+\infty$.*

Possono invece considerarsi limiti lungo direzioni $v = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ assegnate: si tratta in definitiva di considerare la funzione di una variabile t

$$\varphi(t) = f(x_0 + t \cos(\alpha), y_0 + t \sin(\alpha))$$

per la quale continuano ad avere senso

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)$$

CAPITOLO 10

Le derivate

1. Derivate parziali

Il concetto di rapporto incrementale su cui era fondata la nozione di derivata per le funzioni di una variabile non si estende a quelle di due variabili.

Il rapporto incrementale, analogo a quanto si fa per le funzioni di una variabile,

$$\frac{f(x,y) - f(x_0,y_0)}{(x,y) - (x_0,y_0)}$$

non ha senso in due variabili: a numeratore c'è un numero ma a denominatore no !

Sia $f(x,y)$ definita nell'aperto A del piano \mathbb{R}^2 : se si tiene fissa la variabile $y = y_0$ e si fa variare *solo* la variabile x , si ottiene una funzione, $f(x, y_0)$ della sola variabile x .

Geometricamente questo corrisponde, a sezionare la superficie grafico della funzione con un piano $y = y_0$ verticale, parallelo all'asse x , passante per l'ordinata y_0 fissata.

ESEMPIO 1.1. Sia $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3x + y$: fissiamo la variabile y al valore $y_0 = 2$. Si ha $f(x,2) = x^2 + 4 + 3x + 2 = x^2 + 3x + 6$.

La condizione di derivabilità di questa sezione corrisponde all'esistenza del limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Il significato geometrico del limite di questo rapporto incrementale è la *pendenza* della superficie nella direzione dell'asse x .

DEFINIZIONE 1.2. La funzione f è DERIVABILE PARZIALMENTE RISPETTO AD x nel punto (x_0, y_0) se esiste, finito, il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Il valore del limite si indica con uno dei simboli seguenti

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad f_x(x_0, y_0), \quad D_x f(x_0, y_0).$$

Analogamente, f è DERIVABILE PARZIALMENTE RISPETTO AD y nel punto (x_0, y_0) se esiste, finito,

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

che si indica con uno dei simboli seguenti

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \quad f_y(x_0, y_0), \quad D_y f(x_0, y_0)$$

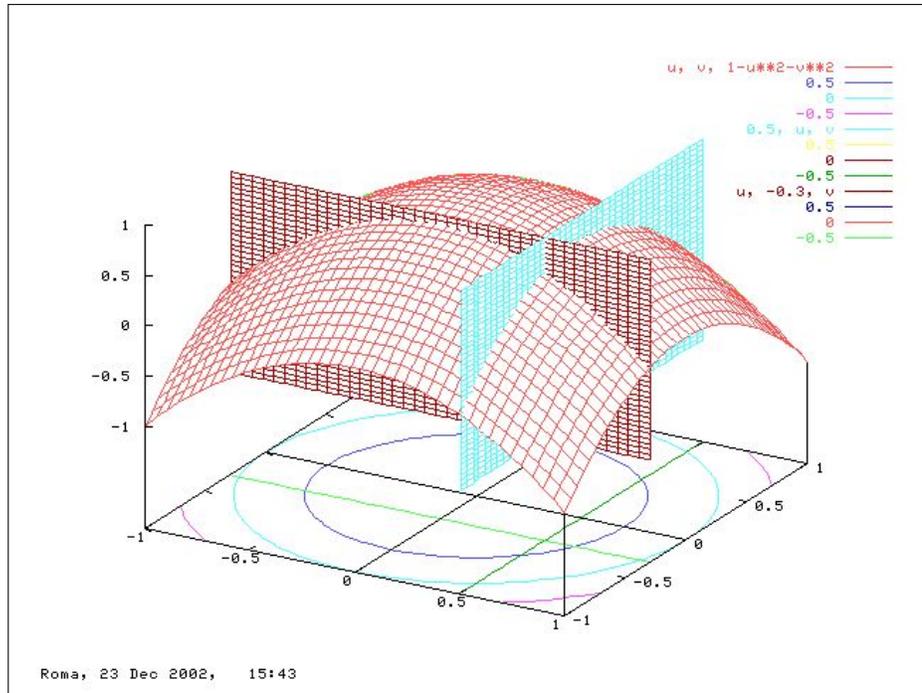


FIGURA 1. $z = 1 - x^2 - y^2$, $x_0 = 0.5$, $y_0 = -0.3$

Il calcolo delle derivate parziali si fa con le stesse regole di derivazione delle funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R} : le variabili rispetto a cui non si deriva sono trattate come costanti.

Ad esempio,

$$\begin{aligned} f(x,y) = x^2 + y^2 &\implies f_x(x,y) = 2x, & f_y(x,y) = 2y, \\ f(x,y) = x^3y + y^2 &\implies f_x(x,y) = 3x^2y, & f_y(x,y) = x^3 + 2y, \\ f(x,y) = \sin(x^2y) &\implies f_x(x,y) = 2xy \cos(x^2y), & f_y(x,y) = x^2 \cos(x^2y). \end{aligned}$$

Il vettore a due componenti,

$$\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$$

è detto GRADIENTE DI f (nel punto (x_0, y_0))¹.

2. La pendenza di una superficie secondo una direzione

La pendenza del grafico $y = g(x)$ di una funzione reale di una variabile reale ha un senso ben preciso: camminando sulla linea grafico nel verso delle x crescenti si percorre una salita o una discesa o si avanza orizzontalmente.

Si può misurare la pendenza affrontata tramite il coefficiente angolare della retta tangente, coefficiente che corrisponde al valore della derivata prima nel punto considerato

¹Il simbolo ∇ si legge “nabla”.

La pendenza di una superficie $u = f(x, y)$ non ha altrettanto significato preciso: si può, durante un'escursione in montagna, camminare su una costa

- faticando a salire,
- scivolando in discesa,
- mantenendosi (come la maggioranza dei sentieri) *in quota*.

Non ha quindi senso parlare della pendenza della costa, dipendendo questa dalle direzioni lungo le quali ci si muove su di essa (naturalmente si può parlare della direzione di pendenza massima).

Le osservazioni fatte precedentemente circa le sezioni del grafico di $f(x, y)$ giustificano la seguente osservazione:

OSSERVAZIONE 2.1. *La derivata parziale*

$$\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)_{x=x_0, y=y_0}$$

rispetto ad x misura la pendenza della superficie $u = f(x, y)$ nella direzione dell'asse x . Analogamente la derivata parziale

$$\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)_{x=x_0, y=y_0}$$

rispetto ad y misura la pendenza della superficie $u = f(x, y)$ nella direzione dell'asse y .

Se, ad esempio, $f_x(x_0, y_0) > 0$ e $f_y(x_0, y_0) < 0$ chi si muovesse sul grafico dal punto (x_0, y_0) lungo la direzione dell'asse x crescente camminerebbe in salita, mentre chi si muovesse lungo la direzione dell'asse y crescente camminerebbe in discesa.

2.1. Un problema:

Assegnata la superficie $z = f(x, y)$ e scelto un suo punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, lungo quale direzione si incontra la pendenza maggiore?

Proviamo a risolvere il problema nel caso che la superficie sia il piano $z = ax + by + c$.

Supponiamo di partire dal punto $(0, 0)$: siamo a quota c .

Fatto uno spostamento di lunghezza ρ nella direzione $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ arriviamo nel punto

$$(\rho \cos(\alpha), \rho \sin(\alpha), a\rho \cos(\alpha) + b\rho \sin(\alpha) + c)$$

La quota è variata dalla iniziale quota c della quantità

$$\rho(a \cos(\alpha) + b \sin(\alpha))$$

che può essere

- positiva se $\cos(\alpha)$ e $\sin(\alpha)$ hanno rispettivamente gli stessi segni di a e b
- nulla se, sempre ad esempio,

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin(\alpha) = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

- negativa se $\cos(\alpha)$ e $\sin(\alpha)$ hanno segni opposti a quelli di a e b

Un problema (semplice ma non banale) è riconoscere l'angolo α lungo il quale il cambio di quota è maggiore: lungo quale direzione pensate che scivoli una goccia d'acqua su tale piano ?

3. Le derivate parziali: prime, seconde,...

Analogamente al caso di funzioni di una variabile è possibile definire, per le $f(x, y)$ di due variabili le *derivate parziali successive*.

Supponiamo che la funzione f ammetta derivate rispetto ad x e rispetto ad y , cioè che siano definite le funzioni f_x e f_y : le funzioni f_x e f_y sono funzioni di due variabili che possono essere a loro volta derivabili parzialmente.

Una funzione di due variabili ammette (al più) due derivate prime (cioè f_x e f_y) e (al più) quattro derivate seconde:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Ad esempio, consideriamo la funzione $f(x, y) = x^3y + y^2$. Allora

$$\begin{aligned} f_x &= 3x^2y, & f_y &= x^3 + 2y, \\ f_{xx} &= 6xy, & f_{xy} &= 3x^2, & f_{yx} &= 3x^2, & f_{yy} &= 2. \end{aligned}$$

Chiaramente è possibile definire anche le derivate terze, quarte, ... di una funzione f .

Nel caso $f(x, y) = x^3y + y^2$,

$$\begin{aligned} f_{xxx} &= 6y, & f_{xxy} &= 6x, & f_{xyx} &= 6x, & f_{xyy} &= 0, \\ f_{yxx} &= 6x, & f_{yxy} &= 0, & f_{yyx} &= 0, & f_{yyy} &= 0. \end{aligned}$$

ESEMPIO 3.1. Calcolare le derivate prime, seconde e terze di $f(x, y) = xe^y + ye^x$.

4. Il teorema di Schwarz

TEOREMA 4.1 (Teorema di Schwarz). Sia f una funzione derivabile due volte in un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$. Se le funzioni f_{xy} e f_{yx} sono continue in (x_0, y_0) , allora vale l'uguaglianza

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

4.1. Un problema. Le due funzioni $3x + 5y + 7$ e $2x - 4y + 13$ sono le derivate parziali prime di qualche polinomio ?

No !

Se infatti esistesse un polinomio $P(x, y)$ tale che

$$(21) \quad \begin{cases} P_x &= 3x + 5y + 7 \\ P_y &= 2x - 4y + 13 \end{cases}$$

Allora dovrebbe riuscire anche, per il teorema di Schwarz, $P_{xy} = P_{yx}$

Ma, dalla relazione 21 discende

$$P_{xy} = (3x + 5y + 7)_y = 5, \quad P_{yx} = (2x - 4y + 13)_x = 2$$

due valori diversi.

L'unica conclusione che se ne può trarre è che un polinomio che soddisfi il sistema 21 non esiste !

Non è sempre lecito assegnare due funzioni e pretendere che esse siano le due derivate parziali prime di una stessa funzione !

5. Il teorema di Lagrange

Per le funzioni di una variabile derivabili vale il teorema di Lagrange o del valor medio

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)f'(\xi)$$

con ξ un punto medio tra x_1 e x_2 .

Nel caso delle funzioni di due variabili dotate delle due derivate parziali prime, vale (quasi ovviamente) un risultato analogo che coinvolge... due punti medi !

Siano (x_1, y_1) e (x_2, y_2) due punti, supponiamo che la funzione $f(x, y)$ sia definita in tutto il rettangolo che ha i due punti come estremi, aggiungendo e sottraendo lo stesso addendo $f(x_2, y_1)$ si ha

$$f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) = [f(x_1, y_1) - f(x_2, y_1)] + [f(x_2, y_1) - f(x_2, y_2)]$$

Basta ora gestire i due addendi a secondo membro con il teorema di Lagrange unidimensionale che conosciamo

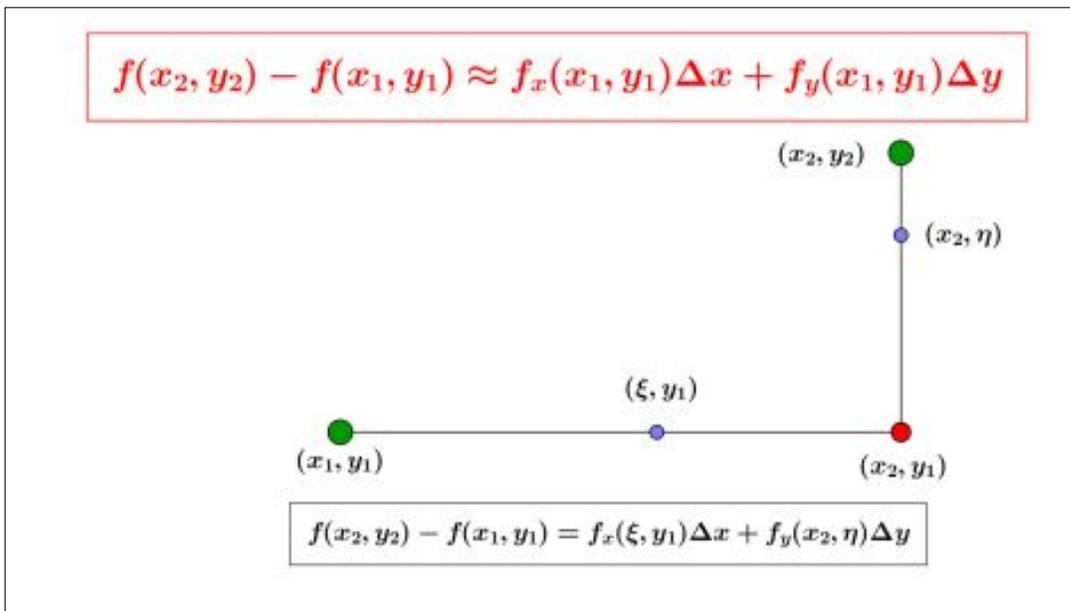


FIGURA 2. $f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) \approx f_x(x_1, y_1)\Delta x + f_y(x_1, y_1)\Delta y$

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) - f(x_2, y_1) &= (x_1 - x_2)f'_x(\xi, y_1), \\ f(x_2, y_1) - f(x_2, y_2) &= (y_1 - y_2)f'_y(x_2, \eta) \end{aligned}$$

per ottenere

$$(22) \quad f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) = (x_1 - x_2)f'_x(\xi, y_1) + (y_1 - y_2)f'_y(x_2, \eta)$$

ESEMPIO 5.1. Sia $f(x, y) = 3x^2 + 5y^2$ e siano $(x_1, y_1) = (1, 1)$ e $(x_2, y_2) = (3, 4)$:

$$(23) \quad f(3, 4) - f(1, 1) = [f(3, 4) - f(3, 1)] + [f(3, 1) - f(1, 1)]$$

Il primo addendo in parentesi quadra a secondo membro rappresenta la differenza dei valori della funzione

$$f(3, y) = 27 + 5y^2, \quad f'_y(3, y) = 10y$$

corrispondenti a $y_2 = 4$ e $y_1 = 1$:

$$f(3, y_2) - f(3, y_1) = f'_y(3, \eta)(y_2 - y_1) = 10\eta(4 - 1)$$

Il secondo addendo, sempre in parentesi quadre nella (23), rappresenta la differenza dei valori della funzione

$$f(x, 1) = 3x^2 + 5, \quad f'_x(x, 1) = 6x$$

corrispondenti a $x_2 = 3$ e $x_1 = 1$

$$f(x_2, 1) - f(x_1, 1) = 6\xi(x_2 - x_1) = 6\xi \cdot 2$$

Ne segue,

$$f(3, 4) - f(1, 1) = 10\eta(4 - 1) + 6\xi \cdot 2$$

relazione che corrisponde alla (22).

5.1. Una condizione di continuità.

TEOREMA 5.2. Una funzione $f(x, y)$ dotata delle due derivate parziali prime continue in un rettangolo D è lipschitziana (quindi continua) in D .

DIMOSTRAZIONE. Siano $(x, y), (x + h, y + k) \in D$

Stimiamo la differenza $f(x + h, y + k) - f(x, y)$ come indicato dalla precedente formula (22) di Lagrange.

Tenuto conto che le derivate sono continue esse saranno anche (teorema di Weierstrass) limitate in modulo da una costante M si ha

$$|f(x + h, y + k) - f(x, y)| \leq M(|h| + |k|) \leq 2M\sqrt{h^2 + k^2}$$

ovvero

$$|f(P) - f(Q)| \leq 2M\overline{PQ}, \quad \forall P, Q \in D$$

□

6. Il piano tangente

L'insieme definito da

$$(24) \quad \pi : z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

rappresenta un piano dello spazio ed è il piano, vedi Figura 3, che meglio approssima il grafico di f vicino al punto di coordinate $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

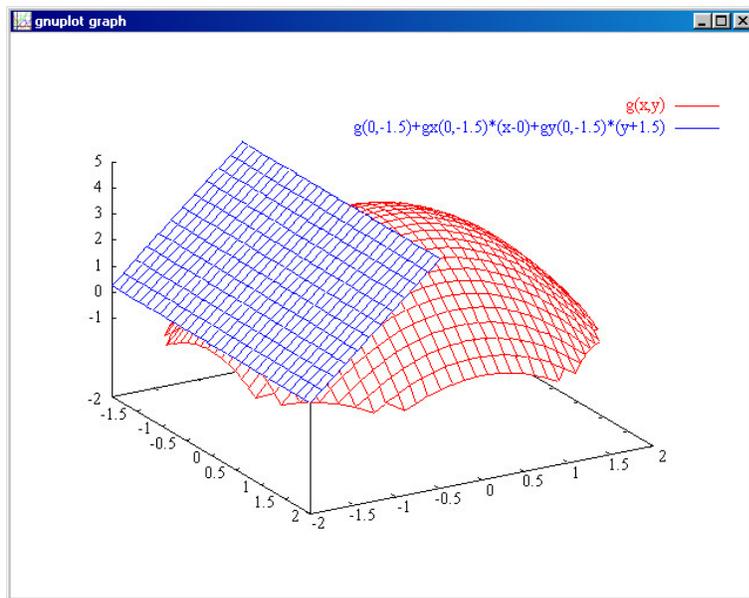


FIGURA 3. $g(x,y) = 4 - x^2 - y^2$, $(x_0, y_0) = (0, -1.5)$

Per questo il piano π definito da (24) è il *piano tangente* al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

ESEMPIO 6.1. Il piano tangente al grafico di $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2$ nel punto di coordinate $(0, 1, 4)$, vedi Figura 4, ha equazione

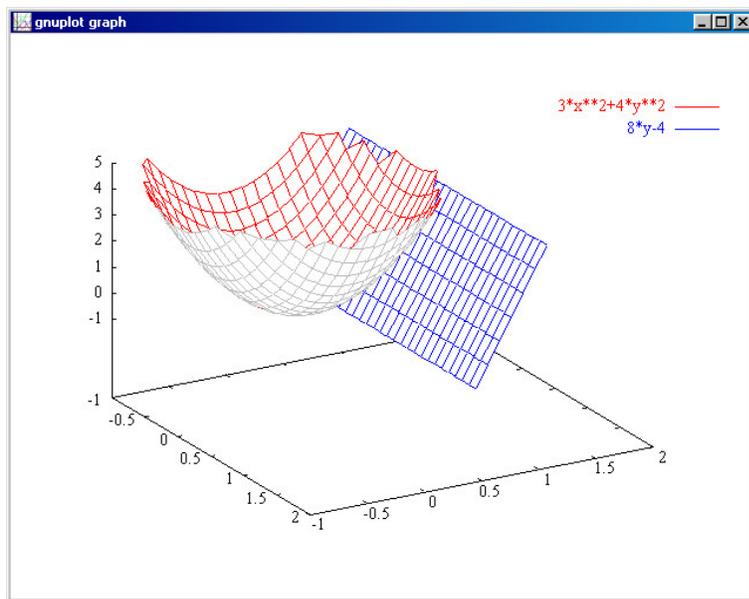


FIGURA 4. $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2$, $(0, 1, 4)$, $z = 8y - 4$

dato che $\nabla f = (6x, 8y)$, $\nabla f(0, 1) = (0, 8)$.

ESEMPIO 6.2. Il piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = x^2 - y^2$ nel punto $(0,0,0)$ è il piano, vedi Figura 5, $z = 0$: la sua posizione rispetto al grafico di f può

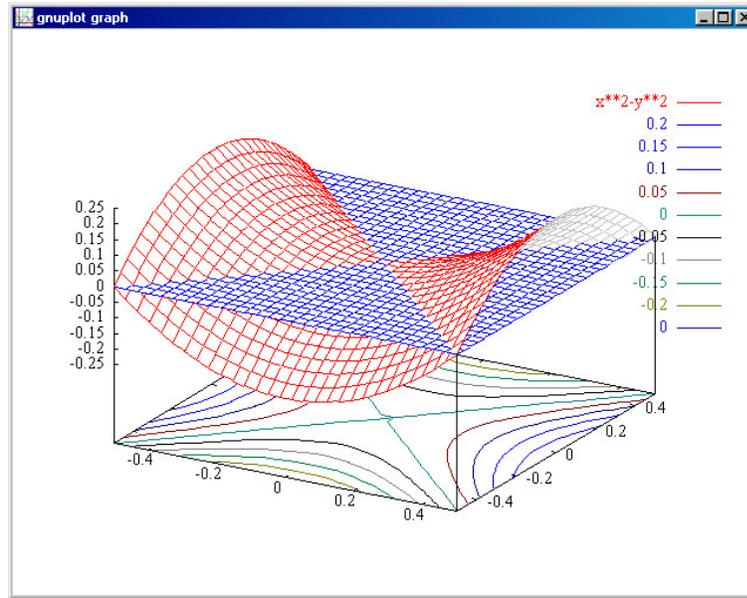


FIGURA 5. La sella $x^2 - y^2$ e il piano $z = 0$ tangente nell'origine

destare qualche sorpresa, specie a chi pensi (sempre e solo) alla figura tradizionale del piano tangente ad una sfera.

7. La derivazione delle funzioni composte

7.1. Il caso piú semplice. Componiamo una funzione $f(\phi)$ continua e derivabile di una sola variabile con una $\phi(x,y)$ dotata di derivate parziali prime continue:

$$F(x,y) = f[\phi(x,y)] : \begin{cases} F_x(x,y) = f'[\phi(x,y)]\phi_x(x,y), \\ F_y(x,y) = f'[\phi(x,y)]\phi_y(x,y) \end{cases}$$

ESEMPIO 7.1. $f(\phi) = \sin(\phi)$, $\phi(x,y) = x^2 + y^2$, $F(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$

$$\frac{\partial}{\partial x} \sin(x^2 + y^2) = \cos(x^2 + y^2) 2x$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \sin(x^2 + y^2) = \cos(x^2 + y^2) 2y$$

7.2. Il caso intermedio. Componiamo una funzione $f(\phi, \psi)$ con due funzioni $\phi(t)$, $\psi(t)$ di una sola variabile:

$$F(t) = f[\phi(t), \psi(t)] : F'(t) = f_\phi \phi'(t) + f_\psi \psi'(t)$$

ESEMPIO 7.2. $f(\phi, \psi) = \ln(1 + \phi^2 + \psi^4)$

$$\frac{d}{dt} \ln(1 + \cos^2(t) + \sin^4(t)) = \frac{-2 \cos(t) \sin(t) + 4 \sin^3(t) \cos(t)}{1 + \cos^2(t) + \sin^4(t)}$$

7.3. Il caso generale. Componiamo una funzione $f(\phi, \psi)$ con due funzioni

$$\phi = \phi(x, y), \quad \psi = \psi(x, y), \quad F(x, y) = f[\phi(x, y), \psi(x, y)]$$

Scelti due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) indichiamo con

$$\phi_1 = \phi(x_1, y_1), \quad \psi_1 = \psi(x_1, y_1), \quad \phi_2 = \phi(x_2, y_2), \quad \psi_2 = \psi(x_2, y_2)$$

La differenza

$$\Delta F = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1) = f(\phi_2, \psi_2) - f(\phi_1, \psi_1)$$

si approssima, ricordando l'espressione del teorema di Lagrange, vedi (22), pagina 75, con

$$\Delta F \approx f_\phi(\phi_1, \psi_1)\Delta\phi + f_\psi(\phi_1, \psi_1)\Delta\psi$$

Anche le differenze $\Delta\phi$ e $\Delta\psi$ si approssimano con

$$\begin{cases} \Delta\phi \approx \phi_x(x_1, y_1)\Delta x + \phi_y(x_1, y_1)\Delta y \\ \Delta\psi \approx \psi_x(x_1, y_1)\Delta x + \psi_y(x_1, y_1)\Delta y \end{cases}$$

Da cui, complessivamente si ottiene

$$\begin{aligned} \Delta F \approx & \{f_\phi(\phi_1, \psi_1)\phi_x(x_1, y_1) + f_\psi(\phi_1, \psi_1)\psi_x(x_1, y_1)\}\Delta x + \\ & \{f_\phi(\phi_1, \psi_1)\phi_y(x_1, y_1) + f_\psi(\phi_1, \psi_1)\psi_y(x_1, y_1)\}\Delta y \end{aligned}$$

ovvero supponendo $\Delta y = 0$ oppure $\Delta x = 0$ si ottengono, dividendo membro a membro,

$$\begin{cases} \frac{\Delta F}{\Delta x} \approx \{f_\phi(\phi_1, \psi_1)\phi_x(x_1, y_1) + f_\psi(\phi_1, \psi_1)\psi_x(x_1, y_1)\} \\ \frac{\Delta F}{\Delta y} \approx \{f_\phi(\phi_1, \psi_1)\phi_y(x_1, y_1) + f_\psi(\phi_1, \psi_1)\psi_y(x_1, y_1)\} \end{cases}$$

Da cui, passando al limite si ottengono le espressioni delle derivate della funzione composta:

$$(25) \quad \begin{cases} F_x(x, y) = f_\phi\phi_x(x, y) + f_\psi\psi_x(x, y) \\ F_y(x, y) = f_\phi\phi_y(x, y) + f_\psi\psi_y(x, y) \end{cases}$$

ESEMPIO 7.3. Il caso delle coordinate polari: sia

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} : \quad x = \rho \cos(\theta), \quad y = \rho \sin(\theta)$$

$$F(\rho, \theta) = \rho \cos^2(\theta) \sin(\theta)$$

Un calcolo diretto (possediamo l'espressione esplicita della funzione composta) produce

$$F_\rho(\rho, \theta) = \cos^2(\theta) \sin(\theta)$$

Il risultato garantito dal teorema è invece

$$F_\rho = f_x x_\rho + f_y y_\rho = f_x \cos(\theta) + f_y \sin(\theta) =$$

$$\cos(\theta) \left(\frac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xy}{x^2+y^2} \right) + \sin(\theta) \left(\frac{-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2}{x^2+y^2} \right)$$

Sostituendo, dovunque si incontrino, ad x e y le relative espressioni in ρ e θ si ha

$$\begin{aligned} \cos^2(\theta) \sin(\theta) - 2\cos^2(\theta) \sin^3(\theta) + 2\cos^2(\theta) \sin(\theta) - 2\cos^4(\theta) \sin(\theta) &= \\ = 3\cos^2(\theta) \sin(\theta) - 2\cos^2(\theta) \sin(\theta) &= \cos^2(\theta) \sin(\theta) \end{aligned}$$

7.4. La formula mnemonica. La regola di derivazione delle funzioni composte si ricorda facilmente nella forma seguente

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{cases}$$

La formula include, come casi particolari quelli considerati inizialmente

- f dipendente da una sola variabile,
- f dipendente da due variabili ma ϕ e ψ dipendenti da una sola.

8. Il teorema del valor medio

Le funzioni

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

di due (o piú) variabili beneficiano di un risultato naturale estensione del teorema di Lagrange incontrato nel caso delle funzioni $y = f(x)$ definite su intervalli $a \leq x \leq b$.

Consideremo d'ora in poi funzioni $u = f(x, y)$, a valori reali, che abbiano

- dominio di definizione D convesso².
- abbiano derivate parziali prime continue.

Per calcolare la differenza

$$f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

consideriamo:

- una rappresentazione parametrica del segmento di estremi

$$(x_0, y_0), \quad (x, y)$$

$$\begin{cases} \xi(t) = x_0 + t(x - x_0), \\ \eta(t) = y_0 + t(y - y_0) \end{cases}, \quad t \in [0, 1]$$

²Ricordiamo che un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice convesso se contiene tutti i segmenti di cui contenga gli estremi (rettangoli, poligoni regolari, cerchi, ecc sono convessi, insiemi a ferro di cavallo non sono convessi, non sono convesse le corone circolari e tutti gli insiemi dotati di "lacune")

- la funzione composta

$$F(t) = f(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)),$$

funzione di una variabile definita per $t \in [0, 1]$

- la differenza

$$F(1) - F(0) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

- se $f(x, y)$ possiede derivate parziali prime continue allora $F(t)$ è derivabile³

$$(26) \quad F'(t) = f_x(\xi(t), \eta(t))(x - x_0) + f_y(\xi(t), \eta(t))(y - y_0)$$

Applichiamo il teorema di Lagrange alla funzione $F(t)$, $t \in [0, 1]$

$$F(1) - F(0) = F'(\theta)(1 - 0)$$

Indicato con

$$P_\theta = (x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0))$$

il punto del segmento (x, y) , (x_0, y_0) corrispondente al valore θ si ha

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = F(1) - F(0) = f_x(P_\theta)(x - x_0) + f_y(P_\theta)(y - y_0)$$

Il risultato osservato è riassunto nel seguente

TEOREMA 8.1 (Teorema del valor medio). *La funzione $f(x, y)$ sia definita in un insieme D aperto⁴ e convesso, sia continua e abbia le derivate parziali prime continue: comunque si prendano due punti (x_0, y_0) e (x, y) in D esiste almeno un punto (ξ, η) appartenente al segmento da (x_0, y_0) a (x, y) tale che*

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_x(\xi, \eta)(x - x_0) + f_y(\xi, \eta)(y - y_0)$$

ESEMPIO 8.2. *Sia*

$$f(x, y) = x^3 + y^2, \quad f_x(x, y) = 3x^2, \quad f_y(x, y) = 2y$$

Consideriamo la differenza, $f(2, 1) - f(0, 0) = 9$ che deve rappresentarsi, vedi Teorema 8.1, come

$$f_x(\xi, \eta) 2 + f_y(\xi, \eta) 1$$

Il punto (ξ, η) deve stare sul segmento S dall'origine a $(2, 1)$, quindi

$$(\xi, \eta) = (2\tau, \tau) \quad \tau \in [0, 1]$$

$$2f_x(2\tau, \tau) + f_y(2\tau, \tau) = 9 \quad \rightarrow \quad \tau = \frac{\sqrt{217} - 1}{24}$$

e infatti

$$2.3. \left(2 \frac{\sqrt{217} - 1}{24} \right)^2 + 2 \left(\frac{\sqrt{217} - 1}{24} \right) = 9$$

COROLLARIO 8.3. *Una funzione $f(x, y)$ (continua con le derivate parziali in un convesso D) che abbia le due derivate parziali nulle è costante.*

³Teorema di derivazione delle funzioni composte

⁴Ricordate che tutti gli algoritmi di tipo differenziale funzionano nei punti interni, cioè in insiemi aperti...

DIMOSTRAZIONE. è evidente... essa è Lipschitziana con costante di Lipschitz $L = 0$! \square

COROLLARIO 8.4. Una funzione $f(x, y)$ (continua con le derivate parziali in un convesso D) che abbia le due derivate parziali costanti

$$f_x(x, y) = a, \quad f_y(x, y) = b$$

è un polinomio di primo grado

$$f(x, y) = ax + by + c$$

DIMOSTRAZIONE.

$$g(x, y) = f(x, y) - ax - by$$

ha le derivate parziali prime nulle... quindi è costante ! \square

9. Interpretazione geometrica

Fissati due punti $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$ consideriamo la curva \mathcal{C} di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = f[x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1)] \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

\mathcal{C} è la sezione della superficie Σ grafico di $f(x, y)$ con il piano verticale determinato dai due punti $(x_1, y_1, 0), (x_2, y_2, 0)$.

Indichiamo con \vec{v} un vettore tangente alla curva e con $\overrightarrow{P_1P_2}$ il vettore che congiunge gli estremi

$$\vec{v} = \begin{cases} (x_2 - x_1) \\ (y_2 - y_1) \\ f_x[\dots](x_2 - x_1) + f_y[\dots](y_2 - y_1) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{cases} (x_2 - x_1) \\ (y_2 - y_1) \\ f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) \end{cases}$$

Il teorema del valor medio corrisponde, esattamente come osservato in una dimensione, alla presenza di un punto $(x_\theta, y_\theta, f(x_\theta, y_\theta)) \in \mathcal{C}$ in cui la retta tangente alla curva è parallela alla corda determinata dai due estremi di \mathcal{C} .

OSSERVAZIONE 9.1. Per una curva \mathcal{C} nello spazio di estremi A e B non è sempre vero che ci sia un punto $P \in \mathcal{C}$ in cui la tangente sia parallela al segmento AB (si pensi ad una elica, con estremi posti sulla stessa verticale...)

Questo accade invece per il profilo altimetrico precedente..., curva piana in quanto contenuta nel piano verticale determinato dai due punti $(x_1, y_1, 0), (x_2, y_2, 0)$.⁵

⁵ Una curva piana è una curva interamente contenuta in un piano. Sono curve piane le circonferenze, non sono piane, in generale, le eliche.

Formula di Taylor

1. Introduzione

Approssimare una funzione vuol dire sostituire l'algoritmo, ritenuto difficile, che la definisce con un altro piú semplice e quindi piú facile a calcolarsi.

Il prezzo di questa sostituzione sta, naturalmente, nel fatto che cosí facendo si introduce una distorsione, un errore che si dice

errore di approssimazione.

L'approssimazione è tecnicamente interessante o accettabile se si conosce una stima dell'errore di approssimazione, stima che permetta di valutare se tale errore sia o meno tollerabile in relazione alle precisioni di calcolo richieste.

Considerato che

- i polinomi di primo grado sono calcolabili con grande facilitá,
- la maggioranza delle funzioni sono definite da algoritmi assai piú complessi

non deve stupire che le piú frequenti tecniche di approssimazione facciano ricorso a polinomi di primo grado.

In termini geometrici o di grafico tali approssimazioni sono semplicemente lo scambio del grafico della funzione con il grafico della retta, nel caso unidimensionale, o, nel caso bidimensionale lo scambio del grafico della funzione con il piano tangente.

ESEMPIO 1.1. *Calcolare il valore di*

$$f(x, y) = 1 + \sin(x + y)$$

nel punto $x_0 = 0.01, y_0 = 0.02$.

è innegabile che

- *il punto (x_0, y_0) assegnato sia abbastanza vicino all'origine,*
- *il piano tangente al grafico della $f(x, y)$ nell'origine è*

$$z = 1 + x + y,$$

- *la tentazione di proporre come approssimazione di $f(x_0, y_0)$ proprio il valore $1 + x_0 + y_0$ è forte...*
- *forse l'errore di approssimazione che si commetterebbe è, tutto sommato, accettabile...!*

PROBLEMA 1.2. *Come stimare il precedente errore di approssimazione*

$$|f(x_0, y_0) - \{1 + x_0 + y_0\}|$$

in modo da poter decidere seriamente se esso sia o meno al di sotto della tolleranza che supponiamo sia stata assegnata ?

OSSERVAZIONE 1.3. *Ricordate che la prima, piú semplice approssimazione di una funzione $f(x,y)$ è sempre quella fornita da un suo valore*

$$f(x,y) \simeq f(x_0,y_0)$$

questo è il motivo per cui, quasi sempre le approssimazioni di $f(x,y)$ iniziano con

$$f(x,y) \simeq f(x_0,y_0) + \dots$$

dove i puntini rappresentano correzioni via via piú precise.

Le approssimazioni che studieremo in questo capitolo si chiamano

*polinomi di Taylor*¹

polinomi... perchè si tratta di polinomi.

1.1. La formula in una dimensione. Richiamiamo brevemente la costruzione dei polinomi di Taylor $P_k(t)$ associati, in un punto t_0 ad una funzione $f(t)$ indefinitamente derivabile:

$$P_1(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$$

$$P_2(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!}f''(t_0)(t - t_0)^2$$

$$\dots = \dots$$

$$P_n(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!}f''(t_0)(t - t_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{[n]}(t_0)(t - t_0)^n$$

Tali polinomi sono determinati da

- la funzione $f(t)$
- il punto t_0
- l'intero n

Il risultato fondamentale che rende interessanti tali polinomi ai fini dell'approssimazione è l'espressione della differenza che intercorre tra la funzione $f(t)$ e ciascuno dei polinomi $P_k(t)$

$$(27) \quad f(t) - P_k(t) = \frac{1}{(k+1)!}f^{[k+1]}(\tau)(t - t_0)^{k+1}$$

L'aspetto interessante della (27) è la possibilità di stimare l'errore che intercorre tra il valore fornito da ciascuno dei $P_k(t)$ e il valore *vero* $f(t)$: supposto di conoscere che

$$\forall t : \quad \left| f^{[k+1]}(t) \right| \leq M$$

segue

$$(28) \quad |f(t) - P_k(t)| \leq \frac{M}{(k+1)!} |t - t_0|^{k+1}$$

¹Brook Taylor (Edmonton, 18 agosto 1685, Londra, 29 dicembre 1731)

ESEMPIO 1.4. Si debba calcolare $\sin(0.017)$: serviamoci del primo ($n = 1$) polinomio di Taylor relativo alla funzione $\sin(t)$ e a $t_0 = 0$

$$P_1(t) = \sin(0) + \sin'(0)(t - 0) \rightarrow P_1(t) = t$$

Tenuto conto che

$$|\sin''(t)| \leq 1$$

si ha, dalla (28)

$$|\sin(t) - t| \leq \frac{1}{2}t^2 \quad \rightarrow \quad |\sin(0.017) - 0.017| \leq \frac{1}{2}0.017^2 = 0.0001445$$

Qualora l'errore possibile incontrabile, 0.0001445 apparisse troppo grosso si può ricorrere all'approssimazione offerta dai polinomi di Taylor di grado maggiore

$$P_2(t) = t$$

$$P_3(t) = t - \frac{1}{6}t^3$$

$$P_4(t) = t - \frac{1}{6}t^3$$

$$P_5(t) = t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5$$

... ..

Ad esempio

$$\begin{aligned} |\sin(t) - P_4(t)| &\leq \frac{1}{120}t^5 \quad \rightarrow \quad \left| \sin(0.017) - 0.017 + \frac{1}{6}0.017^3 \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{120}0.017^5 = 1.183 \cdot 10^{-11} \end{aligned}$$

forse, quest'ultima, risulta un' approssimazione soddisfacente per le esigenze di precisione che il calcolo che si sta svolgendo richiede !

2. La formula di Taylor in due variabili

Un ragionamento analogo a quello del precedente Teorema del valor medio o di Lagrange permette di riconoscere una stima dell'errore che si può commettere approssimando una funzione $f(x, y)$ con il suo piano tangente

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Supponiamo $f \in C^2(A)$, A convesso e siano

$$P_0 = (x_0, y_0), \quad P = (x_0 + h, y_0 + k) \in A$$

Il segmento $\overline{P_0P}$ è interamente contenuto in A : i suoi punti P_t hanno coordinate

$$P_t = (x_0 + ht, y_0 + kt), \quad t \in [0, 1]$$

Consideriamo la funzione di una variabile t

$$F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk) \quad t \in [0, 1].$$

funzione composta della f e della rappresentazione parametrica del segmento $\overline{P_0P}$.

I valori della $F(t)$ per $t \in [0, 1]$ sono i valori della f sui punti del segmento da (x_0, y_0) a $(x_0 + h, y_0 + k)$.

$$F(0) = f(x_0, y_0), \quad F(1) = f(x_0 + h, y_0 + k)$$

Dato che f è di classe C^2 , il Teorema di derivazione delle funzioni composte garantisce che $F \in C^2([0, 1])$.

La funzione $F(t)$ sarà quindi sviluppabile in formula di Taylor di punto iniziale $t_0 = 0$ e ordine $n = 2$

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{1}{2}F''(\theta)t^2$$

con $\theta \in [0, t] \subseteq [0, 1]$ opportuno.

Scelto $t = 1$ si ha quindi

$$(29) \quad F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(\theta).$$

Tenuto conto che

$$\begin{cases} F(1) = f(x_0 + h, y_0 + k), \\ F(0) = f(x_0, y_0), \\ F'(0) = f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k. \\ F''(t) = f_{xx}(P_t)h^2 + 2f_{xy}(P_t)hk + f_{yy}(P_t)k^2 \end{cases}$$

Calcolando la derivata seconda in $t = \theta$ e sostituendo in (29) otteniamo

$$(30) \quad \begin{aligned} f(P) &= f(P_0) + f_x(P_0)h + f_y(P_0)k \\ &+ \frac{1}{2} \{ f_{xx}(P_\theta)h^2 + 2f_{xy}(P_\theta)hk + f_{yy}(P_\theta)k^2 \}, \end{aligned}$$

dove $P_\theta = (x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$.

Quanto osservato è riassunto nel seguente

TEOREMA 2.1 (Formula di Taylor di ordine 1). *Sia $f(x, y)$ di classe C^2 in A aperto di \mathbb{R}^2 : sia*

$P_0 = (x_0, y_0) \in A$ e sia $C(P_0, r)$ un cerchio di centro P_0 e raggio r tutto contenuto in A :

$\forall P = (x_0 + h, y_0 + k) \in C(P_0, r)$ riesce

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + R(h, k)$$

con

$$R(h, k) = \frac{1}{2} \{ f_{xx}(x_\theta, y_\theta)h^2 + 2f_{xy}(x_\theta, y_\theta)hk + f_{yy}(x_\theta, y_\theta)k^2 \}$$

essendo (x_θ, y_θ) un punto opportuno del segmento di estremi (x_0, y_0) e $(x_0 + h, y_0 + k)$.

Si noti che l'errore di approssimazione R è presumibilmente

- tanto più piccolo quanto più $(x_0 + h, y_0 + k)$ è vicino a (x_0, y_0)
- tanto più grande quanto più $(x_0 + h, y_0 + k)$ è lontano da (x_0, y_0)

In altri termini la formula di Taylor di primo ordine

$$f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k$$

fornisce approssimazioni *locali* di $f(x_0 + h, y_0 + k)$, buone su punti vicini a quello iniziale, h e k piccoli.

PROPOSIZIONE 2.2. *Se le derivate seconde della funzione f verificano, tutte e tre la maggiorazione*

$$|f_{xx}| \leq M, \quad |f_{xy}| \leq M, \quad |f_{yy}| \leq M,$$

l'errore di approssimazione relativo alla precedente formula di Taylor di ordine 1, soddisfa la maggiorazione

$$|R| \leq \frac{1}{2}M \{h^2 + 2|h||k| + k^2\} \leq M(h^2 + k^2)$$

In altri termini l'errore che si può commettere servendosi per valutare $f(x_0 + h, y_0 + k)$ della approssimazione di Taylor di primo ordine non supera

$$M \left(\sqrt{h^2 + k^2} \right)^2$$

un multiplo del quadrato della distanza tra $(x_0 + h, y_0 + k)$ e (x_0, y_0) .

ESEMPIO 2.3. *Supponiamo ad esempio che non si accettino errori superiori ad $1/10$ e che riesca $M = 10$: l'algoritmo di approssimazione di Taylor di primo ordine, ovvero l'approssimazione col piano tangente, sarebbe stato accettabile, tenuto conto della precedente Proposizione, se*

$$\frac{1}{2}10(|h| + |k|)^2 < 1/10 \quad \rightarrow \quad |h| + |k| < \frac{\sqrt{2}}{10}$$

cosa che accade certamente se il punto P appartiene al cerchio di centro P_0 e raggio $\sqrt{2}/20$.

Nel caso del precedente Esempio 1.1, $f(x, y) = 1 + \sin(x + y)$, la stima per le derivate seconde richiesta nella precedente Proposizione 2.2 è ben nota: $M = 1$.

Quindi

$$|f(x_0, y_0) - (1 + x_0 + y_0)| \leq \frac{1}{2}(|x_0| + |y_0|)^2$$

Nel caso del punto P_0 assegnato l'errore di approssimazione creato dall'algoritmo del piano tangente sarebbe stato non superiore a

$$\frac{1}{2}(0.01 + 0.02)^2 = 0.00045$$

Se tale quantità rientra nelle tolleranze accettate l'approssimazione del piano tangente è stata un buon investimento: un calcolo rapidissimo e un risultato accettabilmente vicino al vero !

3. Formule di Taylor di ordine superiore

Il procedimento con cui è stata costruita la formula di Taylor di ordine 1 era fondato sulla capacità di sviluppare in formula di Taylor la funzione

$$F(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt), \quad t \in [0, 1]$$

Tenuto conto che, se la f ha derivate parziali continue fino ad un certo ordine m riesce anche $F(t) \in C^m([0, 1])$ si possono considerare per la $F(t)$ formule di ordine superiore:

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{1}{2}F''(0)t^2 + \frac{1}{3!}F^{[3]}(\tau)t^3$$

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{1}{2}F''(0)t^2 + \frac{1}{3!}F^{[3]}(0)t^3 + \frac{1}{4!}F^{[4]}(\tau)t^4$$

ecc.

Da tali formule si ricavano le corrispondenti per la f con le stesse osservazioni usate nel primo ordine.

Elenchiamo, trascurando l'espressione del resto, i polinomi di Taylor associati ad f nel punto iniziale $P_0 = (x_0, y_0)$:

- **Ordine 1**

$$f(P_0) + f_x(P_0)h + f_y(P_0)k$$

- **Ordine 2**

$$f(P_0) + f_x(P_0)h + f_y(P_0)k + \frac{1}{2} \{ f_{xx}(P_0)h^2 + 2f_{xy}(P_0)hk + f_{yy}(P_0)k^2 \}$$

- **Ordine 3**

$$f(P_0) + f_x(P_0)h + f_y(P_0)k + \frac{1}{2} \{ f_{xx}(P_0)h^2 + 2f_{xy}(P_0)hk + f_{yy}(P_0)k^2 \} + \\ + \frac{1}{3!} \{ f_{xxx}(P_0)h^3 + 3f_{xxy}(P_0)h^2k + 3f_{xyy}(P_0)hk^2 + f_{yyy}(P_0)k^3 \}$$

OSSERVAZIONE 3.1. Il calcolo dei numeri $F^{[k]}(0)$ si ottiene abbastanza agevolmente osservando un'analogia formale molto importante

$$F'(0) = \left((x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0)$$

$$F''(0) = \left((x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right)^{[2]} f(x_0, y_0)$$

$$F'''(0) = \left((x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right)^{[3]} f(x_0, y_0)$$

$$F^{[k]}(0) = \left((x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right)^{[k]} f(x_0, y_0)$$

sviluppando le potenze indicate come ordinarie potenze di un binomio e applicando il risultato formale ottenuto alla funzione f nel punto (x_0, y_0)

Così, ad esempio per calcolare $F''(0)$ si ha

$$\begin{aligned} & \left((x-x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right)^{[2]} f(x_0, y_0) = \\ & = \left((x-x_0)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2(x-x_0)(y-y_0) \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0)^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x_0, y_0) = \\ & = (x-x_0)^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2(x-x_0)(y-y_0)_{xy} f(x_0, y_0) + (y-y_0)^2 f_{yy}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

4. Formule di Taylor quasi gratuite...

In molti casi i polinomi di Taylor possono essere ottenuti con poco sforzo...

Non è raro trovarsi infatti a lavorare con funzioni di due variabili quali

$$(31) \quad \sin(x-y), \quad e^{3x+5y}, \quad \log(1+x+y), \quad \text{ecc.}$$

ottenute componendo funzioni note di una variabile

$$\sin(t), \quad e^t, \quad \log(1+t), \quad \text{ecc.}$$

Dal momento che i polinomi di Taylor per tali funzioni di una variabile sono molto noti si può agevolmente servirsi di essi per ricavare i polinomi di Taylor per le funzioni (31).

Ad esempio,

$$\begin{aligned} \sin(t) &\cong t - \frac{1}{3!}t^3 \quad \Rightarrow \quad \sin(x-y) \cong (x-y) - \frac{1}{3!}(x-y)^3 \\ e^t &\cong 1+t + \frac{1}{2}t^2 \quad \Rightarrow \quad e^{3x+5y} \cong 1 + (3x+5y) + \frac{1}{2}(3x+5y)^2 \\ \log(1+t) &\cong t - \frac{1}{2}t^2 \quad \Rightarrow \quad \log(1+x+y) \cong x+y - \frac{1}{2}(x+y)^2 \end{aligned}$$

4.1. La formula di Taylor per... i polinomi.

Sia

$$P(x, y) = 1 + 2x + 3y + 4x^2 + 5xy + 6y^2 + 7x^3$$

un polinomio di terzo grado qualsiasi,

- $1 + 2x + 3y$ rappresenta il suo sviluppo di Taylor di ordine $n = 1$ e punto iniziale $(x_0, y_0) = (0, 0)$
- $1 + 2x + 3y + 4x^2 + 5xy + 6y^2$ rappresenta il suo sviluppo di Taylor di ordine $n = 2$ e punto iniziale $(x_0, y_0) = (0, 0)$

Si osservi che i polinomi sono già presentati con il loro sviluppo di Taylor di punto iniziale $(0, 0)$.

5. Riflettiamo sulla formula di Taylor

Le formule di Taylor (il plurale si riferisce al fatto che, almeno tenuto conto dell'ordine, ce ne sono più d'una) esprimono una funzione $f(x,y)$ come somma di un polinomio e di un resto (in qualche caso noto o comunque maggiorabile con quantità note).

La loro costruzione fa uso

- di un punto (x_0, y_0) comodo
- di un intero n , l'ordine della formula, quasi sempre $n = 1$ o $n = 2$,
- dei valori della funzione e delle sue derivate fino all'ordine n nel punto comodo (x_0, y_0)
- di alcune informazioni sul resto che legittimino la sua eventuale cancellazione... informazioni in genere dedotte dalla conoscenza di una maggiorazione delle derivate che in esso figurano.

5.1. Osservazione fondamentale.

L'attributo di *comodo* dato al punto iniziale (x_0, y_0) significa che in tale punto sono perfettamente calcolabili

$$f(x_0, y_0), \quad f_x(x_0, y_0), \quad f_y(x_0, y_0), \quad f_{xx}(x_0, y_0), \quad \text{ecc.}$$

valori tutti che intervengono nella costruzione dell'approssimazione di Taylor.

In assenza di un punto *comodo*, sul quale cioè la funzione e le sue derivate siano calcolabili agevolmente, non si costruisce alcuna formula di Taylor esplicita.

ESEMPIO 5.1. *La funzione $f(x,y) = \sqrt{1+x+y}$ è abbastanza difficile: tuttavia possiede evidenti punti comodi nel senso precedentemente illustrato:*

$$(0,0), \quad (1,2), \quad (312,312), \quad \text{ecc.}$$

infatti in tali punti sia la funzione che le sue derivate sono facilissime a calcolarsi... Ad esempio

$$f(312,312) = \sqrt{625} = 25, \quad f'(312,312) = 1/50, \quad \dots$$

Quindi la formula di Taylor permette di stimare bene la funzione ad esempio nei punti

$$(0.01, -0.02), \quad (0.9876, 2.345), \quad (311, 313), \quad \text{ecc.}$$

5.2. A cosa serve la formula ?

- **Uso numerico:** si stima il valore numerico $f(x,y)$ tramite il valore $P(x,y)$ del polinomio di Taylor e la maggiorazione del resto $|R| \leq \varepsilon$ tramite la quale si ottiene l'informazione

$$P(x,y) - \varepsilon \leq f(x,y) \leq P(x,y) + \varepsilon$$

- **Uso qualitativo:** emerge particolarmente nel caso di formule di ordine 2 e consente di raffrontare la posizione del grafico di $f(x,y)$ rispetto al piano tangente nel punto iniziale (x_0, y_0) ,
 - la forma della cupola,
 - la forma del fondo coppa,
 - la forma della sella,
 - altre forme...

Le configurazioni dei primi tre casi (cupola, coppa, sella) riguardano la decisione se un punto critico, cioè un punto a piano tangente orizzontale, sia o meno un punto di massimo o di minimo.

CAPITOLO 12

Massimi e minimi

1. Introduzione

(x_M, y_M) è un punto di massimo per la funzione, ovviamente a valori reali, $u = f(x, y)$ definita in E se riesce

$$f(x, y) \leq f(x_M, y_M), \quad \forall (x, y) \in E$$

Analogamente (x_m, y_m) è un punto di minimo se riesce

$$f(x_m, y_m) \leq f(x, y), \quad \forall (x, y) \in E.$$

Si dicono invece *punti di massimo relativo* quei punti $(x_*, y_*) \in E$ per i quali la disuguaglianza

$$f(x, y) \leq f(x_*, y_*)$$

sia verificata solo dagli $(x, y) \in E \cap D$, essendo D un conveniente disco di centro (x_*, y_*) . Analoga definizione per i punti di minimo relativo.

ESEMPIO 1.1. Sia

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

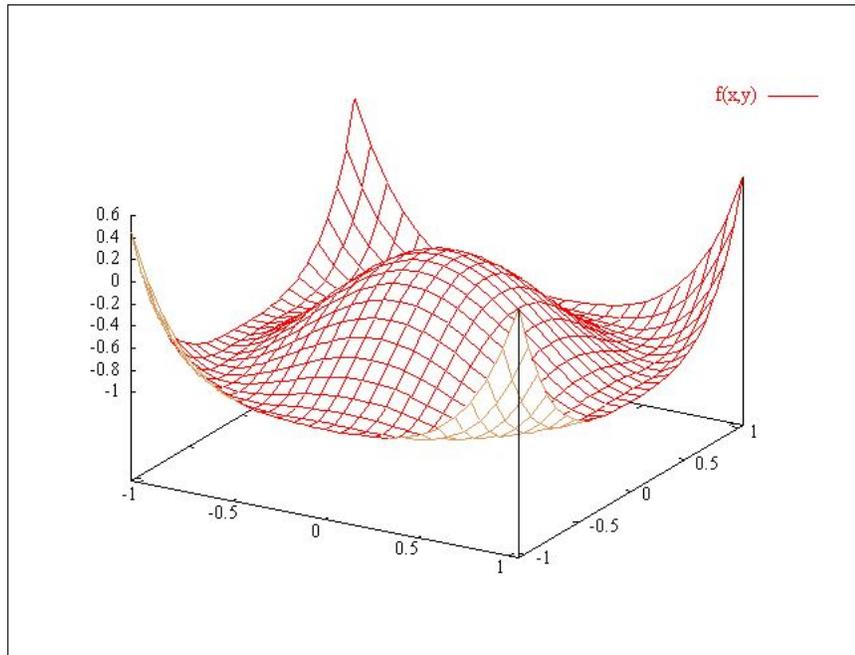


FIGURA 1. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

l'origine è un punto di massimo relativo: tuttavia basta allontanarsi poco dall'origine, arrivare per esempio in $(1, 1)$ per incontrare, (Vedi Figura 1.1), valori $f(1.05, 1.05) \simeq 0.4$ maggiori del valore $f(0, 0) = 0$ preso nell'origine.

1.1. I punti critici. I grafici delle funzioni $f(x, y)$ dotate di derivate parziali prime continue hanno piano tangente in ogni punto.

È evidente che se una funzione ha in un punto (x_0, y_0) interno al suo insieme di definizione un massimo o un minimo relativo in tale punto il piano dovrà essere orizzontale.

Quindi in tale punto le due derivate parziali dovranno essere nulle

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) = 0$$

I punti in cui entrambe le derivate parziali prime di una funzione si annullano si chiamano *punti critici*.

NOTA:

L'osservazione che il piano tangente in un punto di massimo o di minimo relativo sia necessariamente orizzontale cade se tale punto sta sulla frontiera dell'insieme di definizione.

Pensate alla funzione

$$f(x, y) = x + 2y, \quad (x, y) \in Q$$

essendo Q il quadrato $(0, 0), (1, 1)$: nei vertici $(0, 0), (1, 1)$ di Q si hanno sicuramente punti di minimo o di massimo relativi senza evidentemente che il grafico di $f(x, y)$ (un piano...) abbia in tali punti piano tangente orizzontale...!

L'osservazione precedente sul piano tangente suggerisce un algoritmo per cercare *i punti di massimo o di minimo relativi che cadano all'interno*:

- si cercano i punti critici
- tra essi si selezionano quelli che sono anche di massimo o di minimo relativo

La selezione accennata non è sempre facile e si basa sulla formula di Taylor.

2. La selezione: condizioni sufficienti

La decisione sulla qualità di un punto critico di essere o meno un punto di massimo o di minimo relativo viene presa servendosi della formula di Taylor di ordine $n = 1$.

Sia (x_0, y_0) un punto critico, si ha, posto $x = x_0 + h, y = y_0 + k$,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \{ f_{xx}(x_\theta, y_\theta) h^2 + 2f_{xy}(x_\theta, y_\theta) hk + f_{yy}(x_\theta, y_\theta) k^2 \}$$

avendo tenuto conto che la prima parte, quella lineare manca in conseguenza del fatto che $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$

Tenuto conto che il segno del primo membro è quello della forma quadratica in parentesi graffe a secondo membro si riconosce che

- se la forma quadratica è definita positiva (x_0, y_0) è punto di minimo relativo
- se la forma quadratica è definita negativa (x_0, y_0) è punto di massimo relativo
- se la forma quadratica non è definita (x_0, y_0) non è nè di massimo nè di minimo ma è punto di sella.

- **IL CASO DEL MINIMO:**

Forma quadratica definita o semidefinita positiva:

$$(32) \quad \begin{cases} f_{xx}(x_\theta, y_\theta) > 0, \\ f_{xx}(x_\theta, y_\theta)f_{yy}(x_\theta, y_\theta) - f_{xy}(x_\theta, y_\theta)^2 > 0 \end{cases}$$

la superficie grafico si trova al di sopra del piano tangente: del resto le (32) si riferiscono ad un punto (x_θ, y_θ) ignoto ma sono certamente soddisfatte, per continuità e quindi permanenza del segno, se

– le analoghe relazioni

$$\begin{cases} f_{xx}(x_0, y_0) > 0, \\ f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2 > 0 \end{cases}$$

valgono nel punto (x_0, y_0)

– lavoriamo in un intorno del punto (x_0, y_0) tanto piccolo da garantire che i segni di f_{xx} e di $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ si mantengano.

- **IL CASO DEL MASSIMO:**

Forma quadratica definita negativa:

$$(33) \quad \begin{cases} f_{xx}(x_\theta, y_\theta) < 0, \\ f_{xx}(x_\theta, y_\theta)f_{yy}(x_\theta, y_\theta) - f_{xy}(x_\theta, y_\theta)^2 > 0 \end{cases}$$

la superficie grafico si trova al di sotto del piano tangente: del resto le (33) sono certamente soddisfatte, per continuità e quindi permanenza del segno, se

– le analoghe relazioni

$$\begin{cases} f_{xx}(x_0, y_0) < 0, \\ f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2 > 0 \end{cases}$$

valgono nel punto (x_0, y_0)

– lavoriamo in un intorno del punto (x_0, y_0) tanto piccolo da garantire che i segni di f_{xx} e di $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ si mantengano.

• **IL CASO DELLA SELLA:**

Forma quadratica non definita:

$$(34) \quad f_{xx}(x_\theta, y_\theta)f_{yy}(x_\theta, y_\theta) - f_{xy}(x_\theta, y_\theta)^2 < 0$$

la superficie grafico si trova in parte sopra e in parte sotto il piano tangente: del resto la (34) è certamente soddisfatta, per continuità e quindi permanenza del segno, se

– l'analoga relazione

$$f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}(x_0, y_0)^2 < 0$$

vale nel punto (x_0, y_0)

– lavoriamo in un intorno del punto (x_0, y_0) tanto piccolo da garantire che il segno di $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ si mantenga.

2.1. Riassumendo:

Sia (x_0, y_0) un punto critico per $f(x, y)$, interno all'insieme E su cui si vogliono determinare il minimo e il massimo, detto J il determinante

$$J = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

$f_{xx}(x_0, y_0) > 0$	$J > 0$	\rightarrow	<i>minimo</i>
$f_{xx}(x_0, y_0) < 0$	$J > 0$	\rightarrow	<i>massimo</i>
	$J < 0$	\rightarrow	<i>sella</i>

Il segno del determinante J costruito con le derivate seconde eredita la proprietà della derivata seconda nel caso delle funzioni di una variabile.

3. Massimo e minimo in insiemi chiusi e limitati

Passiamo ora dall'analisi locale (cioè nell'intorno di un punto fissato) all'analisi globale : la ricerca del minimo e del massimo di una funzione data in un assegnato insieme C .

Supponiamo che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

- L'insieme $C = A \cup \partial A$ sia chiuso e limitato, con A aperto,
- la funzione f sia continua in C ,
- f sia dotata di derivate parziali prime continue all'interno A di C escluso al più un numero finito di punti,
- la frontiera ∂A di C sia formata da un numero finito di archi di curve regolari.

Tali condizioni includono le ipotesi del Teorema di Weierstrass e quindi garantiscono l'esistenza del minimo e del massimo.

I punti $P_{min}, P_{Max} \in C$ in cui saranno raggiunti il minimo e il massimo possono cadere

- all'interno A di C
- oppure sulla frontiera ∂A di C

quest'ultima possibilità giustifica la condizione posta sulla frontiera di essere fatta di archi regolari: al di fuori di tale situazione sarebbe estremamente difficile poter studiare la funzione assegnata f sulla frontiera ∂A .

3.1. L'algoritmo di ricerca di minimo e massimo nel caso unidimensionale.

Ricordiamo come la ricerca di massimo e minimo di $f(x), x \in I = [a, b]$ si facesse:

- cercando i punti interni ad (a, b) in cui la derivata prima si annullava, i punti critici,
- calcolando i valori della funzione sui punti critici trovati,
- calcolando i valori della funzione negli eventuali punti in cui f non sia derivabile,
- calcolando i valori della funzione sulla frontiera di I , i due punti $x = a$ e $x = b$,
- assumendo come minimo in I il minore dei valori (delle tre origini elencate) così trovati e come massimo il maggiore.

3.2. Il caso bidimensionale.

La ricerca del minimo e del massimo e dei punti in cui tali valori sono raggiunti si esegue nel caso bidimensionale in modo analogo.

- si cercano i punti

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$$

critici di f che cadono all'interno di A , e si calcolano i valori $f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), \dots$,

- si calcolano i valori di f sui punti in cui non è differenziabile,
- si calcolano il valore massimo e il valore minimo di f sulla frontiera ∂A .

Il minore tra i valori (delle tre origini elencate) calcolati rappresenta il minimo di f su C , il maggiore sempre tra i valori calcolati il massimo di f su C .

3.3. Il minimo e il massimo sulla frontiera. Lo studio della funzione sui punti della frontiera ∂A è sostanzialmente lo studio di una (o più) funzione di una variabile reale. Supponiamo, per semplicità, che la frontiera ∂A sia composta da una sola curva regolare di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b]$$

Studiare la funzione assegnata $f(x, y)$ sulla frontiera significa studiare la funzione composta

$$F(t) = f[x(t), y(t)], \quad t \in [a, b]$$

Cercare il massimo e il minimo di f sulla frontiera significa cercare il massimo e il minimo di F sull'intervallo $[a, b]$.

Nel caso, più complesso ma anche più frequente in cui la frontiera ∂A sia composta da più archi di curve regolari si dovrà eseguire la ricerca del massimo e del minimo di f su ciascuno di tali archi.

ESEMPIO 3.1. *Determinare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ nel dominio definito da*

$$T = \{x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3\}$$

Soluzione.

- Il dominio C è un triangolo, chiuso e, naturalmente limitato,
- la funzione, un polinomio, è continua in tutto il piano,
- la funzione è anche di classe C^2 in tutto il piano,
- non esistono punti in cui f non sia differenziabile,
- la frontiera di C è fatta da tre segmenti.

1) Punti critici:

$$f_x(x,y) = 2x - y + 1 = 0, \quad f_y(x,y) = 2y - x + 1 = 0.$$

risolvendo si trova il solo $(-1, -1) \in C$: in esso si ha il valore

$$f(-1, -1) = -1$$

2) Dato che la funzione è derivabile ovunque (è di classe C^∞ !), non ci sono valori provenienti da punti di non differenziabilità.

3) La frontiera: indicati con $O = (0, 0)$, $A = (0, -3)$ e $B = (-3, 0)$, i tre vertici si ha

$$\partial T = \overline{OB} \cup \overline{BA} \cup \overline{AO}.$$

Studio la funzione sui tre segmenti separatamente.

Segmento \overline{OA} . La funzione lungo questo segmento è data da $f(0,y) = y^2 + y$ per $y \in [-3, 0]$. Dal grafico della parabola, si deduce che ci sono tre punti candidati $(0, -3)$, $(0, -\frac{1}{2})$ e $(0, 0)$.

I valori di f sono

$$f(0, -3) = 6, f(0, -\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}, f(0, 0) = 0$$

Segmento \overline{OB} . Questa parte è analoga alla precedente (si potrebbe usare la simmetria della funzione) Dato che $f(x, 0) = x^2 + x$ per $x \in [-3, 0]$, i nuovi candidati hanno coordinate $(-3, 0)$, $(-\frac{1}{2}, 0)$ e il punto $(0, 0)$ già conteggiato nel segmento precedente.

I valori di f sono

$$f(-3, 0) = 6, f(-\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}, f(0, 0) = 0$$

Segmento \overline{AB} . Una possibile parametrizzazione di questo segmento si ottiene notando che si tratta di un grafico, quindi basta esplicitare una variabile in funzione dell'altra. Ad esempio, ponendo $y = -x - 3$, si ottiene

$$h(x) := f(x, -x - 3) = \dots = 3(x^2 + 3x + 2).$$

I punti candidati sono gli estremi $A = (-3, 0)$ e $B = (0, -3)$, già conteggiati in precedenza, e il punto corrispondente al vertice della parabola, di coordinate $(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$.

I valori di f sono

$$f(-3, 0) = 6, f(0, -3) = 6, f(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$$

Riassumendo i candidati minimi o massimi sono i valori

$$f(-1, -1), \quad f(0, 0), \quad f(0, -3), \quad f(-3, 0),$$

$$f(0, -1/2), \quad f(-1/2, 0), \quad f(-3/2, -3/2).$$

Dato che

$$f(-1, -1) = -1, \quad f(0, 0) = 0, \quad f(0, -3) = f(-3, 0) = 6$$

$$f(0, -1/2) = f(-1/2, 0) = -\frac{1}{4}, \quad f(-3/2, -3/2) = -\frac{3}{4},$$

si deduce che

$$\min_T f(x, y) = f(-1, -1) = -1,$$

$$\max_T f(x, y) = f(0, -3) = f(-3, 0) = 6.$$

ESEMPIO 3.2. Calcolare il minimo e il massimo della funzione $f(x, y) = |x - y|$ nel quadrato di vertici l'origine e il punto $(1, 1)$.

Soluzione:

La funzione assegnata è differenziabile in tutto il piano privato della retta $x - y = 0$. Fuori di tale retta, cioè nei due semipiani aperti da essa determinati, f coincide con $x - y$ in uno e con $y - x$ nell'altro: le derivate parziali sono costanti e non si annullano mai, Non ci sono punti critici nè in tutto il piano nè, tanto meno nell'interno del quadrato assegnato.

Ci sono, all'interno del quadrato punti in cui f non è differenziabile: su tali punti f prende un solo valore, lo 0.

Sui quattro segmenti che formano la frontiera si ha:

- $x = 0, 0 \leq y \leq 1$: $\rightarrow f(0, y) = y$, minimo valore 0, massimo valore 1,
- $x = 1, 0 \leq y \leq 1$: $\rightarrow f(1, y) = 1 - y$, minimo valore 0, massimo valore 1,
- $y = 0, 0 \leq x \leq 1$: $\rightarrow f(x, 0) = x$, minimo valore 0, massimo valore 1,
- $y = 1, 0 \leq x \leq 1$: $\rightarrow f(x, 1) = 1 - x$, minimo valore 0, massimo valore 1,

I valori calcolati sono pertanto due soli, 1 e 0: è ovvio quale sia il minimo e quale il massimo.

4. Massimi e minimi vincolati

Il problema riguarda la ricerca di massimo e minimo per una funzione $f(x, y)$ assegnata, considerata limitatamente ad una curva assegnata, in genere, con un'equazione $g(x, y) = 0$.

La curva $g(x, y) = 0$ prende in genere il nome di *vincolo* del problema di minimo o massimo.

ESEMPIO 4.1. Determinare il massimo e il minimo della funzione $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ sui punti dell'ellisse E : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$.

La funzione $f(x, y)$ rappresenta la distanza del punto (x, y) dall'origine e quindi il problema corrisponde geometricamente a trovare i punti dell'ellisse E più vicini all'origine e quelli più lontani.

La nota forma dell'ellisse E permette di rispondere:

- i punti più vicini all'origine sono $(0, 2)$ e $(0, -2)$ e quindi il minimo di f su E è $m = 2$,
- i punti più lontani dall'origine sono $(-3, 0)$ e $(3, 0)$ quindi il massimo di f su E è $M = 3$.

Naturalmente se la funzione f e la g che determina il vincolo sono continue l'esistenza di massimo e minimo è garantita dal Teorema di Weierstrass solo se l'insieme determinato dall'equazione $g(x, y) = 0$, il vincolo, è limitato.

Diversamente non può dirsi, in generale se minimo e/o massimo esistano.

4.1. Il caso di una curva cartesiana.

Supponiamo di cercare il minimo e il massimo di $f(x, y)$ sulla curva $\mathcal{C} : y = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Studiare $f(x, y)$ su \mathcal{C} significa studiare la funzione composta

$$F(x) = f[x, \varphi(x)], \quad x \in [a, b]$$

ESEMPIO 4.2. Determinare il massimo e il minimo di $f(x, y) = x^2 - y^2$ sull'insieme E determinato dall'equazione $x + y - 1 = 0$.

E è la retta $y = 1 - x$: studiare la f sull'insieme E significa studiare la funzione

$$F(x) = x^2 - (1 - x)^2 = 2x - 1$$

che non ha, al variare di $x \in \mathbb{R}$ nè minimo nè massimo.

Supponendo che sia la $f(x, y)$ che la $\varphi(x)$ siano regolari (derivate prime continue) il minimo e il massimo di $F(x) = f[x, \varphi(x)]$ cadono nei punti critici

$$F'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad f_x(x, \varphi(x)) + f_y(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0$$

ovvero

$$(35) \quad \begin{cases} f_x(x, y) + f_y(x, y) \cdot \varphi'(x) = 0 \\ \varphi(x) - y = 0 \end{cases}$$

Detti $\vec{t} = \{1, \varphi'(x)\}$, $\vec{v} = \{\varphi'(x), -1\}$ due vettori, il primo parallelo alla tangente alla curva e il secondo ortogonale alla tangente il sistema (35) equivale a

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) \cdot \vec{t} = 0 \\ \varphi(x) - y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla f(x, y) \parallel \vec{v} \\ \varphi(x) - y = 0 \end{cases}$$

4.2. Il caso generale.

Sia (x_0, y_0) un punto della curva $\mathcal{C} : g(x, y) = 0$ in cui $f(x, y)$ abbia un minimo o un massimo relativo.

Consideriamo la retta tangente alla curva \mathcal{C} in (x_0, y_0)

$$g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

sia $\vec{t} = \{-g_y(x_0, y_0), g_x(x_0, y_0)\}$ la direzione di tale retta.

Il fatto che $f(x, y)$ abbia un minimo o un massimo relativo in (x_0, y_0) implica che la derivata di f secondo la direzione \vec{t} in tale punto sia zero:

$$(36) \quad \frac{df}{d\vec{t}} = \nabla(f) \times \vec{t} = 0$$

Tenuto presente che l'ortogonalità $\nabla(f) \perp \vec{t}$ espressa nella (36) equivale, tenuto conto che $\nabla(g)$ è ortogonale a \vec{t} , al parallelismo

$$\nabla(f) \parallel \nabla(g)$$

che, a sua volta corrisponde all'esistenza di $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla(f) + \lambda \nabla(g) = 0$$

per un'opportuna costante λ .
si perviene al sistema

$$(37) \quad \begin{cases} \nabla f(x, y) + \lambda \nabla g(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Il sistema (37) corrisponde, naturalmente, al sistema

$$(38) \quad \begin{cases} f_x(x, y) + \lambda g_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) + \lambda g_y(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

detto dei *moltiplicatori di Lagrange*.

Il bilancio numero di incognite - numero di equazioni è soddisfatto: tre incognite x, y, λ e tre equazioni: i punti di massimo o di minimo relativi di $f(x, y)$ sui punti della curva $\mathcal{C} : g(x, y) = 0$ si trovano tutti tra le soluzioni del sistema (37).

OSSERVAZIONE 4.3. *Introdotta la funzione di tre variabili*

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

detta *Lagrangiana del problema*, il sistema (38) si riduce nella (apparentemente) unica formula

$$\nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) = 0$$

Parte 3

Integrali curvilinei

Integrali curvilinei

1. Lunghezza di una curva

Il concetto geometrico e naturale di lunghezza di una curva è collegato ad alcuni fatti che ammettiamo tacitamente:

- una curva sia un oggetto geometrico, ben preciso, realizzabile, ad esempio, con il filo di ferro,
- la lunghezza sia, per un segmento, la distanza tra i due estremi, distanza naturalmente nella metrica ordinaria,
- nel caso delle curve vere e proprie, diverse dai segmenti, la lunghezza si stimi per approssimazioni servendosi di poligoni inscritti esattamente come tutti hanno visto fare per la circonferenza. . .

Come si vede nelle precedenti ammissioni non si fa alcun riferimento alle rappresentazioni parametriche, strumenti invece indispensabili per fare del calcolo. . .

È chiaro quindi che ogni algoritmo destinato a misurare la lunghezza di una curva dovrà fornire valori che non cambino qualora ci si serva di altre rappresentazioni della stessa curva.

1.1. Rappresentazioni parametriche.

Sia \mathcal{C} la curva regolare rappresentata parametricamente da

$$\Phi: R \rightarrow R^3: \Phi(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}, t \in I = [a, b] \subseteq R$$

rappresentazione che soddisfi alle seguenti condizioni:

- $x(t), y(t), z(t) \in C^2(I)$
- $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) > 0$
- $a < t_1 \neq t_2 \leq b \rightarrow \Phi(t_1) \neq \Phi(t_2)$ (rappresentazione iniettiva).

L'ultima delle precedenti condizioni dice che per $t_1 \neq t_2$ riesce $\Phi(t_1) \neq \Phi(t_2)$, potendo coincidere solo se $t_1 = a$ e $t_2 = b$, cosa che accade per le cosiddette *curve chiuse*.

ESEMPIO 1.1. Una rappresentazione parametrica della circonferenza di centro l'origine e raggio 1 è data da

$$x(t) = \cos(t), y(t) = \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

La rappresentazione invece $x(t) = \cos(t), y(t) = \sin(t), \quad t \in [0, 4\pi]$ non soddisfa la terza delle tre condizioni poste.

In altri termini la prima rappresentazione produce una corrispondenza biunivoca tra la circonferenza e uno degli intervalli semiaperti (o semichiusi) $[0, 2\pi)$ oppure $(0, 2\pi]$.

La seconda rappresentazione. . . descrive due volte la circonferenza stessa !

1.2. La retta tangente. Sia $P_0 = \Phi(t_0)$ un punto della curva \mathcal{C} : la retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0), \\ y = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0), \\ z = z(t_0) + z'(t_0)(t - t_0) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

è la tangente a \mathcal{C} in P_0 .

Il versore

$$T(t) = \frac{\Phi'(t)}{|\Phi'(t)|} = \frac{\{x'(t), y'(t), z'(t)\}}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}}$$

è il versore tangente a \mathcal{C} in $P = \Phi(t)$.

1.3. Poligonali inscritte. Cos'è una poligonale inscritta in una curva? Guardate le due poligonali in figura relative ad una semicirconferenza

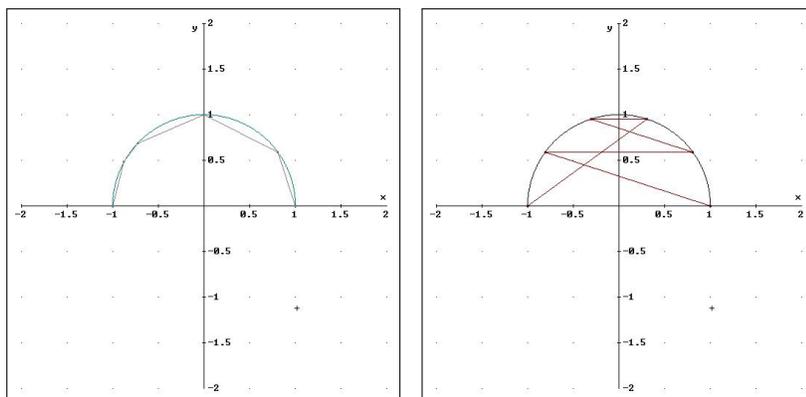


FIGURA 1. La prima è una poligonale inscritta, la seconda è soltanto una poligonale che ha i vertici sulla curva...

Solo la prima merita il nome di poligonale inscritta nella semicirconferenza AB : ogni vertice P_{i+1} si trova nell'arco di curva rimasta, l'arco P_iB . La seconda, fra l'altro vistosamente intrecciata, può avere lunghezza enorme, certamente non collegabile a quella della curva.

DEFINIZIONE 1.2. La curva \mathcal{C} sia rappresentata parametricamente, in modo iniettivo, da $\Phi(t)$, $t \in [a, b]$, siano

$$t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

una decomposizione dell'intervallo I : i punti

$$P_0 = \Phi(t_0), P_1 = \Phi(t_1), \dots, P_{n-1} = \Phi(t_{n-1}), P_n = \Phi(t_n)$$

costituiscono una decomposizione di \mathcal{C} che si dice inscritta in \mathcal{C} .

1.4. Un'idea semplice.

Le poligonali inscritte in una curva possono presentare lunghezze molto diverse fra loro: in una semicirconferenza si può pensare

- alla più semplice poligonale inscritta... il diametro !
- a una poligonale fatta di due segmenti uguali, i due lati di un quadrato inscritto nella circonferenza,
- a una poligonale fatta di quattro segmenti uguali, i lati di mezzo ottagono regolare inscritto in quella semicirconferenza,
- ecc.

Un fenomeno appare evidente: le poligonali che abbiamo descritto hanno lunghezze via via maggiori !

Inoltre più la decomposizione è fine più i lati della poligonale appaiono *tangenti* alla curva.

Siano \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 due poligonali inscritte in una stessa curva \mathcal{C} : se i punti della seconda decomposizione sono quelli della prima più qualche altro allora certamente

$$\ell(\mathcal{P}_1) \leq \ell(\mathcal{P}_2)$$

Così nell'esempio della semicirconferenza, la prima poligonale, il diametro era determinato dai due soli estremi A e B , la seconda, i due lati del quadrato, erano determinati da A, M e B , dove il punto in più, M era il punto medio dell'arco AB .

La terza, i quattro lati dell'ottagono, era determinata da A, P, M, Q, B essendo, ovviamente P e Q i punti medi dell'arco tra A e M e di quello tra M e B .

Quindi per cercare l'estremo superiore delle lunghezze converrà riferirsi a poligonali con... molti lati, molto piccoli !

OSSERVAZIONE 1.3. *Da una decomposizione*

$$t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

dell'intervallo $[a, b]$ se ne possono dedurre altre aggiungendo ai t_i già esistenti, qualche altro punto di decomposizione: ad esempio inserendo un nuovo punto τ tra t_1 e t_2 .

La poligonale \mathcal{P} di $n+1$ vertici determinata dalla prima decomposizione diventerà una poligonale \mathcal{Q} di $n+2$ vertici dopo l'aggiunta del punto τ .

Chi è più lunga delle due poligonali ?

Detto P^* il punto di C corrispondente al valore τ inserito si riconosce che in luogo del segmento P_1P_2 della prima poligonale \mathcal{P} troviamo nella \mathcal{Q} due segmenti P_1P^* e P^*P_2 : la proprietà triangolare della distanza fa riconoscere che

$$\overline{P_1P_2} \leq \overline{P_1P^*} + \overline{P^*P_2}$$

ovvero che $\ell(\mathcal{P}) \leq \ell(\mathcal{Q})$.

2. Il calcolo della lunghezza

Sia \mathcal{P} una poligonale inscritta in \mathcal{C} : riesce

$$\ell(\mathcal{P}) = \overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \dots + \overline{P_{n-1}P_n}$$

essendo P_0, P_1, \dots, P_n i punti di decomposizione di C che la determinano. Tenuto conto che

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2 + (z(t_k) - z(t_{k-1}))^2}$$

riesce, servendosi del teorema di Lagrange per rappresentare le tre differenze che intervengono,

$$(39) \quad \overline{P_{k-1}P_k} = (t_k - t_{k-1}) \sqrt{x'^2(\alpha_k) + y'^2(\beta_k) + z'^2(\gamma_k)}$$

i tre punti di Lagrange, $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$, uno per ciascuna delle tre funzioni $x(t), y(t), z(t)$ che intervengono appartengono tutti comunque all'intervallo (t_{k-1}, t_k) .

Ne segue

$$(40) \quad \ell(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \sqrt{x'^2(\alpha_k) + y'^2(\beta_k) + z'^2(\gamma_k)}$$

Tenuto presente che le tre funzioni $x'(t), y'(t), z'(t)$ sono continue, non si altererà gran che il risultato se, invece di calcolarle nell'espressione (40) nei giusti punti $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ di Lagrange, le calcoliamo tutte e tre ad esempio nel primo estremo t_{k-1} .

Sommando si ha quindi

$$(41) \quad \ell(\mathcal{P}) \simeq \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \sqrt{x'^2(t_{k-1}) + y'^2(t_{k-1}) + z'^2(t_{k-1})}$$

È del resto noto che la sommatoria

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{x'^2(t_{k-1}) + y'^2(t_{k-1}) + z'^2(t_{k-1})} (t_k - t_{k-1})$$

converge, al tendere a zero della massima ampiezza degli intervalli (t_{k-1}, t_k) , all'integrale

$$\int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$$

quindi appare evidente come tale integrale rappresenti l'estremo superiore delle lunghezze delle poligonalari inscritte nella curva C e quindi sia ragionevole accogliere la seguente

DEFINIZIONE 2.1. *La curva \mathcal{C} sia rappresentata parametricamente da*

$$\Phi: R \rightarrow R^3: \Phi(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}, \quad t \in I = [a, b] \subseteq R$$

si dice lunghezza di \mathcal{C} e si indica con $\ell(\mathcal{C})$ il valore dell'integrale

$$\int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$$

ESEMPIO 2.2. *Sia C il segmento da $O = (0, 0, 0)$ a $B = (1, 2, 3)$ una sua rappresentazione parametrica iniettiva è la seguente*

$$x(t) = t, \quad y(t) = 2t, \quad z(t) = 3t, \quad t \in [0, 1]$$

La lunghezza di C è, per definizione,

$$\int_0^1 \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} dt = \sqrt{14}$$

ovviamente esattamente quanto dava il teorema di Pitagora o la formula della distanza da O a B .

ESEMPIO 2.3. Sia C la circonferenza di centro l'origine e raggio ρ : una sua rappresentazione regolare e iniettiva è

$$x(t) = \rho \cos(t), y(t) = \rho \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

La lunghezza è, per definizione

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(-\rho \sin(t))^2 + (\rho \cos(t))^2} dt = 2\pi\rho$$

che, ancora ovviamente coincide con la lunghezza ben nota della circonferenza.

OSSERVAZIONE 2.4. Si capisce la richiesta di riferirsi a rappresentazioni iniettive: se avessimo rappresentata la precedente circonferenza con

$$x(t) = \rho \cos(t), y(t) = \rho \sin(t), \quad t \in [0, 6\pi]$$

rappresentazione non iniettiva, rappresentazione che corrisponde a girare tre volte sulla stessa circonferenza avremmo ottenuto

$$\int_0^{6\pi} \sqrt{(-\rho \sin(t))^2 + (\rho \cos(t))^2} dt = 6\pi\rho$$

esattamente la lunghezza triplicata, in altri termini la strada fatta per girare tre volte la stessa circonferenza!

ESEMPIO 2.5. Calcolare la lunghezza dell'elica Γ di equazioni parametriche

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

$$x' = -\sin(t), y' = \cos(t), z' = 1, \quad \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{lung}(\Gamma) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2} dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

3. Integrali curvilinei

https://en.wikipedia.org/wiki/Line_integral

Sia Γ una curva regolare di estremi A e B e sia $f(x, y, z)$ una funzione definita in Γ : decomposta Γ in archetti

$$\widehat{AP_1}, \widehat{P_1P_2}, \dots, \widehat{P_{n-2}P_{n-1}}, \widehat{P_nB}$$

consideriamo le somme

$$\sum_{k=1}^n f(Q_k) \ell(P_{k-1}P_k)$$

essendo $Q_k \in \widehat{P_{k-1}P_k}$

Cosa si può prevedere dei loro valori?

Se, ad esempio, fosse $f(x, y, z) \equiv c$ allora tutte le somme considerate coinciderebbero con $c \ell(\Gamma)$ essendo $\ell(\Gamma)$ la lunghezza della curva Γ .

Se ancora sapessimo che

$$m \leq f(x, y, z) \leq M$$

potremmo riconoscere che tutte le somme appartengono all'intervallo $[m\ell(\Gamma), M\ell(\Gamma)]$.

Sia Γ una curva regolare e sia $\Phi(t) : \{x = x(t), y = y(t), z = z(t)\}, t \in [a, b]$ una sua rappresentazione parametrica.

Sia $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, definita in Γ : per ogni partizione dell'intervallo I in n sottointervalli $[t_{i-1}, t_i], i = 1, \dots, n$ poniamo $P_i = \Phi(t_i) = (x(t_i), y(t_i), z(t_i)) = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$: i punti P_i dividono Γ in n archetti $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$.

Consideriamo le somme

$$(42) \quad \sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \ell(\Gamma_i)$$

sussiste il seguente

TEOREMA 3.1. *Sia f lipschitziana in Γ allora esiste il limite*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sigma$$

essendo δ il massimo della lunghezza degli intervallini $[t_{i-1}, t_i]$ della decomposizione.

Dimostrazione omissa.

Si osservi che la richiesta $\delta \rightarrow 0$ corrisponde a scegliere decomposizioni di $[a, b]$ sempre più sottili, ad esempio, dividendo $[a, b]$ in un sempre maggior numero di parti uguali.

Il limite di tali somme (42), garantito dal precedente Teorema 3.1 prende il nome di

$$\int_{\Gamma} f ds$$

integrale curvilineo della funzione f esteso alla curva Γ .

3.1. L'algoritmo di calcolo:

TEOREMA 3.2. *Sia $\Gamma \subseteq \Omega$ una curva regolare dello spazio, di equazioni parametriche*

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t), \quad z = \varphi_3(t) \quad t \in I$$

e sia $f(x, y, z)$ continua in Ω : riesce

$$(43) \quad \int_{\Gamma} f ds = \int_a^b f(\Phi(t)) |\Phi'(t)| dt.$$

ovvero

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_a^b f[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)] \sqrt{\varphi_1'^2(t) + \varphi_2'^2(t) + \varphi_3'^2(t)} dt$$

Dimostrazione omissa.

3.2. Primi esempi:

ESEMPIO 3.3. Sia Γ l'arco di circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0, y \geq 0$, curva regolare rappresentata parametricamente come

$$x = \cos(t), y = \sin(t), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

e sia $f(x, y) = x^2 + 4y^2$. Riesce

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f ds &= \int_0^{\pi/2} (\cos^2(t) + 4 \sin^2(t)) \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} (\cos^2(t) + 4 \sin^2(t)) dt = \frac{1}{4}\pi + \pi = \frac{5}{4}\pi \end{aligned}$$

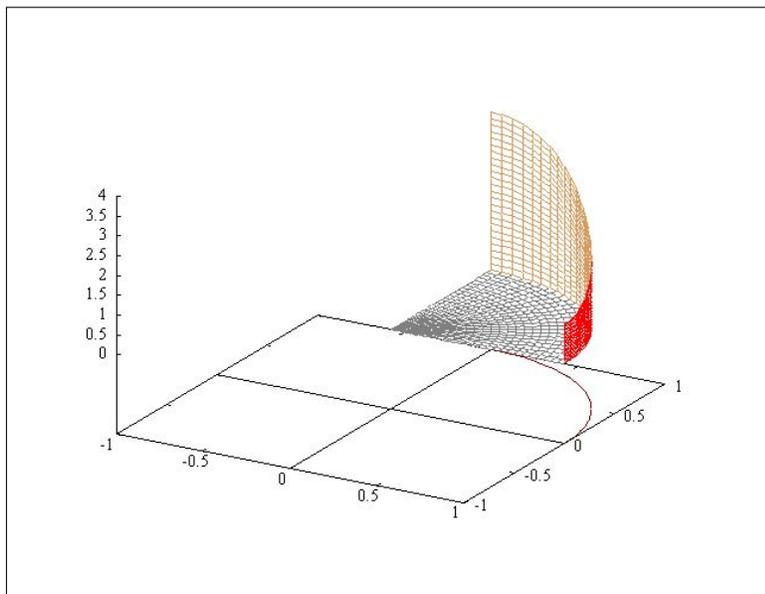


FIGURA 2. $x^2 + 4y^2$ lungo Γ

Il valore $5\pi/4$ trovato per l'integrale curvilineo rappresenta l'area del muro disegnato in Figura 2 sul tracciato di Γ e di altezza data in ogni punto $(x, y) \in \Gamma$ dal valore $x^2 + 4y^2$ della funzione integranda.

ESEMPIO 3.4. Se Γ è un filo materiale di densità lineare di massa $\delta(x, y, z)$, l'integrale

$$\int_{\Gamma} \delta(x, y, z) ds$$

rappresenta la massa del filo.

4. Proprietà degli integrali curvilinei

$f, g : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ siano funzioni lipschitziane, $\Gamma \subset S$, allora

- LINEARITÀ

$$\int_{\Gamma} (af + bg) ds = a \int_{\Gamma} f ds + b \int_{\Gamma} g ds \quad \forall a, b \in \mathbb{R};$$

- **MONOTONIA**

se $f \leq g$ su Γ allora $\int_{\Gamma} f ds \leq \int_{\Gamma} g ds$;

- **TEOREMA DEL MODULO**

$$\left| \int_{\Gamma} f ds \right| \leq \int_{\Gamma} |f| ds \leq \max_{\Gamma} |f| \ell(\Gamma).$$

OSSERVAZIONE 4.1. *L'abitudine nell'uso degli integrali $\int_a^b f(x) dx$ conduce al (giusto) ricordo*

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

Nulla di tutto ciò si conserva negli integrali curvilinei sopra introdotti.

5. Baricentro di una curva Γ

Data una curva regolare Γ , si definisce il baricentro della curva Γ il punto (x_B, y_B, z_B) così definito

$$x_B = \frac{1}{\ell(\Gamma)} \int_{\Gamma} x ds; \quad y_B = \frac{1}{\ell(\Gamma)} \int_{\Gamma} y ds; \quad z_B = \frac{1}{\ell(\Gamma)} \int_{\Gamma} z ds.$$

ESEMPIO 5.1. *Calcolare le coordinate del baricentro della curva del piano di equazioni*

$$x = \cos^3(t), \quad y = \sin^3(t), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Vedi figura 3.

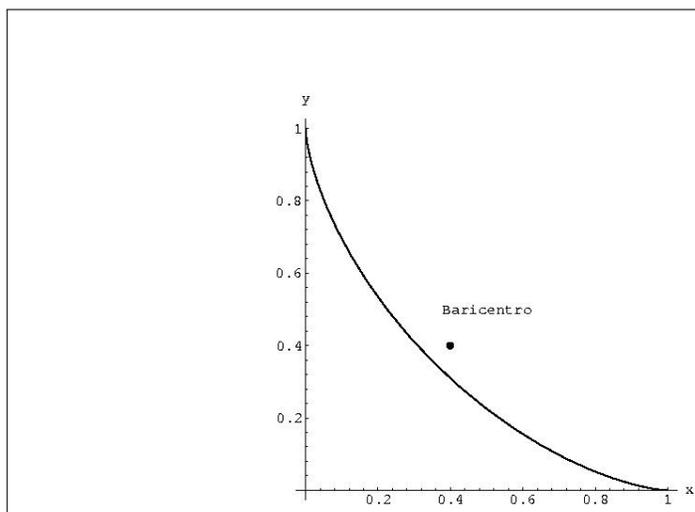


FIGURA 3. $x = \cos^3(t)$, $y = \sin^3(t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

ESEMPIO 5.2. *Calcolare le coordinate del baricentro della curva dello spazio di equazioni*

$$x = 1 + t, \quad y = 4t, \quad z = 3t, \quad t \in [0, 1].$$

Campi vettoriali

1. Introduzione

DEFINIZIONE 1.1. Dato un insieme $S \subset \mathbb{R}^3$, un campo vettoriale \mathbf{F} su S è una legge che associa ad ogni punto di S un vettore $\mathbf{F}(x, y, z)$ di componenti $(F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$. In altri termini un campo vettoriale F è una funzione

$$F : S \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

ESEMPIO 1.2. Il campo vettoriale $\vec{F}(x, y, z) = \{0, 0, z\}$ è definito in tutto lo spazio e associa ad ogni punto $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ il vettore verticale $\{0, 0, z\}$.

Un campo vettoriale che abbia la terza componente nulla

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), 0)$$

si dice *campo vettoriale piano*.

1.1. Il metodo delle freccette. Un modo di rappresentare un campo vettoriale è quello di rappresentare i vettori $\vec{F}(x, y, z)$ in corrispondenza di una griglia di punti (x_k, y_k, z_k) dello spazio, rappresentazione fatta naturalmente disegnando a partire da ciascuno dei punti (x_k, y_k, z_k) la freccetta $\vec{F}(x_k, y_k, z_k)$ che rappresenta il vettore.

Alcuni vettori del campo vettoriale piano $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$ sono rappresentati in figura 1.

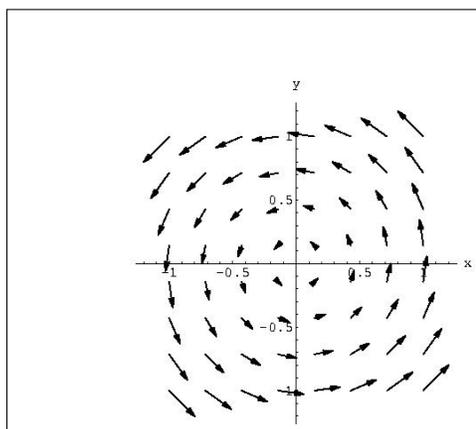


FIGURA 1. Campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y) = (-y, x)$.

Oltre al verso si noti che le freccette in Figura hanno anche lunghezze variabili da punto a punto: la loro lunghezza infatti rappresenta il modulo $|\vec{F}(x, y)| = \sqrt{y^2 + x^2}$.

ESEMPIO 1.3. *La forza che una massa M posta nel punto $(0,0,0)$ esercita su una seconda massa m che si trova nella posizione (x,y,z) è rappresentata da*

$$\vec{F}(x,y,z) = GMm \left\{ -\frac{1}{r^3}x, -\frac{1}{r^3}y, -\frac{1}{r^3}z \right\},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

La costante G è una costante che non dipende nè da m e M nè dalla loro posizione. Il campo gravitazionale $\vec{F}(x,y,z)$ è diretto verso l'origine e il suo modulo $|\vec{F}|$ è $\frac{GMm}{r^2}$.

ESEMPIO 1.4. *Il campo elettrico. La forza elettrica $\vec{F}(x,y,z)$ esercitata da una carica elettrica Q posta nell'origine $(0,0,0)$ su una carica q posta nel punto $P = (x,y,z)$ è data da*

$$\vec{F}(x,y,z) = \left\{ \frac{\varepsilon Qq}{r^3}x, \frac{\varepsilon Qq}{r^3}y, \frac{\varepsilon Qq}{r^3}z \right\}, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

dove ε è una costante che dipende dall'unità di misura utilizzata.

OSSERVAZIONE 1.5. *I campi gravitazionale ed elettrico considerati nei due esempi precedenti sono campi radiali: essi hanno cioè*

- *direzione parallela al raggio $\{x, y, z\}$*
- *valori che dipendono solo dalla distanza $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$*

si tratta cioè di campi espressi come

$$\vec{F}(x,y,z) = \varphi(r) \{x, y, z\}$$

2. Il campo del gradiente

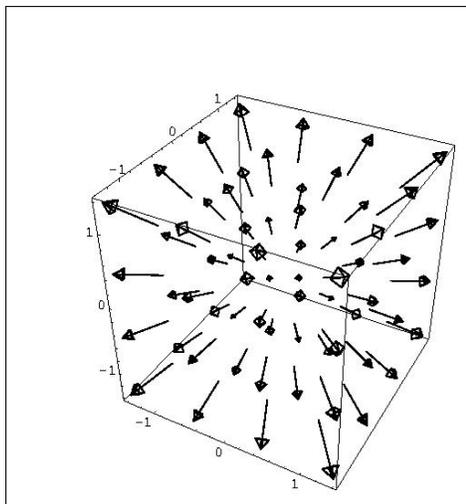
Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, con $f \in C^1$,

$$\nabla f(x,y,z) = \{f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)\}$$

è un campo vettoriale detto *campo del gradiente* di f .

Se $f = f(x,y)$ è una funzione di due variabili, allora $\nabla f(x,y)$ è un campo vettoriale piano o di \mathbb{R}^2 .

ESEMPIO 2.1. Il campo del gradiente di $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ è $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$ (vedi figura 2).

FIGURA 2. Il campo del gradiente di $x^2 + y^2 + z^2$

2.1. Un fenomeno di ortogonalità. I vettori $\nabla f(x, y)$ sono perpendicolari alle linee di livello $f(x, y) = k$.

Infatti, sia $\Phi(t) = \{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\}$ una rappresentazione parametrica della curva di livello

$$\Gamma: f(x, y) = k$$

Si ha, quindi,

$$(44) \quad f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = k, \quad \forall t \in I.$$

Derivando la (44) rispetto a t secondo la regola di derivazione delle funzioni composte si trova

$$\frac{\partial f}{\partial x} \varphi_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \varphi_2'(t) = 0$$

ovvero

$$\overrightarrow{\nabla} f(\Phi(t)) \cdot \overrightarrow{\Phi'(t)} = 0$$

cioè $\nabla f(x, y)$ è perpendicolare al vettore $\overrightarrow{\Phi'(t)}$ tangente a Γ nel punto $P = (x, y)$.

ESEMPIO 2.2. Il campo del gradiente di $f(x, y) = x^2 + 3y^2$ è

$$\overrightarrow{F}(x, y) = (2x, 6y)$$

In figura 3 sono rappresentate alcune ellissi, linee di livello di f , e alcuni vettori del campo \overrightarrow{F} .

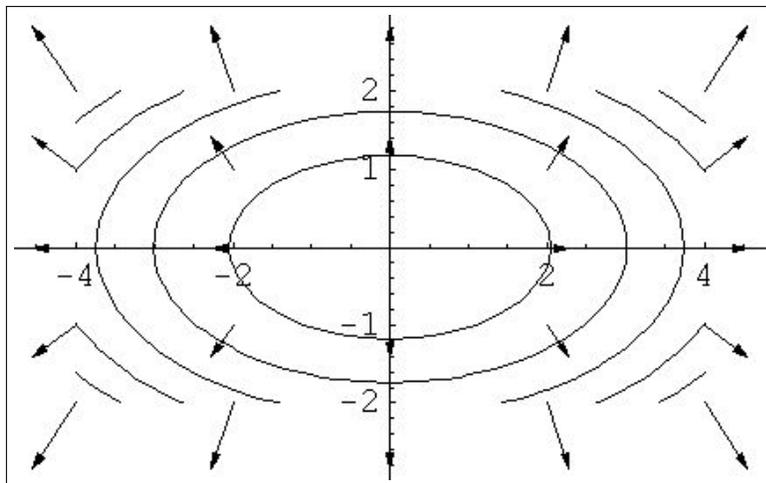


FIGURA 3. Linee di livello e gradiente di $f(x, y) = x^2 + 3y^2$.

2.2. Una condizione necessaria. Sia $\mathbf{F} = \{F_1(x, y), F_2(x, y)\} = \nabla U(x, y)$ un campo piano, l'uguaglianza delle derivate seconde miste $U_{xy} = U_{yx}$ implica

$$U_{xy} = U_{yx} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

Analogamente, nel caso di campi tridimensionali,

$$\mathbf{F} = \{A(x, y, z), B(x, y, z), C(x, y, z)\} = \nabla U(x, y, z)$$

l'uguaglianza delle derivate miste

$$\begin{cases} U_{xy} = U_{yx} \\ U_{xz} = U_{zx} \\ U_{zy} = U_{yz} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} A_y = B_x \\ A_z = C_x \\ C_y = B_z \end{cases}$$

Se le componenti del campo \mathbf{F} non verificano le uguaglianze indicate il campo non è un campo gradiente.

ESEMPIO 2.3. Il campo $F = \{y, 2x\}$ non è un campo gradiente: infatti

$$\frac{\partial}{\partial y} y \neq \frac{\partial}{\partial x} 2x$$

3. Lavoro di campi vettoriali

3.1. Premessa. La fisica definisce il lavoro di una forza \mathbf{F} relativo allo spostamento del suo punto di applicazione lungo il segmento ℓ come il prodotto scalare

$$\mathcal{W} = \mathbf{F} \cdot \ell$$

Detto \mathbf{t} il versore di ℓ ed s la lunghezza riesce quindi

$$\mathcal{W} = \mathbf{F} \cdot \ell = \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} s$$

Se lo spostamento del punto di applicazione anzichè essere lungo un segmento si svolgesse su una poligonale $\ell_1 \ell_2 \dots \ell_n$ il lavoro sarebbe naturalmente definito dalla somma dei lavori su ciascun segmento ℓ_k

$$\mathcal{W} = \sum_{k=1}^n \mathbf{F} \cdot \ell_k = \sum_{k=1}^n \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}_k s_k$$

Il passaggio da spostamenti lungo una poligonale a quelli lungo una curva è prevedibile e trasforma una sommatoria in una integrazione.

Il valore del lavoro \mathcal{W} dipende naturalmente dal verso con cui lo spostamento viene percorso: se in un verso si ottiene il valore \mathcal{W}_0 nel verso opposto si ottiene $-\mathcal{W}_0$.

3.2. Il calcolo integrale. Assegnati:

- la curva Γ , su cui si esegue lo spostamento, curva di rappresentazione parametrica

$$\Phi(t) = \{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)\}, \quad t \in [a, b]$$

- il versore tangente a Γ

$$\mathbf{T}(t) = \pm \frac{\Phi'(t)}{|\Phi'(t)|} = \{\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)\} \quad t \in [a, b]$$

versore che pertanto definisce il verso di percorrenza su Γ corrispondente alle t crescenti se si sceglie il segno $+$, il verso opposto se si sceglie il segno $-$,

- un campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \{F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)\},$$

a componenti continue su Γ

si può considerare il lavoro \mathcal{W} del campo \mathbf{F} lungo Γ percorsa nel verso scelto che viene calcolato tramite l'integrale curvilineo

$$(45) \quad \mathcal{W} = \int_{\Gamma} \mathbf{F}(\Phi(t)) \cdot \mathbf{T}(t) ds,$$

$$\mathbf{F}(\Phi(t)) \cdot \mathbf{T}(t) = F_1(\Phi(t)) \alpha(t) + F_2(\Phi(t)) \beta(t) + F_3(\Phi(t)) \gamma(t)$$

3.3. Algoritmo di calcolo. Tenuta presente la definizione di integrale curvilineo lungo una curva di rappresentazione parametrica $\Phi(t)$,

$$ds = |\Phi'(t)| dt = \sqrt{\varphi_1'^2(t) + \varphi_2'^2(t) + \varphi_3'^2(t)} dt$$

si ha, supponendo di aver scelto il verso delle t crescenti,

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F}(\Phi(t)) \cdot \mathbf{T}(t) ds = \int_a^b \mathbf{F}(\Phi(t)) \cdot \mathbf{T}(t) \cdot |\Phi'(t)| dt = \int_a^b \mathbf{F}(\Phi(t)) \cdot \Phi'(t) dt$$

Scrivendo esplicitamente il prodotto scalare, si ottiene quindi per il lavoro l'espressione seguente

$$W = \int_a^b (F_1(\Phi(t)) \varphi_1'(t) + F_2(\Phi(t)) \varphi_2'(t) + F_3(\Phi(t)) \varphi_3'(t)) dt$$

OSSERVAZIONE 3.1. *Il lavoro dello stesso campo \mathbf{F} su Γ percorsa nel verso delle t decrescenti è l'opposto di quello indicato sopra.*

Tale cambio di segno si ottiene anche, automaticamente, pensando all'integrale

$$W = \int_b^a (F_1(\varphi(t))\varphi_1'(t) + F_2(\varphi(t))\varphi_2'(t) + F_3(\varphi(t))\varphi_3'(t)) dt.$$

con gli estremi a e b scambiati.

Quindi, per il lavoro di un campo \mathbf{F} lungo una curva si ritrovano i fenomeni di alternanza di segno che si erano stabiliti per gli integrali in una variabile.

Il caso di una curva piana, contenuta ad esempio nel piano $z = 0$, può essere considerato come un caso particolare in cui $F_3 = 0$ e F_1 e F_2 dipendono solo da x e y : la formula di calcolo si riduce pertanto a

$$W = \int_a^b (F_1(\Phi(t))\varphi_1'(t) + F_2(\Phi(t))\varphi_2'(t)) dt.$$

ESEMPIO 3.2. *Sia \mathcal{C} il quarto di circonferenza di centro l'origine, raggio $r = 1$ percorsa dal punto $A = (1, 0)$ al punto $B = (0, 1)$ e sia $\mathbf{F} = \{-y, x\}$.*

Il lavoro di F su tale curva, rappresentata parametricamente da

$$x = \cos(t), \quad y = \sin(t), \quad t \in [0, \pi/2]$$

è pertanto

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_0^{\pi/2} \{-\sin(t), \cos(t)\} \cdot \{-\sin(t), \cos(t)\} dt = \frac{\pi}{2}$$

Il lavoro dello stesso campo \mathbf{F} relativo al segmento da A a B , rappresentato parametricamente da

$$x = 1 - t, \quad y = t, \quad t \in [0, 1]$$

è invece

$$\int_{AB} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_0^1 \{-t, 1-t\} \cdot \{-1, 1\} dt = 1$$

I lavori di uno stesso campo lungo due percorsi diversi da A a B possono riuscire differenti.

OSSERVAZIONE 3.3. *Se Γ è una curva chiusa, l'integrale (45) è anche detto circuitazione di \mathbf{F} lungo Γ e si indica con il simbolo*

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F}(\Phi(t)) \cdot \mathbf{T}(t) ds.$$

ESEMPIO 3.4. *Sia $\mathbf{F}(x, y, z) = \{x, y, z\}$ e sia Γ il segmento dall'origine al punto $(1, 2, 3)$. Una rappresentazione parametrica di Γ è*

$$x = t, \quad y = 2t, \quad z = 3t, \quad t \in [0, 1]$$

$\varphi'(t) = \{1, 2, 3\}$, pertanto il lavoro

$$\mathcal{W} = \int_0^1 (\varphi_1(t) + 2\varphi_2(t) + 3\varphi_3(t)) dt = 14 \int_0^1 t dt = 7.$$

ESEMPIO 3.5. Sia $\mathbf{F}(x, y) = \{-y, 3x\}$ e sia $\Gamma: x = \cos t, y = \sin t, t \in [0, 2\pi]$. Si ha

$$\mathcal{W} = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + 3 \cos^2 t) dt = 4\pi.$$

3.4. La notazione delle forme differenziali. L'algoritmo di calcolo del lavoro di un campo $\mathbf{F} = \{F_1, F_2, F_3\}$ lungo la curva \mathcal{C} parametrizzata da $\Phi(t) = \{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)\}$, $t \in [a, b]$

$$\int_a^b \{F_1(\Phi(t))\varphi_1'(t) + F_2(\Phi(t))\varphi_2'(t) + F_3(\Phi(t))\varphi_3'(t)\} dt$$

si indica spesso anche con la notazione delle forme differenziali

$$\int_{\mathcal{C}} \{F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz\}$$

notazione suggerita dall'interpretazione dei differenziali

$$dx = \varphi_1'(t)dt, \quad dy = \varphi_2'(t)dt, \quad dz = \varphi_3'(t)dt$$

La notazione delle forme differenziali è particolarmente utile nel caso di curve \mathcal{C} costituite da poligonali coordinate, cioè formate da segmenti paralleli agli assi coordinati.

ESEMPIO 3.6. Sia $F = \{F_1, F_2, F_3\}$ detti

$$O = (0, 0, 0), A = (1, 0, 0), B = (1, 1, 0), C = (1, 1, 1)$$

sia \mathcal{C} la poligonale $OABC$

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_{OA} F_1 dx + \int_{AB} F_2 dy + \int_{BC} F_3 dz$$

Infatti su ciascuno dei tre segmenti che compongono $OABC$ le rispettive tre parametrizzazioni comportano che

- su OA varia solo la prima coordinata, quindi $T ds = dx$,
- su AB varia solo la seconda $T ds = dy$,
- su BC varia solo la terza $T ds = dz$.

4. Il lavoro dei campi gradiente

TEOREMA 4.1 (Teorema fondamentale del calcolo per gli integrali curvilinei). Siano

- (1) $\vec{F} = \vec{\nabla} U(x, y, z)$ un campo gradiente definito su S , insieme aperto di \mathbb{R}^3 ,
- (2) $\Gamma \subset S$ una curva orientata, da A a B .

Allora

$$(46) \quad \mathcal{W} = \int_{\Gamma} \vec{\nabla} U(x, y, z) \cdot \vec{T} ds = U(B) - U(A)$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\Phi(t)$ la rappresentazione parametrica di Γ si ha, tenuto conto della regola di derivazione delle funzioni composte,

$$\nabla U(\Phi(t)) \cdot \Phi'(t) = \frac{\partial U}{\partial x} \varphi_1'(t) + \frac{\partial U}{\partial y} \varphi_2'(t) + \frac{\partial U}{\partial z} \varphi_3'(t) = \frac{d}{dt} U(\Phi(t))$$

Ne segue quindi

$$\mathcal{W} = \int_{\Gamma} \vec{\nabla} U(x, y, z) \cdot \vec{T} ds = \int_a^b \frac{d}{dt} U(\Phi(t)) dt = U(\Phi(b)) - U(\Phi(a))$$

cioè la differenza di U tra i due estremi. \square

ESEMPIO 4.2. Sia $U(x, y) = 3x^2 + 5xy - 4y^2$ e sia $\mathbf{F} = \nabla U$, sia \mathcal{C} la curva di rappresentazione parametrica $\Phi(t) : \{x = 1 + t, y = t^2, t \in [0, 3]\}$. Si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \nabla U(x, y) \cdot \mathbf{T}(t) ds &= \int_0^3 \{6(1+t) + 5t^2, 5(1+t) - 8t^2\} \cdot \{1, 2t\} dt = \\ &= \int_0^3 \{6(1+t) + 5t^2 + 2t(5(1+t) - 8t^2)\} dt = -99 \end{aligned}$$

Il risultato ottenuto è in accordo con il precedente teorema

$$\begin{cases} A = \Phi(0) = (1, 0) & \rightarrow U(A) = 3 \\ B = \Phi(3) = (4, 9) & \rightarrow U(B) = -96 \end{cases} \rightarrow U(B) - U(A) = -99$$

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla U(x, y) \cdot \mathbf{T}(t) ds = U(B) - U(A)$$

PROPOSIZIONE 4.3. Il precedente teorema (4.1) implica che il lavoro di un campo gradiente lungo una curva chiusa, estremi A e B coincidenti, è zero.

DIMOSTRAZIONE. Risultato ovvio tenuto conto della (46) con $\Phi(a) = \Phi(b)$, $A = B$. \square

PROPOSIZIONE 4.4. Se esiste una curva chiusa Γ tale che il lavoro

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \times \vec{T} ds \neq 0$$

vuol dire che \vec{F} non è un campo gradiente.

I campi gradiente si dicono anche *campi conservativi*.

5. Il potenziale

DEFINIZIONE 5.1. Sia $\mathbf{F}(x, y, z)$ un campo vettoriale: ogni funzione $U(x, y, z)$ per la quale riesca

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla U(x, y, z)$$

prende il nome di *potenziale di \mathbf{F}*

Non è ovvio decidere se un campo \mathbf{F} ammetta potenziali, sia cioè un campo gradiente. Ovviamente se $U(x, y, z)$ è potenziale di \mathbf{F} anche ogni altra funzione $U(x, y, z) + k$ con k costante è potenziale di \mathbf{F} : in altri termini esistono infiniti potenziali, come, nel caso unidimensionale, esistevano infinite primitive.

TEOREMA 5.2. $\mathbf{F} = \{F_1, F_2, F_3\}$ definito in un aperto Ω convesso abbia la proprietà di compiere lavoro nullo lungo ogni curva chiusa: scelto un punto $O \in \Omega$ definiamo per ogni punto $P = (x, y, z) \in \Omega$ la funzione

$$U(x, y, z) = \int_{\gamma(O, P)} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} ds$$

essendo $\gamma(O, P)$ il segmento da O a P

Riesce

$$\forall (x, y, z) \in \Omega \quad \mathbf{F} = \nabla U$$

La proprietà, Proposizione (4.3) dei campi gradiente di compiere lavoro nullo lungo le curve chiuse giustifica il nome dato loro di

campi conservativi

ESEMPIO 5.3. Le funzioni $U(x, y) = xy + k$ sono tutte potenziali del campo $\mathbf{F} = \{y, x\}$.

Il Teorema 4.1, pagina 119,

$$\int_{\gamma(A, B)} \mathbf{F}(\boldsymbol{\gamma}(t)) \cdot \mathbf{T}(t) ds = \int_{\gamma(A, B)} \nabla U \cdot \mathbf{T}(t) ds = U(B) - U(A)$$

ha provato che i campi gradiente $\mathbf{F} = \nabla U$ compiono lavoro nullo sulle curve chiuse: quindi ogni campo che compia lavoro non nullo su qualche curva chiusa non potrà essere un campo gradiente.

ESEMPIO 5.4. Il lavoro del campo piano

$$\mathbf{F}(x, y) = \left\{ \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right\}$$

lungo la circonferenza \mathcal{C} di centro l'origine e raggio $r = 1$ vale

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{T}(t) ds = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0$$

Quindi il campo $\mathbf{F}(x, y)$ assegnato non è un campo gradiente, ovvero non esiste alcuna funzione $U(x, y)$ di classe C^1 tale che $\mathbf{F}(x, y) = \nabla U(x, y)$.

5.1. Costruzione di un potenziale. Sia $\mathbf{F} = \{A(x, y), B(x, y)\}$ un campo piano, regolare in tutto il piano, le cui componenti verifichino le condizioni di compatibilità

$$A_y(x, y) = B_x(x, y)$$

Per costruire un potenziale, cioè una funzione $U(x, y)$ tale che $\mathbf{F} = \nabla U$ si può procedere al modo seguente

- si determinano le primitive di $A(x, y)$ rispetto ad x , cioè

$$V(x, y) = \int_0^x A(t, y) dt + c(y) \quad \rightarrow \quad V_x(x, y) = A(x, y)$$

- si sceglie la $c(y)$ in modo che

$$V_y(x, y) = \int_0^x A_y(t, y) dt + c'(y) = B(x, y)$$

- ovvero, tenuto conto che $A_y(t, y) = B_x(t, y)$,

$$V_y(x, y) = \int_0^x B_x(t, y) dt + c'(y) = B(x, y) \rightarrow B(0, y) + c'(y) = 0$$

ESEMPIO 5.5. Sia

$$F = \{x^3 + 3xy, y^2 + \frac{3}{2}x^2\}$$

Riesce

$$(x^3 + 3xy)_y = (y^2 + \frac{3}{2}x^2)_x$$

Costruiamo

$$V(x, y) = \int_0^x (t^3 + 3ty) dt + c(y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2y + c(y)$$

$$V_y(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + c'(y) = y^2 + \frac{3}{2}x^2 \rightarrow c'(y) = y^2 \rightarrow c(y) = \frac{1}{3}y^3 + c_0$$

Ne segue che le funzioni

$$U(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2y + \frac{1}{3}y^3 + c_0 \rightarrow \nabla U = \{x^3 + 3xy, y^2 + \frac{3}{2}x^2\}$$

sono tutte potenziali di F .

6. Il rotore

DEFINIZIONE 6.1. Il rotore di un campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y, z) = \{A(x, y, z), B(x, y, z), C(x, y, z)\}$$

è un nuovo campo vettoriale $\text{rot } \vec{F}(x, y, z)$ definito simbolicamente dal determinante della seguente matrice

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A(x, y, z) & B(x, y, z) & C(x, y, z) \end{vmatrix}$$

$$(47) \quad \text{rot } F = \{C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y\}$$

Le formule indicate includono anche il caso di campi vettoriali piani, basta in essi leggere $C = 0$ e regolarsi di conseguenza.

Non tutti i campi vettoriali sono campi gradiente, cioè non tutti i campi vettoriali sono conservativi.

Il motivo risiede nel seguente

TEOREMA 6.2. Sia S un insieme aperto di \mathbb{R}^3 e sia \mathbf{F} un campo vettoriale gradiente

$$\vec{F}(x, y, z) = \{A, B, C\} = \left\{ \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right\}$$

a componenti $A, B, C \in C^2(S)$, allora si ha, necessariamente, $\text{rot } \mathbf{F} = 0$

$$(48) \quad \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial y}, \quad \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial z}, \quad \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}.$$

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema di invertibilità dell'ordine di derivazione (Teorema di Schwarz) risulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial y} &= \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}; \\ \frac{\partial B}{\partial z} &= \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial C}{\partial y}; \\ \frac{\partial C}{\partial x} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = \frac{\partial A}{\partial z}. \end{aligned}$$

□

DEFINIZIONE 6.3. I campi vettoriali \mathbf{F} tali che $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$ si dicono campi irrotazionali.

OSSERVAZIONE 6.4. Se $\mathbf{F} : S \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è un campo vettoriale del piano, di classe $C^1(S)$, si ha

$$\text{rot } \mathbf{F} = (0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}).$$

Pertanto \mathbf{F} è irrotazionale su S se

$$(49) \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \quad \text{in } S.$$

ESEMPIO 6.5. Il campo vettoriale $\mathbf{F} = (x^2y, y)$ non è irrotazionale. Infatti si ha

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 0 \neq x^2 = \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Inoltre, per il teorema 6.2, \mathbf{F} non può essere conservativo.

OSSERVAZIONE 6.6. Le condizioni (48) del precedente Teorema 6.2 equivalgono all'unica condizione vettoriale

$$\text{rot } \vec{F} = 0$$

ESEMPIO 6.7. Stabilire se il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x - y, 2 - z, z^2)$$

è conservativo.

Si ha

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -1 \neq 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

\mathbf{F} non soddisfa le condizioni necessarie del Teorema 6.2, quindi non può essere conservativo.

6.1. Rotore... ruotare.

La parola rotore

$$\operatorname{rot} \vec{F}$$

usata per definire il vettore (47) associato al campo vettoriale \vec{F} non è casuale. Un campo

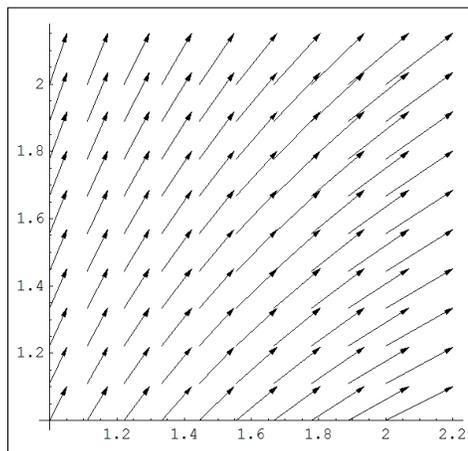


FIGURA 4. Le linee di flusso di $F = \{x^2, 1+y\}$ nel quadrato di estremi $(1,1)$ $(2,2)$

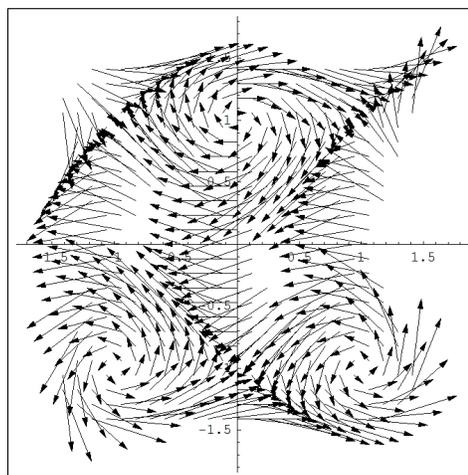


FIGURA 5. Le linee di flusso di $G = \{-1+y^2, \frac{3x(-1+x^2)}{1+x^2+y^2}\}$ nel quadrato di estremi $(-2,-2)$, $(2,2)$.

vettoriale che abbia rotore non nullo indica con le sue linee di flusso, quelle indicate dalle freccette del campo, delle effettive rotazioni.

Nelle figure 4 e 5 sono disegnati i due campi vettoriali

$$F = \{x^2, 1+y\}, \quad G = \{-1+y^2, \frac{3x(-1+x^2)}{1+x^2+y^2}\}$$

Il primo, F ha rotore nullo, il secondo G no.

Si riconosce nel disegno di G linee di flusso che ruotano più o meno intorno ai tre punti

$$A = \{1, -1\}, \quad B = \{-1, -1\}, \quad C = \{0, 1\}$$

Non solo ma, almeno guardando le frecce si riconosce il verso di rotazione: antiorario intorno a A e B , orario intorno a C .

Ebbene il rotore di G prende nei tre punti i seguenti valori

$$\begin{aligned} \text{rot}(G)(A) &= \{0, 0, 4\} & \text{rot}(G)(B) &= \{0, 0, 4\} \\ \text{rot}(G)(C) &= \{0, 0, -7/2\} \end{aligned}$$

sembra tener conto anche del verso di rotazione...

7. Condizioni sufficienti

TEOREMA 7.1. Sia $\vec{F}(x, y, z) = \{F_1, F_2, F_3\}$ definito in un dominio rettangolare $R: a < x < b, c < y < d, e < z < f$ con $F_1, F_2, F_3 \in C^1(R)$.

Se $\text{rot } \vec{F} = 0$ esiste $U(x, y, z) \in C^2(R)$ tale che

$$F(x, y, z) = \nabla U(x, y, z), \quad \forall (x, y, z) \in R$$

In altri termini il Teorema afferma che ogni campo vettoriale irrotazionale in un aperto rettangolare

- è un campo gradiente
- è dotato di potenziale
- è conservativo.

8. Riassunto

Ogni campo vettoriale \mathbf{F} determina una forma differenziale ω , e viceversa.

$$\mathbf{F} = \{A(x, y, z), B(x, y, z), C(x, y, z)\} \Leftrightarrow \omega = A(x, y, z) dx + B(x, y, z) dy + C(x, y, z) dz$$

Se il campo \mathbf{F} è un campo gradiente la forma ω associata si dice *forma esatta*

$$\mathbf{F} = \nabla U \Leftrightarrow \omega = dU$$

Se il campo \mathbf{F} è irrotazionale la forma ω associata si dice *chiusa*:

$$\text{rot } \mathbf{F} = 0 \Leftrightarrow d\omega = 0$$

In ogni regione convessa:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} = 0 &\quad \rightarrow \quad F = \nabla U \\ d\omega = 0 &\quad \rightarrow \quad \omega = dU \end{aligned}$$

Parte 4

Integrali doppi

Misura di Peano-Jordan nel piano

1. Proprietà dell'area

La nozione di area di una regione limitata S del piano discende, intuitivamente, dalla questione seguente:

quante copie di un quadrato unitario o di un suo sottomultiplo occorrono per ricoprire la regione S da misurare?

Richiederemo che l'area $A(S)$ di un insieme S di \mathbb{R}^2 verifichi, volendo soddisfare alle esigenze dell'intuizione, le seguenti proprietà ¹:

- 1: $A(S) \geq 0$.
- 2: Se S è un quadrato di lato l , allora $A(S) = l^2$.
- 3: Se $S = S_1 \cup S_2$ con S_1 e S_2 privi di punti interni comuni $A(S) = A(S_1) + A(S_2)$.

Si noti che dalle proprietà elencate discende la *monotonia* dell'area:

$$S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow A(S_1) \leq A(S_2).$$

2. L'algoritmo di Peano-Jordan

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme limitato e non vuoto.

Quadrettiamo il piano con quadrati di lato 1 costruendo la griglia determinata dalle rette di equazioni $x = h, y = k$, per $h, k \in \mathcal{Z}$ e indichiamo con

- $A_0^+(S)$ la somma delle aree dei quadrati chiusi di lato 1 che hanno almeno qualche punto in comune con S ;
- $A_0^-(S)$ la somma delle aree dei quadrati chiusi di lato 1 completamente contenuti in S .

Risulta

$$A_0^-(S) \leq A_0^+(S)$$

Passiamo ad una prima quadrettatura più sottile, costruendo la griglia determinata dalle rette di equazione $x = h/2, y = k/2$, per $h, k \in \mathcal{Z}$: ogni quadrato iniziale viene suddiviso in 4 quadrati di lato $\frac{1}{2}$, e indichiamo con

- $A_1^+(S)$ la somma delle aree dei nuovi quadratini che hanno punti in comune con S ;
- $A_1^-(S)$ la somma delle aree di quelli completamente contenuti in S ².

Si ha

$$A_0^-(S) \leq A_1^-(S) \leq A_1^+(S) \leq A_0^+(S)$$

¹ Courant, Volume II, Capitolo 4 §4.1

² Se ce n'erano di lato 1 ce ne saranno, a maggior ragione, di lato $1/2$

Il procedimento si itera continuando a dividere a metà, suddividendo il piano in quadrati di lato 2^{-n} dando luogo alle due successioni $\{A_n^-(S)\}$ e $\{A_n^+(S)\}$ che verificano

$$A_0^-(S) \leq A_1^-(S) \leq \dots \leq A_n^-(S) \leq A_n^+(S) \leq \dots \leq A_1^+(S) \leq A_0^+(S)$$

- $\{A_n^-(S)\}$ è monotona non decrescente e limitata superiormente,
- $\{A_n^+(S)\}$ è monotona non crescente e limitata inferiormente.

2.1. Area interna ed area esterna. Le due successioni

$$\{A_n^-(S)\}, \quad \{A_n^+(S)\}$$

crescente la prima, decrescente la seconda sono limitate, quindi sono convergenti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^-(S) = A_-(S), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^+(S) = A_+(S).$$

I due numeri $A_-(S)$, $A_+(S)$, loro limiti, si chiamano

area interna ed area esterna di S .

e soddisfano la relazione

$$A_-(S) \leq A_+(S).$$

DEFINIZIONE 2.1. Se $A_-(S) = A_+(S)$ l'insieme S si dice *misurabile secondo Peano-Jordan*³ e il comune valore delle aree interna ed esterna si chiama *area* (o *misura di Peano-Jordan*) di S

$$A(S) := A_-(S) = A_+(S).$$

COROLLARIO 2.2. Tenuto presente che $0 \leq A_-(S) \leq A_+(S)$ si riconosce che ogni insieme S che abbia area esterna $A_+(S)$ nulla è misurabile, e ha area $A(S)$ nulla.

OSSERVAZIONE 2.3 (Misura di Peano-Jordan e vecchie aree di poligoni). Si può riconoscere che:

- i quadrati di lato ℓ hanno misura di Peano-Jordan ℓ^2 , coincidente cioè con la vecchia area.
- i rettangoli di lati a, b hanno misura di Peano-Jordan $a \times b$, coincidente cioè con la vecchia area.
- i triangoli, quindi i poligoni, hanno misura di Peano-Jordan coincidente con la vecchia area.

3. L'area della frontiera...

La proprietà per un insieme S di essere misurabile secondo Peano-Jordan equivale al fatto che le due successioni

$$\{A_n^-(S)\}, \quad \{A_n^+(S)\}$$

siano contigue:

$$A_n^+(S) - A_n^-(S) \rightarrow 0$$

La differenza fra $A_n^+(S)$ e $A_n^-(S)$ è costituita dalla somma delle aree dei rettangolini che intersecano S senza essere completamente contenuti in S .

Si tratta quindi dei rettangolini che intersecano la frontiera di S : si intuisce quindi che la misurabilità di un insieme sia collegata ad avere una frontiera ... non troppo estesa !

³Camille Jordan 1838-1922, Giuseppe Peano 1853-1932.

Vale al riguardo il seguente teorema di cui è omessa la dimostrazione:

TEOREMA 3.1. *Un insieme S limitato è misurabile se e solo se la sua frontiera ∂S è misurabile e ha misura esterna nulla*

$$A_-(S) = A_+(S) = A(S) \quad \Leftrightarrow \quad A_+(\partial S) = 0.$$

COROLLARIO 3.2. *Condizione necessaria e sufficiente per riconoscere che un insieme sia dotato di area è che comunque si scelga $\varepsilon > 0$ sia possibile ricoprire la sua frontiera con un numero finito di quadrati che abbiano somma delle aree minore di ε .*

Le curve regolari sono insiemi di misura esterna nulla, i grafici di funzioni continue anche.

COROLLARIO 3.3. *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, con $f \geq 0$. Allora l'insieme*

$$R(f) = \{(x, y) : x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\},$$

il sottografico di f , è un insieme misurabile e

$$A(R(f)) = \int_a^b f(x) dx.$$

4. Aree di unioni e intersezioni...

La caratterizzazione degli insiemi misurabili dedotta, Teorema 3.1, dalla misura esterna nulla della frontiera, consente di riconoscere il seguente

TEOREMA 4.1. *L'unione $S \cup Z$ e l'intersezione $S \cap Z$ di due insiemi misurabili S, Z è misurabile. Se inoltre i due insiemi non hanno punti interni comuni riesce*

$$A(S \cup Z) = A(S) + A(Z).$$

Per convincersi basta ricordare che

$$\partial(S \cup Z) \subseteq \partial S \cup \partial Z, \quad \partial(S \cap Z) \subseteq \partial S \cup \partial Z$$

e quindi riconoscere che, se ∂S e ∂Z hanno misura esterna nulla anche $\partial S \cup \partial Z$ avrà misura esterna nulla e $\partial(S \cup Z)$ e $\partial(S \cap Z)$, suoi sottinsiemi l'avranno nulla.

5. Un insieme non misurabile

L'insieme S formato da tutti e soli i punti (x, y) appartenenti al quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$ con coordinate razionali non è misurabile.

Il risultato si riconosce osservando che, per quanto si raffini la quadrettatura riesce sempre

$$A_n^-(S) = 0, \quad A_n^+(S) \geq 1.$$

Una questione interessante è riconoscere la frontiera ∂S dell'insieme proposto: la frontiera è tutto il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$.

Quindi riesce

$$A(\partial S) = A([0, 1] \times [0, 1]) = 1 \neq 0$$

mentre avevamo riconosciuto, Teorema 3.1, che condizione necessaria e sufficiente perchè un insieme S sia misurabile è $A(\partial S) = 0$

Integrali multipli

1. Le somme integrali

Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata su un insieme limitato $S \subseteq \mathbb{R}^2$.

Indichiamo con $\delta := \{R_1, R_2, R_3, \dots, R_n\}$ una decomposizione di S in insiemi limitati e misurabili con interni disgiunti.

Siano m_1, m_2, \dots, m_n e M_1, M_2, \dots, M_n rispettivamente gli estremi inferiori e superiori della funzione f in ciascun R_k .

Le somme

$$(50) \quad F^-(f, \delta) = \sum_i^n m_i A(R_i), \quad F^+(f, \delta) = \sum_i^n M_i A(R_i),$$

si dicono *somme integrali inferiori e superiori* della funzione f , relative alla suddivisione $\delta := \{R_1, R_2, R_3, \dots, R_n\}$ di S . Ovviamente riesce $F^-(f, \delta) \leq F^+(f, \delta)$.

Variando la decomposizione δ varieranno naturalmente le somme $F^-(f, \delta)$, $F^+(f, \delta)$: se i due estremi relativi a tutte le possibili decomposizioni δ

$$F^-(f) = \sup_{\delta} F^-(f, \delta), \quad F^+(f) = \inf_{\delta} F^+(f, \delta)$$

coincidono

- la funzione f si dice integrabile in S
- il comune valore di $F^-(f)$ e di $F^+(f)$ si dice integrale doppio della funzione f esteso all'insieme S e si indica con

$$\iint_S f(x, y) dx dy$$

TEOREMA 1.1. *Ogni funzione continua in S , insieme chiuso limitato e misurabile, è integrabile in S .*

TEOREMA 1.2. *Le funzioni caratteristiche*

$$f_{\Omega}(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in \Omega \\ 0 & (x, y) \notin \Omega \end{cases}$$

degli insiemi $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ limitati misurabili secondo Jordan sono integrabili su ogni $S \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato e misurabile.

DIMOSTRAZIONE. Basta notare che riesce

$$F^-(f_{\Omega}, S) = A_-(S \cap \Omega), \quad F^+(f_{\Omega}, S) = A_+(S \cap \Omega)$$

□

COROLLARIO 1.3. *Le costanti $f(x,y) \equiv c$ sono integrabili su ogni insieme limitato e misurabile S e riesce*

$$\iint_S c \, dx \, dy = cA(S)$$

TEOREMA 1.4. *Siano f, g integrabili in S e riesca*

$$f(x,y) \leq g(x,y) \quad \forall (x,y) \in S$$

Riesce

$$\iint_S f(x,y) \, dx \, dy \leq \iint_S g(x,y) \, dx \, dy$$

COROLLARIO 1.5. *Sia f integrabile in S e riesca*

$$m \leq f(x,y) \leq M \quad \forall (x,y) \in S$$

ne segue

$$mA(S) \leq \iint_S f(x,y) \, dx \, dy \leq MA(S)$$

1.1. Somme generalizzate. Le somme

$$\sigma_n(f, \delta) = \sum_{i,k} f(x_i, y_i) A(R_i),$$

con $(x_i, y_i) \in R_i$ si dicono *somme integrali generalizzate* di f su S .

Riesce ovviamente

$$F^-(f, \delta) \leq \sigma_n(f, \delta) \leq F^+(f, \delta)$$

per cui, se f è integrabile in S si ha anche, per opportune decomposizioni δ

$$(51) \quad \sigma_n(f, \delta) \approx \iint_S f(x,y) \, dx \, dy.$$

OSSERVAZIONE 1.6. *Le somme generalizzate sono uno strumento numericamente più semplice delle somme integrali inferiori e superiori le quali si servono degli estremi inferiore e superiore della f in ciascun R_i .*

2. Il teorema del modulo

TEOREMA 2.1. *Sia f integrabile in S allora anche $|f|$ è integrabile e riesce*

$$\left| \iint_S f \, dx \, dy \right| \leq \iint_S |f| \, dx \, dy$$

COROLLARIO 2.2.

$$(52) \quad \left| \iint_S f \, dx \, dy - \iint_S g \, dx \, dy \right| \leq \iint_S |f - g| \, dx \, dy$$

3. Somme, differenze e prodotti di funzioni integrabili

Siano f e g due funzioni integrabili sull'insieme limitato e misurabile S

3.1. La linearità. Posto

$$F(x, y) = a f(x, y) + b g(x, y)$$

essendo a e b due costanti: riesce

$$\iint_S F(x, y) dx dy = a \iint_S f(x, y) dx dy + b \iint_S g(x, y) dx dy$$

3.2. I prodotti. La funzione prodotto $f(x, y) \cdot g(x, y)$ è integrabile, ma in generale

$$\iint_S f(x, y) \cdot g(x, y) dx dy \neq \iint_S f(x, y) dx dy \cdot \iint_S g(x, y) dx dy$$

3.3. Additività. Se $S' \cap S''$ è privo di punti interni, si ha

$$(53) \quad \iint_{S' \cup S''} f dx dy = \iint_{S'} f dx dy + \iint_{S''} f dx dy$$

4. Il teorema della media

Una stima analoga a quella del teorema del valor medio del calcolo integrale per funzioni di una singola variabile si incontra anche nel caso degli integrali doppi.

Sia S un insieme chiuso, limitato, *connesso* e misurabile e sia f una funzione continua in S . Siano m e M , rispettivamente, il minimo e il massimo di f nell'insieme S : il precedente Corollario 1.5 indicava le disuguaglianze

$$(54) \quad mA(S) \leq \iint_S f(x, y) dx dy \leq MA(S).$$

ovvero

$$\frac{1}{A(S)} \iint_S f(x, y) dx dy \in [m, M]$$

Stante l'ipotesi che S sia connesso esisterà quindi almeno, *Teorema dei Valori Intermedi*, pag. 64, un punto $(\xi, \eta) \in S$ in cui riesce

$$\frac{1}{A(S)} \iint_S f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta)$$

ovvero

$$\iint_S f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta)A(S)$$

5. Integrali tripli

Il problema più comune che conduce all'introduzione di integrazioni triple, o estese a regioni di \mathbb{R}^3 , è il calcolo della massa m di un solido V .

Detti

- $vol(V)$ il volume, la misura, di tale solido,
- δ_o la densità materiale posseduta

riesce, per definizione di densità,

$$m = \delta_o \cdot \text{vol}(V)$$

Il problema si complica nel caso di solidi non omogenei, cioè quando la densità è variabile da punto a punto.

Si tratta di una situazione concreta, si pensi, ad esempio ad un serbatoio V pieno di un liquido miscela di materiali di pesi specifici diversi: dopo un certo periodo di riposo i materiali più pesanti saranno scesi sul fondo, i più leggeri saliti in superficie.

In altre parole la densità $\delta = \delta(z)$ della miscela nel serbatoio V varia con la profondità.

Non è del resto irragionevole pensare a densità che dipendano anche dalle altre due coordinate x e y .

La replica per il calcolo della massa della semplice espressione

$$m = \delta(x, y, z) \cdot \text{vol}(V)$$

non è più adatta: quale dei tanti diversi valori $\delta(x, y, z)$ prendere ?

Il buon senso suggerisce naturalmente di

- decomporre il solido, il serbatoio V , in parti

$$V = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \dots \cup V_n$$

in ciascuna delle quali la densità materiale sia approssimabile con una costante,

- calcolare le masse

$$m_i = \delta(x_i, y_i, z_i) \cdot \text{vol}(V_i)$$

di ciascuna di tali parti, avendo assunto come approssimazione della densità il valore $\delta(x_i, y_i, z_i)$ preso in $(x_i, y_i, z_i) \in V_i$

- sommare le masse delle varie parti

$$m \approx \sum_{i=1}^n \delta(x_i, y_i, z_i) \cdot \text{vol}(V_i)$$

per stimare la massa di V

L'espressione

$$(55) \quad \sum_{i=1}^n \delta(x_i, y_i, z_i) \cdot \text{vol}(V_i)$$

è analoga a quelle, vedi pagina 134, introdotte parlando di

somme integrali generalizzate

per la definizione di integrali doppi di funzioni di due variabili.

Sotto questo punto di vista la massa m del solido V occupato da materiali di densità $\delta(x, y, z)$ è il numero reale approssimato dalle somme (55), cioè l'integrale triplo

$$\iiint_V \delta(x, y, z) dx dy dz$$

Formule di riduzione degli integrali

1. Integrali sopra rettangoli

Dapprima consideriamo il rettangolo R del piano x, y definito dalle condizioni

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$$

e sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in R .

Decomporre R in rettangolini significa

- decomporre $[a, b]$ con i punti

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

- decomporre $[c, d]$ con i punti

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{m-1} < y_m = d$$

Le somme integrali generalizzate $\sigma(f) = \text{di } \iint_R f(x, y) dx dy$ sono pertanto

$$\begin{aligned} \sum_{i,k} f(x_i, y_k) A(R_{i,k}) &= \sum_{i,k} f(x_i, y_k) (x_{i+1} - x_i) (y_{k+1} - y_k) = \\ (56) \qquad \qquad \qquad &= \sum_k (y_{k+1} - y_k) \left(\sum_i f(x_i, y_k) (x_{i+1} - x_i) \right) \end{aligned}$$

Tenuto conto che, almeno se la decomposizione è abbastanza sottile riesce

$$\sum_i f(x_i, y_k) (x_{i+1} - x_i) \approx \int_a^b f(x, y_k) dx$$

e quindi, indicata con

$$G(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

riesce $\sum_i f(x_i, y_k) (x_{i+1} - x_i) \approx G(y_k)$.

Sostituendo nella precedente (56) si ha

$$\sigma(f) \approx \sum_k (y_{k+1} - y_k) G(y_k) \approx \int_c^d G(y) dy$$

ovvero, complessivamente,

$$(57) \qquad \iint_R f(x, y) dx dy \approx \sigma(f) \approx \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

Si può riconoscere il seguente teorema

TEOREMA 1.1 (Formule di riduzione). *Sussiste la seguente formula di riduzione*

$$(58) \quad \iint_R f(x,y) dx dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y) dy \right\} dx;$$

Il precedente teorema significa che l'integrale $\iint_R f(x,y) dx dy$ si ottiene calcolando

- $G(y) = \int_a^b f(x,y) dx$
- $\int_c^d G(y) dy$.

COROLLARIO 1.2. *Si può scambiare l'ordine di somma nella (56) e pervenire quindi alla analoga nuova formula di riduzione*

$$(59) \quad \iint_R f(x,y) dx dy = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y) dx \right\} dy.$$

ovvero l'integrale $\iint_R f(x,y) dx dy$ si ottiene calcolando

- $P(x) = \int_c^d f(x,y) dy$
- $\int_a^b P(x) dx$.

ESEMPIO 1.3. *L'integrale di $f(x,y) = x + y$ sul rettangolo $R = [0, 2] \times [0, 1]$ si calcola al modo seguente:*

$$\iint_R (x+y) dx dy = \int_0^1 dy \int_0^2 (x+y) dx$$

Il primo integrale da calcolare è

$$\int_0^2 (x+y) dx = \frac{1}{2}x^2 + xy \Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{2}2^2 + 2y = 2 + 2y$$

Il secondo integrale, quello in dy si calcola sul risultato del primo

$$\int_0^1 (2 + 2y) dy = 2 + 1 = 3$$

Abbiamo pertanto

$$\iint_R (x+y) dx dy = 3$$

Si può sperimentare l'invertibilità del procedimento: si sarebbe potuto prima calcolare l'integrale in dy

$$\int_0^1 (x+y) dy = xy + \frac{1}{2}y^2 \Big|_{y=0}^{y=1} = x + \frac{1}{2}$$

e successivamente eseguire sul risultato ottenuto l'integrazione in dx

$$\int_0^2 \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{2}2^2 + 1 = 3$$

2. Integrali su domini normali

La riduzione dell'integrale doppio a due integrazioni semplici osservata sui rettangoli funziona anche su insiemi più generali: cerchi, ellissi, ecc.

DEFINIZIONE 2.1. Un insieme $S \subset \mathbb{R}^2$ è normale rispetto all'asse x se è definito da

$$S = \{(x, y) : x \in [a, b], \quad \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

con $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ due funzioni $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continue tali che $\forall x \in [a, b] : \alpha(x) \leq \beta(x)$.

Analogamente si parla di dominio normale rispetto ad y se S è rappresentabile come

$$S = \{(x, y) : y \in [c, d], \quad \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\},$$

con γ e δ funzioni continue.

TEOREMA 2.2. Sia f una funzione continua definita su S , dominio normale rispetto all'asse x . Allora

$$(60) \quad \iint_S f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Analogamente si può dimostrare se il dominio è normale rispetto all'asse y :

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

ESEMPIO 2.3. Applichiamo la formula (60) per calcolare l'area del cerchio di centro l'origine e raggio R : $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ che può essere rappresentato come

$$S = \{x \in [-R, R], \quad -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(S) &= \iint_S dx dy = \int_{-R}^R \left(\int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy \right) dx \\ &= 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = 4R^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \pi R^2. \end{aligned}$$

3. Utilità delle formule di riduzione

Gli integrali di funzioni $f(x)$ di una sola variabile estesi a intervalli $[a, b]$ si calcolavano in virtù del *teorema fondamentale del calcolo* tramite una primitiva $F(x)$ della funzione integranda $f(x)$:

$$F'(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Per gli integrali doppi, o tripli, tale legame

integrale - primitiva

non esiste: quindi anche su casi semplicissimi sembra mancare un algoritmo rapido e comodo quale quello fornito dal teorema fondamentale del calcolo.

Le formule di riduzione degli integrali doppi restituiscono invece tale algoritmo: un'integrazione doppia corrisponde a due successive integrazioni *semplici*, cioè integrazioni per le quali vale il teorema fondamentale del calcolo.

Il calcolo quindi di

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

comporta la disponibilità di due *primitive* $G(x, y)$ e $H(y)$ tali che

$$G_x(x, y) = f(x, y), \quad H'(y) = G(\delta(y)) - G(\gamma(y))$$

La prima serve per calcolare

$$\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx$$

la seconda per calcolare l'integrale su $[c, d]$ del risultato ottenuto.

Trasformazioni e cambiamenti di coordinate

1. Cambiamenti di coordinate affini

Sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \det(A) \neq 0 \quad A : (u, v) \rightarrow (x, y) \quad \begin{cases} x = au + bv + h \\ y = cu + dv + k \end{cases}$$

trasformazione Φ determinata dalla matrice A e dalla traslazione determinata da (h, k) . Supponiamo che Φ muti l'insieme F del piano (u, v) nell'insieme E del piano (x, y) :

$$E = \Phi(F)$$

È nota la relazione fra le rispettive aree

$$\mathcal{A}(E) = |\det(A)| \mathcal{A}(F)$$

Pertanto assegnata una funzione $f(x, y)$

- siano

$$\begin{cases} x_0 = au_0 + bv_0 + h \\ y_0 = cu_0 + dv_0 + k \end{cases} \quad (u_0, v_0) \in F$$

- ne segue

$$(61) \quad f(x_0, y_0) \mathcal{A}(E) = f[au_0 + bv_0, cu_0 + dv_0] |\det(A)| \mathcal{A}(F)$$

Decomposto $F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n$ e detta $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$ la corrispondente decomposizione di E l'equazione (61) produce la seguente relazione per le somme integrali

$$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \mathcal{A}(E_k) = \sum_{k=1}^n f[au_k + bv_k, cu_k + dv_k] |\det(A)| \mathcal{A}(F_k)$$

dalla quale segue naturalmente la relazione integrale

$$(62) \quad \iint_{\Phi(Q)} f(x, y) dx dy = \iint_Q f[\Phi(u, v)] |\det A| du dv$$

Questa formula, fondamentale, può essere memorizzata tenendo presenti le osservazioni seguenti:

- si sostituisce alla funzione integranda $f(x, y)$ la funzione composta

$$F(u, v) = f[au + bv + h, cu + dv + k]$$

ottenuta sostituendo ad x e ad y le espressioni $au + bv + h$ e $cu + dv + k$

- si sostituisce al blocco $dx dy$ il nuovo blocco

$$|ad - bc| du dv \quad |\det(A)| du dv$$

costruito con il valore assoluto del determinante jacobiano $D(\Phi) = \det(A)$,

- Si calcola l'integrale

$$\iint_Q F(u, v) |ad - bc| du dv$$

Si osservino in particolare i due insiemi di integrazione ricordando che

$$(u, v) \in Q \iff (x, y) \in \Phi(Q)$$

1.1. Da un parallelogramma a un quadrato.

Consideriamo il parallelogramma D di vertici

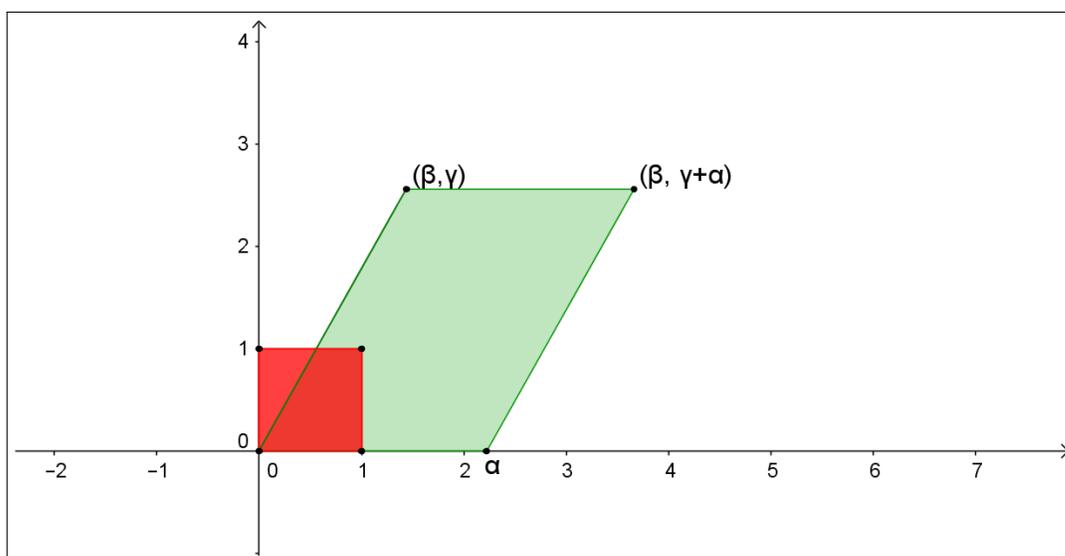


FIGURA 1. Da un parallelogramma a un quadrato

$$O = (0,0), \quad A = (\alpha,0), \quad B = (\beta, \gamma), \quad C = (\beta, \gamma + \alpha)$$

e cerchiamo una matrice

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

che trasformi il quadrato $Q: 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$ nel parallelogramma F cioè tale che

$$\mathcal{M}(O) = O, \quad \mathcal{M}(1,0) = A, \quad \mathcal{M}(0,1) = B, \quad \mathcal{M}(1,1) = C$$

- la prima condizione $\mathcal{M}(O) = O$ è ovvia ed è soddisfatta da qualunque matrice,
- la seconda $\mathcal{M}(1,0) = A$ richiede $a = \alpha$ e $c = 0$, pertanto la matrice deve essere del tipo

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \alpha & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

- la terza condizione $\mathcal{M}(0, 1) = B$ richiede $b = \beta$ e $d = \gamma$, pertanto la matrice deve essere del tipo

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

- la quarta condizione $\mathcal{M}(1, 1) = C$ è conseguenza delle precedenti.

Riesce pertanto

$$\iint_D f(x, y), dx dy = \iint_Q f[\alpha u + \beta v, \gamma v] |\det(A)| du dv$$

ESEMPIO 1.1. *Si debba calcolare l'integrale doppio*

$$\iint_D (x + y) dx dy$$

essendo D il parallelogramma di vertici

$$(0, 0), \quad (2, 0), \quad (3, 3), \quad (1, 3)$$

nel quale è possibile riconoscere l'immagine del quadrato Q di vertici opposti $(0, 0)$, $(1, 1)$ tramite la trasformazione affine

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

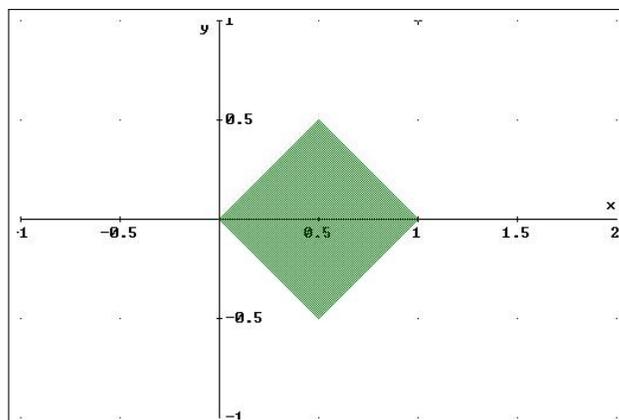
Riesce pertanto

$$\begin{aligned} \iint_D (x + y) dx dy &= \iint_Q [(2u + v) + (3v)] \left| \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right| du dv = \\ &= 6 \int_0^1 du \int_0^1 (2u + 4v) dv = 18 \end{aligned}$$

ESEMPIO 1.2. UTILITÀ DI UN CAMBIO DI COORDINATE AFFINI.

Si debba calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \frac{x + y}{1 + (x - y)^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) : 0 \leq x + y \leq 1, 0 \leq x - y \leq 1\}$$

FIGURA 2. Il dominio D

L'integrale richiesto rappresenta il volume del sottografico di $\frac{x+y}{1+(x-y)^2}$ relativo al quadrato D

Consideriamo la trasformazione affine

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(u-v) \end{cases} \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1] \Leftrightarrow (x, y) \in D \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Riesce inoltre $\det(A) = -\frac{1}{2}$.

La formula del cambiamento di coordinate è la seguente

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x+y}{1+(x-y)^2} dx dy &= \iint_{[0,1] \times [0,1]} \frac{u}{1+v^2} |\det(A)| du dv = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{[0,1] \times [0,1]} \frac{u}{1+v^2} du dv = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+v^2} dv \int_0^1 u du = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{1}{1+v^2} dv = \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

2. Cambi di coordinate generali

Sia $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(u, v) \rightarrow (x, y)$

$$\begin{cases} x = \phi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$$

una trasformazione di classe C^1 che abbia inversa di classe C^1 .

TEOREMA 2.1. Valgono i seguenti risultati:

$$(63) \quad \text{Area}(\Phi(C)) = \int_{\Phi(C)} dx dy = \int_C |\det D\Phi(u, v)| du dv.$$

e per ogni funzione continua F riesce

$$(64) \quad \int_{\Phi(C)} F(x,y) dx dy = \int_C F(\Phi(u,v)) |\det D\Phi(u,v)| du dv.$$

avendo indicato con $\det D\Phi(u,v)$ il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u} & \frac{\partial \phi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{pmatrix}$$

detta matrice jacobiana delle funzioni ϕ, ψ .

La formula (64) generalizza al caso di trasformazioni molto generali quanto già osservato, (62) per le trasformazioni affini.

3. Le coordinate polari

Sia Q il rettangolo $Q = [r, R] \times [\alpha, \beta]$ e si indichino con (ρ, θ) i suoi punti. Si consideri la funzione

$$\Phi : Q \rightarrow \mathbb{R}^2 : \Phi(\rho, \theta) = \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}.$$

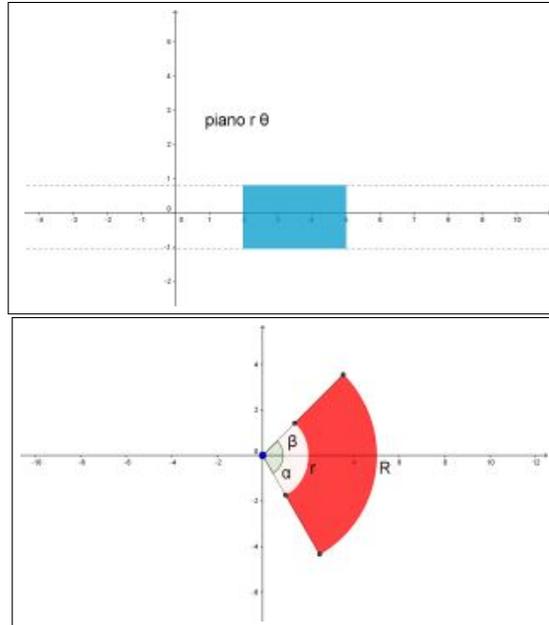


FIGURA 3. $\Phi : Q \rightarrow \mathbb{R}^2$

L'immagine di Q tramite Φ , vedi Figura (3), risulta essere l'intersezione della corona circolare di raggio interno r e raggio esterno R con l'angolo da α a β .

Se $r = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$, l'immagine di Q è il disco di centro l'origine e raggio R .

La matrice jacobiana e il suo determinante sono, nel caso delle coordinate polari,

$$D\Phi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \det D\Phi(\rho, \theta) = \rho$$

quindi

$$\text{Area}(\Phi(Q)) = \int_{\alpha}^{\beta} \int_r^R \rho d\rho d\theta = \frac{R^2 - r^2}{2} (\beta - \alpha).$$

Si ritrova, per $r = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$ l'area del cerchio πR^2 .

3.1. Integrazione in coordinate polari. Servendosi della (64) si ottiene la seguente:

PROPOSIZIONE 3.1. *Sia F una funzione continua sul disco chiuso di raggio $R > 0$ centrato in $(0, 0)$. Allora*

$$(65) \quad \int_{B(0,R)} F(x,y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \left[\int_0^R F(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \right].$$

ESEMPIO 3.2. *Calcolare l'integrale doppio seguente:*

$$\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy, \quad D: x^2+y^2 \leq 1$$

- si sostituisce ad x e ad y rispettivamente $\rho \cos(\theta)$ e $\rho \sin(\theta)$
- si sostituisce al blocco $dx dy$ il blocco $\rho d\rho d\theta$
- si estende l'integrale doppio in ρ e θ alla regione Q tale che

$$(\rho, \theta) \in Q \Leftrightarrow (x, y) \in D$$

$$\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1+\rho^2} \rho d\rho$$

$$= 2\pi \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1+\rho^2} 2\rho d\rho = 2\pi \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

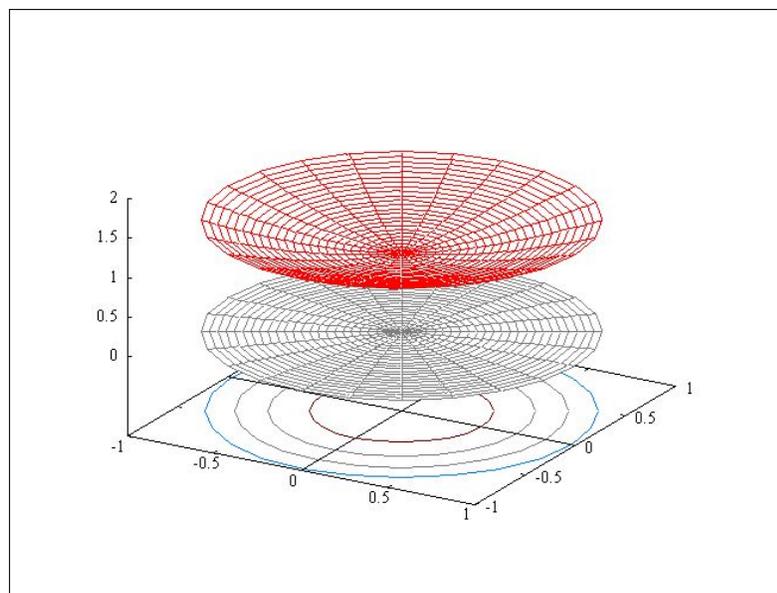


FIGURA 4. L'integrale $\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy$ rappresenta il volume tra il piano $z = 0$ in grigio e il grafico di $\sqrt{1+x^2+y^2}$, $x^2+y^2 \leq 1$ in rosso.

Il teorema della divergenza nei rettangoli

1. Introduzione

Il teorema fondamentale del calcolo afferma che

$$(66) \quad \int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a),$$

Il significato, evidente, della formula è il legame tra

- l'integrale di una derivata $f'(x)$ su un intervallo
- i valori della primitiva $f(x)$ agli estremi dell'intervallo
- valori moltiplicati
 - per $+1$ nell'estremo destro,
 - per -1 nell'estremo sinistro.

Sia $R : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ un rettangolo, l'integrale

$$\iint_R f_x(x,y) dx dy$$

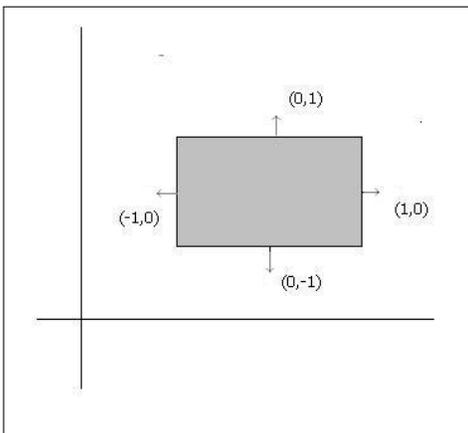
si riduce, come tutti gli integrali doppi estesi a rettangoli, a

$$(67) \quad \iint_R f_x(x,y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f_x(x,y) dx = \int_c^d (f(b,y) - f(a,y)) dy$$

2. Il flusso traverso il bordo

Indichiamo con ∂R la curva frontiera del rettangolo R e con \vec{v} il versore normale a tale frontiera, diretto verso l'esterno di R .

Su ciascuno dei quattro lati di R il versore normale \vec{v} è costante ed è espresso come segue



$$\vec{v} = \begin{cases} (1,0) & x = b, c \leq y \leq d \\ (0,1) & a \leq x \leq b, y = d \\ (-1,0) & x = a, c \leq y \leq d \\ (0,-1) & y = c, a \leq x \leq b \end{cases}$$

Tenuta presente l'espressione della componente v_x la (67) si può riscrivere servendosi di un integrale curvilineo su ∂R come segue

$$(68) \quad \iint_R f_x(x,y) dx dy = \int_{\partial R} f(x,y) \cdot v_x ds$$

Un discorso analogo, riferito all'integrale su R di una derivata $g_y(x,y)$ conduce alla formula

$$(69) \quad \iint_R g_y(x,y) dx dy = \int_a^b (g(x,d) - g(x,c)) dx$$

e quindi alla

$$(70) \quad \iint_R g_y(x,y) dx dy = \int_{\partial R} g(x,y) \cdot v_y ds$$

Le due formule (68) e (70) sono riassunte nell'interpretazione vettoriale seguente:

TEOREMA 2.1 (Teorema della divergenza). *Sia R un rettangolo, $\vec{F}(x,y) = \{f(x,y), g(x,y)\}$ riesca*

$$(71) \quad \iint_R \operatorname{div} \vec{F}(x,y) dx dy = \int_{\partial R} \vec{F} \times \vec{v} ds$$

avendo indicato con $\operatorname{div} \vec{F}(x,y) = f_x(x,y) + g_y(x,y)$.

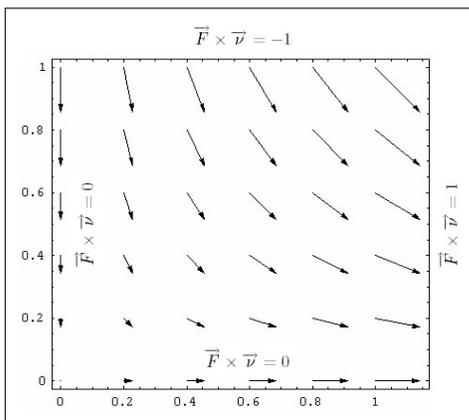
L'integrale a secondo membro della (71)

$$\int_{\partial R} \vec{F} \times \vec{v} ds$$

si chiama *flusso del vettore F uscente da R o flusso del vettore F attraverso ∂R* .

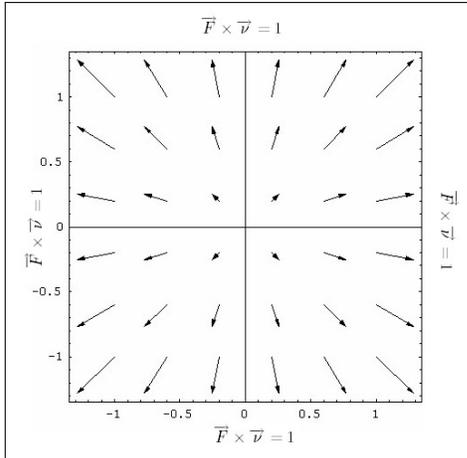
Il risultato (71) evidenzia il legame tra il flusso del vettore F e il valore, scalare, della divergenza di \vec{F} dentro il rettangolo. Ad esempio i vettori che hanno divergenza nulla hanno un flusso altrettanto nullo.

ESEMPIO 2.2. $F = \{x, -y\}$: qual'è il flusso del vettore $F = \{x, -y\}$ uscente dalla frontiera del quadrato $Q = [0, 1] \times [0, 1]$?



Risposta: zero ! Infatti la divergenza di F vale 0. Verrebbe da dire che... tanto ne entra quanto ne esce..!

ESEMPIO 2.3. $G = \{x, y\}$: consideriamo invece il caso del vettore $G = \{x, y\}$ e stimiamo il flusso uscente dal quadrato $Q = [-1, 1] \times [1, 1]$,



Verrebbe da dire che ... il campo G diverge dall'origine ! La divergenza di G vale 2: il flusso uscente dal quadrato Q assegnato vale 8 (capite perchè ?).

ESEMPIO 2.4. Il campo $\vec{F} = \{1 + x^2, 1 - y^2\}$ è disegnato in Figura 1, limitatamente al

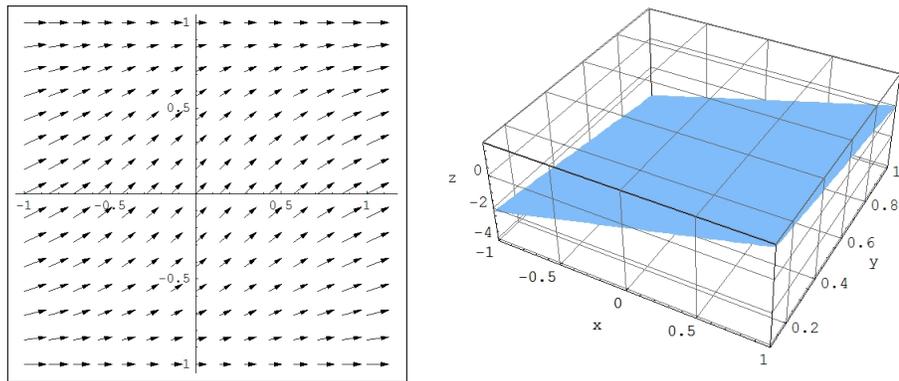


FIGURA 1. $F = \{1 + x^2, 1 - y^2\}$ e $\text{div}F = 2x - 2y$

quadrato $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$: si vede bene che attraverso le due basi $y = -1$ e $y = 1$ non c'è flusso, nè entrante nè uscente perchè F è parallelo alle basi stesse, ovvero su tali basi il prodotto scalare

$$F \times \nu = 0$$

Sui due lati verticali invece c'è flusso: ma la simmetria evidente mostra che, in definitiva ... tanto ne entra quanto ne esce...

In Figura 1 a destra si vede il grafico della divergenza $\text{div}F = 2x - 2y$: si tratta di un piano obliquo sul quadrato Q , simmetrico rispetto alla diagonale: è evidente che

$$\iint_Q (2x - 2y) dx dy = 0$$

3. La regola di integrazione per parti

Il teorema della divergenza nel piano permette di riconoscere relazioni fra gli integrali doppi analoghe a quelle incontrate nella ordinaria integrazione per parti in una dimensione.

Consideriamo un campo $\mathbf{F} = \{f(x, y) \cdot g(x, y), 0\}$: il teorema della divergenza produce

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \, ds = \iint_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F}) \, dx dy \quad \rightarrow \quad \oint_{\partial\Omega} f(x, y) \cdot g(x, y) \, v_x \, ds = \iint_{\Omega} (f_x g + f g_x) \, dx dy$$

ovvero

$$(72) \quad \iint_{\Omega} f_x g \, dx dy = \oint_{\partial\Omega} f(x, y) \cdot g(x, y) \, v_x \, ds - \iint_{\Omega} f g_x \, dx dy$$

La somiglianza è completa:

- si considera l'integrale di un prodotto di due fattori, $f_x g$ di cui uno è una derivata,
- si trasforma in un integrale ancora di un prodotto $f g_x$ con la derivazione scambiata e cambiato di segno,
- compare un termine che considera il prodotto $f g$ sulla frontiera di Ω .

Naturalmente analoga alla (72) vale la simmetrica con le derivate rispetto ad y

$$(73) \quad \iint_{\Omega} f_y g \, dx dy = \oint_{\partial\Omega} f(x, y) \cdot g(x, y) \, v_y \, ds - \iint_{\Omega} f g_y \, dx dy$$

Il teorema di Stokes

1. L'orientamento

Una regola semplice per orientare le curve frontiere di regioni E è quello di pensare di percorrerle nel verso secondo il quale l'interno di E si trovi alla sinistra di chi cammina:

- se E è un cerchio il verso di percorrenza della circonferenza frontiera di E è quello che comunemente chiamiamo *verso antiorario*,
- se E è una corona circolare allora la sua frontiera è fatta di due circonferenze: quella esterna sarà orientata nel *verso antiorario*, quella interna nel *verso orario*

1.1. Il versore tangente a ∂E . Sia $\vec{v} = \{v_x, v_y\}$ il versore normale uscente, allora il versore tangente \vec{t} deve essere

- ortogonale a \vec{v}
- orientato in modo che \vec{v}, \vec{t} sia una rotazione di \vec{x}, \vec{y} ovvero

$$\det \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ t_x & t_y \end{vmatrix} = 1$$

- allora

$$\vec{t} = \left\{ \begin{array}{l} t_x = -v_y \\ t_y = v_x \end{array} \right\}$$

2. Introduzione al teorema di Stokes

Si tratta di una chiave di lettura diversa del fenomeno che abbiamo denominato *Teorema della divergenza*: tenuto presente il legame tra versori tangente e normale a una curva

$$\vec{v} = \{\alpha, \beta\}, \quad \Leftrightarrow \quad \vec{t} = \{-\beta, \alpha\}$$

ne segue

$$\begin{aligned} \iint_E \operatorname{div}\{f, g\} dx dy &= \int_{\partial E} \{f, g\} \times \vec{v} ds = \\ (74) \quad &= \int_{\partial E} (f \cdot \alpha + g \cdot \beta) ds = \int_{\partial E} (-g \cdot (-\beta) + f \cdot \alpha) ds = \\ &= \int_{\partial E} \{-g, f\} \times \vec{t} ds \end{aligned}$$

relazione ottenuta ricordando il legame tra versore \vec{v} e versore tangente \vec{t} .
Riscriviamo ora la (74) chiamando $-g$ come u e f come v

$$(75) \quad \int_{\partial E} \{u, v\} \times \vec{t} ds = \iint_E (v_x - u_y) dx dy$$

Ricordando l'espressione del *rotore* di un vettore $\{u, v, w\}$

$$\text{rot } \{u, v, w\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

la formula (75) diventa

$$(76) \quad \int_{\partial E} \{u, v\} \times \vec{t} \, ds = \iint_E \text{rot}_z \{u, v, 0\} \, dx dy$$

Il primo membro della 76 si chiama

circuitazione di $\{u, v\}$ lungo ∂E

o anche

lavoro di $\{u, v\}$ lungo ∂E

Indicato con $F = \{u, v, 0\}$ la (76) si può anche scrivere come

$$(77) \quad \int_{\partial E} \vec{F} \times \vec{t} \, ds = \iint_E \text{rot } \vec{F} \times \vec{v} \, dx dy$$

avendo indicato con v il versore normale del piano xy in cui è contenuto E e avendo riconosciuto che, ovviamente

$$\text{rot}_z \vec{F} = \text{rot } \vec{F} \times \vec{v}$$

La formula (77) si chiama *teorema di Stokes*: la sua importanza e validità è molto più ampia di quanto non appaia da quanto scritto finora.

3. Qualche disegno...

Un primo esempio:

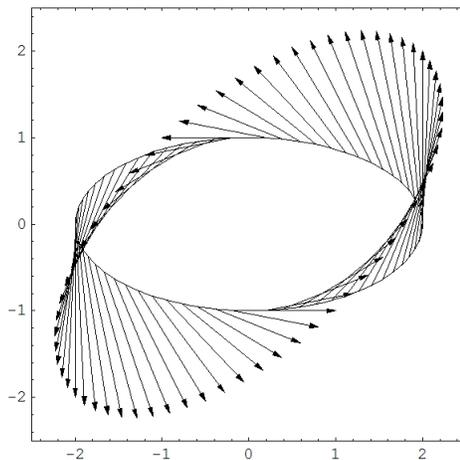


FIGURA 1. Il campo $F = \{-y, x\}$ lungo l'ellisse $x^2/4 + y^2 = 1$

In Figura 1 è disegnato il campo $F = \{-y, x\}$ lungo l'ellisse $\mathcal{E} : x^2/4 + y^2 = 1$: percorrendo l'ellisse in senso antiorario si riconosce che

$$\vec{t} = \frac{(-2y, x/2)}{\sqrt{4y^2 + x^2/4}}, \quad \vec{F} \times \vec{t} = \frac{(-2y, x/2) \times (-y, x)}{\sqrt{4y^2 + x^2/4}} = \frac{2y^2 + x^2/2}{\sqrt{4y^2 + x^2/4}}$$

Tenuta presente l'equazione $x^2/4 + y^2 = 1$ si ha

$$\vec{F} \times \vec{t} = \frac{2}{\sqrt{1+3y^2}} : \quad y \in [-1, 1] \rightarrow \vec{F} \times \vec{t} \in [1, 2]$$

Si ha quindi

$$\vec{F} \times \vec{t} > 0 \Rightarrow \int_{\partial \mathcal{E}} \vec{F} \times \vec{t} ds \approx 4\sqrt{5} \cdot 1.5 \approx 13$$

Tenuto presente che

$$\text{rot}_z(\vec{F}) = 2 \Rightarrow \iint_E \text{rot}_z(\vec{F}) dx dy = 4\pi \approx 12.56$$

riesce plausibile (!!)

$$\int_{\partial E} \vec{F} \times \vec{t} ds = \iint_E \text{rot}_z \vec{F} dx dy$$

Un secondo esempio:

Consideriamo nelle due Figure seguenti quanto stabilito dalla formula di Stokes: legame tra circuitazione di un campo vettoriale

$$F = \left\{ \frac{-y}{1+x^2+y^2}, \frac{x}{1+x^2+y^2}, 0 \right\}$$

lungo la ∂E e integrale su E della componente normale del rotore

$$\text{rot}_z F = \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

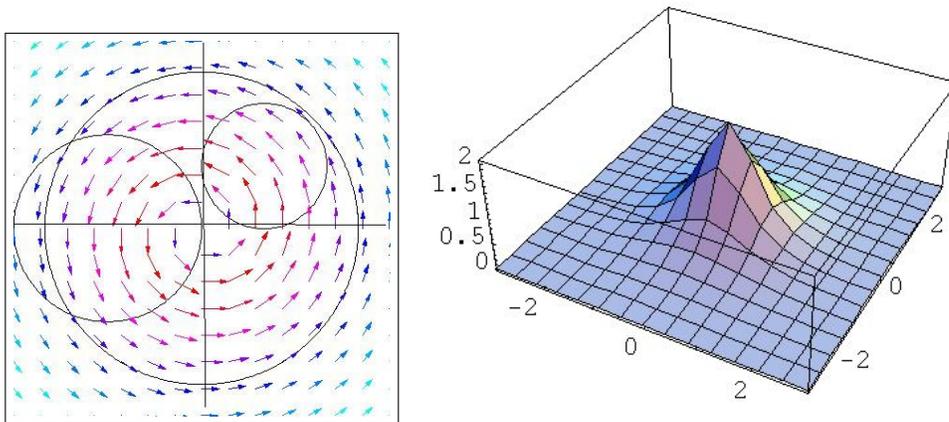


FIGURA 2. Il campo F e la componente normale del rotore

Le regioni E proposte sono quelle delimitate dalle tre circonferenze che si vedono in Figura 2: le circuitazioni di F lungo le tre circonferenze frontiere si immaginano immaginando i valori dei prodotti scalari

$$\vec{F} \times \vec{t}.$$

Per una delle tre circonferenze, quella centrale il prodotto scalare è sempre positivo, per le altre due invece cambia segno.

Non è un caso che la circuitazione lungo la circonferenza centrale sia certamente la maggiore:

tutte e tre le circuitazioni possono essere calcolate con il teorema di Stokes eseguendo l'integrale doppio esteso al cerchio che si sta studiando della componente normale del rotore.

Basta guardare il grafico di Figura 2 per riconoscere come tale integrale sia maggiore nel cerchio centrale...

OSSERVAZIONE 3.1. *La parola ROTORE...*

Guardando il campo vettoriale F disegnato in Figura 2 chiunque direbbe che le freccette che indicano il campo rappresentano le traiettorie di qualcosa che RUOTA intorno all'origine.

L'origine è infatti il punto in cui la componente normale del ROTORE è più grande.

Che le due parole RUOTA e ROTORE siano ben scelte nessuno lo può negare !

4. Le formule di Green

La formula (75)

$$\int_{\partial E} \{u, v\} \times \vec{t} ds = \iint_E (v_x - u_y) dx dy$$

scritta con la notazione delle forme differenziali, diviene

$$\int_{\partial E} u(x, y) dx + v(x, y) dy = \iint_E (v_x - u_y) dx dy$$

ovvero nel caso che una delle due funzioni sia identicamente nulla

$$(78) \quad \begin{cases} \iint_E u_y(x, y) dx dy = - \int_{\partial E} u(x, y) dx \\ \iint_E v_x(x, y) dx dy = \int_{\partial E} v(x, y) dy \end{cases}$$

Queste formule hanno il nome classico di *formule di Green*¹.

Si ricordi che gli integrali curvilinei a primo membro sono integrali di forme differenziali, cioè se $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$ è una rappresentazione parametrica della curva frontiera che al crescere di t da a a b produca l'orientamento positivo di ∂E le precedenti formule si calcolano come

$$\begin{cases} \int_a^b u(x(t), y(t)) x'(t) dt = - \iint_E u_y(x, y) dx dy \\ \int_a^b v(x(t), y(t)) y'(t) dt = \iint_E v_x(x, y) dx dy \end{cases}$$

¹George Green (Nottingham, 14 luglio 1793; Nottingham, 31 maggio 1841)

5. Riassumendo

Un campo vettoriale E assegnato in un dominio Ω produce due importanti valori:

- il suo flusso $\Phi(\Omega)$ uscente traverso $\partial\Omega$,
- la sua circuitazione $\mathcal{L}(\Omega)$, o lavoro, prodotto lungo $\partial\Omega$.

Il teorema della divergenza e la formula di Stokes esprimono tali due valori tramite integrali doppi estesi a Ω :

$$\Phi(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \vec{\nu} \, ds = \iint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{E}) \, dx \, dy$$

$$\mathcal{L}(\Omega) = \oint_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \vec{\tau} \, ds = \iint_{\Omega} \operatorname{rot}_z(\vec{E}) \, dx \, dy$$

Nel caso, ad esempio, in cui Ω sia un cerchio di centro (x_0, y_0) e raggio r piccolo si possono riconoscere, ricorrendo al teorema della media per gli integrali doppi, le approssimazioni

$$\int_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \vec{\nu} \, ds \approx \operatorname{div}(\vec{E})(x_0, y_0) \pi r^2$$

$$\oint_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \vec{\tau} \, ds \approx \operatorname{rot}_z(\vec{E})(x_0, y_0) \pi r^2$$

ovvero

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{E})(x_0, y_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \vec{\nu} \, ds \\ \operatorname{rot}_z(\vec{E})(x_0, y_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \oint_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot \vec{\tau} \, ds \end{cases}$$

6. Integrali tripli

Gli integrali tripli, come quelli doppi, si calcolano con un algoritmo di riduzione a tre integrali semplici nel caso che D sia

- un dominio rettangolare $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, $h \leq z \leq k$:

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_h^k f(x, y, z) \, dz$$

- un dominio normale $a \leq x \leq b$, $c(x) \leq y \leq d(x)$, $h(x, y) \leq z \leq k(x, y)$;

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} dy \int_{h(x, y)}^{k(x, y)} f(x, y, z) \, dz$$

6.1. Le coordinate polari sferiche. Ad ogni punto $P = (x, y, z)$ di \mathbb{R}^3 si associano i tre numeri

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \phi = \widehat{OPz}, \quad \theta = \widehat{(x,y)x}$$

il primo ρ rappresenta la distanza di P dall'origine, il secondo ϕ rappresenta la misura dell'angolo tra OP e l'asse z , il terzo θ rappresenta la misura dell'angolo tra la proiezione di P sul piano (x, y) e l'asse x .

I tre numeri (ρ, ϕ, θ) si dicono coordinate polari sferiche di $P = (x, y, z)$ e si ha

$$\begin{cases} x = \rho \sin(\phi) \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\phi) \sin(\theta) \\ z = \rho \cos(\phi) \end{cases}$$

Il determinante jacobiano relativo alle coordinate polari sferiche è il seguente

$$\begin{vmatrix} \sin(\phi) \cos(\theta) & \sin(\phi) \sin(\theta) & \cos(\phi) \\ \rho \cos(\phi) \cos(\theta) & \rho \cos(\phi) \sin(\theta) & -\rho \sin(\phi) \\ -\rho \sin(\phi) \sin(\theta) & \rho \sin(\phi) \cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin(\phi)$$

Nel caso in cui D sia una sfera di centro l'origine e raggio R l'integrale triplo si calcola in coordinate polari sferiche come segue

$$\begin{aligned} & \iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \\ & = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\phi \int_0^R f(\rho \sin(\phi) \cos(\theta), \rho \sin(\phi) \sin(\theta), \rho \cos(\phi)) \rho^2 \sin(\phi) \, d\rho \end{aligned}$$

Superfici

1. Superfici regolari parametriche

Le superfici più comuni sono i grafici delle funzioni $f(x,y)$ di due variabili.

La rappresentazione cartesiana

$$z = f(x,y)$$

tuttavia non è uno strumento molto duttile per rappresentare superfici: sfugge alla rappresentazione cartesiana perfino la sfera che certamente è una superficie molto comune...

Una terna di funzioni (regolari) $x(t), y(t), z(t)$ rappresenta una curva: l'oggetto *curva* è unidimensionale e la sua rappresentazione si serve di un solo parametro, t .

Le superfici sono oggetti bidimensionali e sono, quindi, rappresentate da funzioni di due variabili

$$(79) \quad \begin{cases} x = \phi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v) \end{cases}$$

La regolarità richiesta, sostanzialmente per poter parlare di piano tangente, è:

- $\phi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)$ di classe C^1 in un aperto Ω
- la matrice jacobiana

$$\frac{\partial(\phi, \psi, \chi)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \phi_u & \psi_u & \chi_u \\ \phi_v & \psi_v & \chi_v \end{pmatrix}$$

deve avere rango 2 in Ω , ovvero la somma dei quadrati dei determinanti dei tre minori di ordine 2

$$L = \begin{pmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \chi_u & \phi_u \\ \chi_v & \phi_v \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \phi_u & \psi_u \\ \phi_v & \psi_v \end{pmatrix}$$

deve essere positiva in Ω .

OSSERVAZIONE 1.1. *La richiesta che le tre funzioni $\phi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)$ producano una matrice jacobiana di rango 2 (rango massimo) significa, sostanzialmente che vogliamo che le tre funzioni siano*

abbastanza diverse fra loro.

Pensate infatti al seguente controesempio in cui le tre funzioni sono prese regolarissime e anche... ugualissime tra loro

$$(80) \quad \begin{cases} x = u^2 + v^2 \\ y = u^2 + v^2 \\ z = u^2 + v^2 \end{cases} \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

Che superficie si rappresenterà ?

$$x = y = z \geq 0$$

una semiretta !

Qualcosa di molto lontano dall'idea di superficie.

1.1. Le linee coordinate.

Le curve

$$\phi(u, v_0), \psi(u, v_0), \chi(u, v_0)$$

$$\phi(u_0, v), \psi(u_0, v), \chi(u_0, v)$$

ottenute fissando una delle due variabili u, v appartengono alla superficie e si dicono linee coordinate.

I vettori

$$(81) \quad \begin{aligned} \vec{X}_u &= \{\phi_u(u_0, v_0), \psi_u(u_0, v_0), \chi_u(u_0, v_0)\} \\ \vec{X}_v &= \{\phi_v(u_0, v_0), \psi_v(u_0, v_0), \chi_v(u_0, v_0)\} \end{aligned}$$

sono tangenti alle linee coordinate nel punto $\phi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0), \chi(u_0, v_0)$

I vettori \vec{X}_u ed \vec{X}_v non sono paralleli: infatti la matrice jacobiana da essi formata ha, per ipotesi, rango 2.

Può accadere che le linee coordinate siano ortogonali tra loro. Questo corrisponde alla condizione di annullamento del prodotto scalare in ogni (u, v)

$$\vec{X}_u \times \vec{X}_v = \phi_u(u, v) \cdot \phi_v(u, v) + \psi_u(u, v) \cdot \psi_v(u, v) + \chi_u(u, v) \cdot \chi_v(u, v) = 0$$

1.2. La normale. Il prodotto vettoriale

$$\vec{v} = \vec{X}_u \wedge \vec{X}_v = \{L, M, N\}$$

dei due vettori \vec{X}_u ed \vec{X}_v tangenti alla superficie nel punto $\phi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0), \chi(u_0, v_0)$ è normale al piano generato dai due vettori \vec{X}_u, \vec{X}_v , tangente alla superficie nel punto $\phi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0), \chi(u_0, v_0)$.

Il vettore $\vec{v} = \vec{X}_u \wedge \vec{X}_v = \{L, M, N\}$ è quindi normale alla superficie nel punto $\phi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0), \chi(u_0, v_0)$.

2. Alcune superfici fondamentali

2.1. Piani. Tre punti diversi

$$A = (a_1, a_2, a_3), \quad B = (b_1, b_2, b_3), \quad C = (c_1, c_2, c_3),$$

determinano un piano. Se le tre quote sono uguali

$$a_3 = b_3 = c_3 = h$$

il piano è $z = h$. Analogo discorso se fossero uguali le tre ascisse o le tre ordinate. Altrimenti l'espressione cartesiana del piano per A, B, C sarà della forma

$$z = ax + by + c$$

I tre coefficienti a, b, c si determinano imponendo il passaggio del piano per i tre punti A, B, C assegnati.

I vettori $\{1, 0, a\}$ e $\{0, 1, b\}$ sono paralleli al piano, il vettore $\{-a, -b, 1\}$ è normale al piano.

ESEMPIO 2.1. Siano $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$, $C = (0, 0, 3)$: i coefficienti del piano $z = ax + by + c$ da essi determinato sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 1a + 0b + c = 0 \\ 0a + 2b + c = 0 \\ 0a + 0b + c = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = 3 \end{cases}$$

Il piano è pertanto $z = -3x - \frac{3}{2}y + 3$ spesso indicato con la notazione equivalente

$$3x + \frac{3}{2}y + z = 3$$

2.2. Triangoli.

Un triangolo è determinato, come il piano cui appartiene, da tre punti, i suoi tre vertici A, B, C .

I punti P del triangolo sono dati da

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C$$

essendo α, β, γ tre numeri non negativi a somma $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Si rappresenta del resto il triangolo anche con l'espressione parametrica che scriviamo per semplicità in forma vettoriale,

$$P = v.C + (1 - v)[u.A + (1 - u).B], \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1$$

Infatti $Q = u.A + (1 - u).B$ è, per $u \in [0, 1]$, un punto del lato AB e $P = v.C + (1 - v).Q$ è, per $v \in [0, 1]$, un punto del segmento CQ .

Siano $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$, I vettori $AB = \{b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3\}$ e $AC = \{c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3\}$ sono paralleli alla superficie, il vettore

$$AB \wedge AC = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix}$$

è normale.

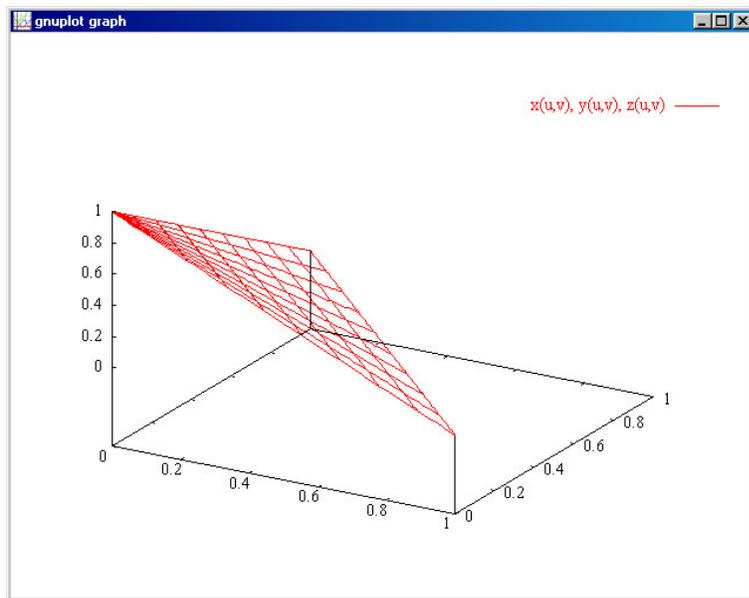


FIGURA 1. Il triangolo di vertici $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$

ESEMPIO 2.2. Siano $A = (1,0,0)$, $B = (0,2,0)$, $C = (0,0,3)$: i punti P del triangolo obliquo determinato dai tre punti A, B, C sono

$$P = vC + (1-v)[uA + (1-u)B], \quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$$

e quindi hanno coordinate

$$\begin{cases} x = (1-v)u \\ y = 2(1-v)(1-u) \\ z = 3v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$$

2.3. Sfere.

La sfera è determinata dal centro $C = (c_1, c_2, c_3)$ e dal raggio r : le equazioni parametriche (vedi coordinate polari sferiche) sono

$$\begin{cases} x = c_1 + r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ y = c_2 + r \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z = c_3 + r \cos(\varphi) \end{cases}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Facendo variare i due parametri φ, θ in intervalli più piccoli si ottengono porzioni della sfera.

Ad esempio $0 \leq \varphi \leq \pi/2, 0 \leq \theta \leq 2\pi \Rightarrow$ semisfera superiore,

$0 \leq \varphi \leq \pi/2, 0 \leq \theta \leq \pi/4 \Rightarrow$ quarto di semisfera superiore,

ecc

In ogni punto (x, y, z) della sfera di centro $C = (c_1, c_2, c_3)$ il vettore $\mathbf{v} = (x - c_1, y - c_2, z - c_3)$ è normale alla superficie.

In particolare se il centro coincide con l'origine la normale in ogni punto (x, y, z) è $\mathbf{v} = (x, y, z)$.

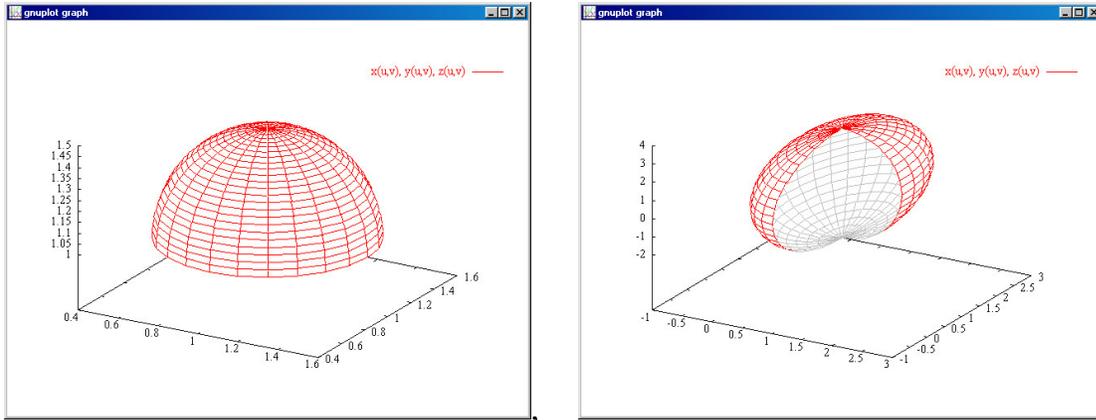


FIGURA 2. La semisfera superiore di centro $(1, 1, 1)$ e raggio $r = 0.5$ e una porzione di ellissoide di centro $C = (1, 1, 1)$ e semiassi 1, 2, 3

ESEMPIO 2.3. La sfera di centro $C = (2, 3, 6)$ e raggio $r = 7$ ha equazione cartesiana tradizionale

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 6)^2 = 7^2$$

ovvero

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 12z = 0$$

Le equazioni parametriche della semisfera superiore, $z \geq 0$ sono

$$\begin{cases} x = 2 + 7 \cdot \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ y = 3 + 7 \cdot \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z = 6 + 7 \cdot \cos(\varphi) \end{cases}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

2.4. Ellisoidi.

L'ellissoide è una superficie simile alla sfera: è determinata da un centro $C = (c_1, c_2, c_3)$ e da tre semiassi a, b, c .

L'equazione cartesiana

$$\frac{(x - c_1)^2}{a^2} + \frac{(y - c_2)^2}{b^2} + \frac{(z - c_3)^2}{c^2} = 1$$

suggerisce la rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = c_1 + a \cdot \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ y = c_2 + b \cdot \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z = c_3 + c \cdot \cos(\varphi) \end{cases}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

In ogni punto dell'ellissoide il vettore $\left\{ \frac{2(x-c_1)}{a^2}, \frac{2(y-c_2)}{b^2}, \frac{2(z-c_3)}{c^2} \right\}$ è normale alla superficie.

ESEMPIO 2.4. Sia \mathcal{S} l'ellissoide ottenuto facendo ruotare l'ellisse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

intorno all'asse x .

L'ellissoide cui si perviene ha semiasse $a = 4$, semiasse $b = 3$ e semiasse $c = b = 3$.
Le sue equazioni parametriche sono quindi

$$\begin{cases} x = 4 \cdot \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ y = 3 \cdot \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z = 3 \cdot \cos(\varphi) \end{cases}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

2.5. Paraboloidi.

Consideriamo le superfici di equazione cartesiana

$$z = a(x - c_1)^2 + b(y - c_2)^2 + c(x - c_1)(y - c_2) + d$$

ottenute generalizzando l'equazione della parabola $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Si tratta di superfici molto diverse al variare dei parametri che le determinano:

- (c_1, c_2) una sorta di centro
- d la quota raggiunta in corrispondenza di $(x, y) = (c_1, c_2)$
- i tre parametri a, b, c che determinano la forma della superficie
 - $\Delta = c^2 - 4ab < 0, \quad a > 0$: una coppa verso l'alto
 - $\Delta = c^2 - 4ab < 0, \quad a < 0$: una coppa verso il basso
 - $\Delta = c^2 - 4ab > 0$: una sella

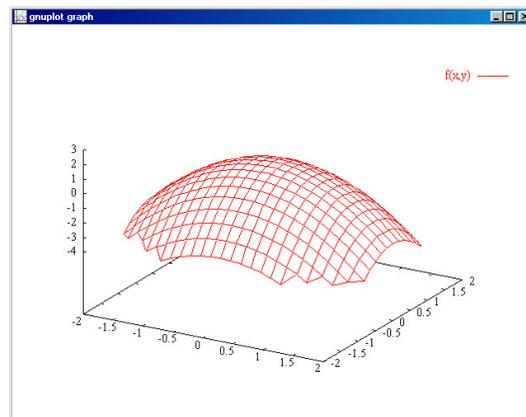
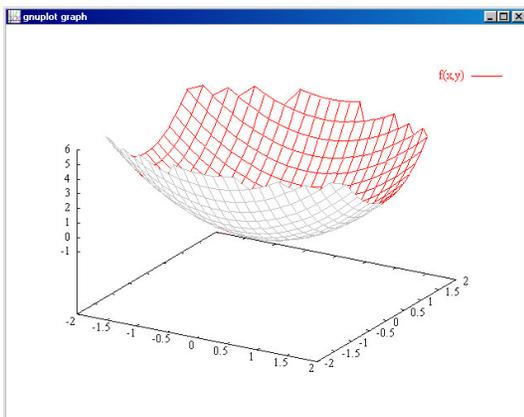


FIGURA 3. I paraboloidi con $(a, b, c, d) = (1, 2, 0, -1)$ e con $(a, b, c, d) = (-1, -2, 0, 1)$

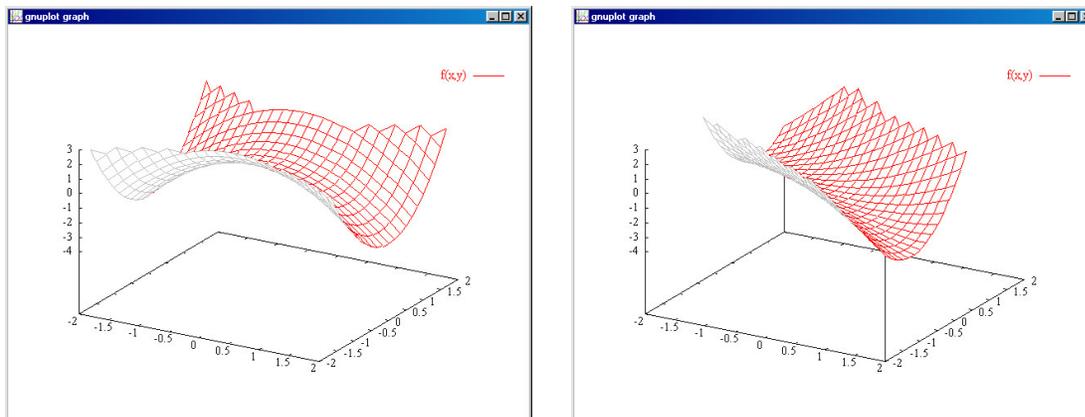


FIGURA 4. I paraboloidi con $(a, b, c, d) = (-1, 2, 0, 1)$ e con $(a, b, c, d) = (0.5, 2, 2.5, -1)$

3. Le superfici di rotazione

Sia $f(x)$ una funzione definita per $x \in [a, b]$, con $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$: sia Σ la superficie ottenuta ruotando il grafico intorno all'asse verticale.

Ad esempio $[a, b] = [0, 1]$, $f(x) = x^2$

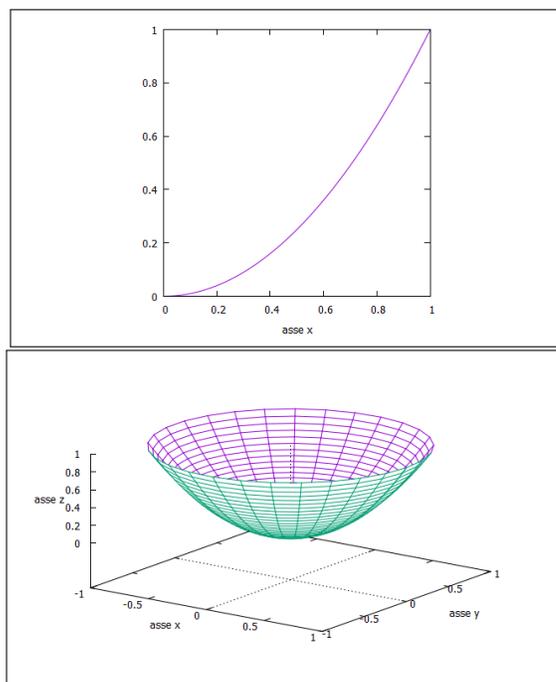


FIGURA 5. $[a, b] = [0, 1]$, $f(x) = x^2$

Le superfici di rotazione più comuni sono i cilindri e i coni, superfici ottenute facendo ruotare dei segmenti.

3.1. La rappresentazione parametrica. La superficie Σ ottenuta ruotando il grafico di $f(x)$ intorno all'asse verticale ha equazioni parametriche

$$x = \rho \cos(\theta), \quad y = \rho \sin(\theta), \quad z = f(\rho), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad a \leq \rho \leq b$$

Si tratta semplicemente di sostituire la x con la ρ delle coordinate polari, ed esprimere x ed y come effettivamente suggerito dalle coordinate polari.

La superficie a destra di Figura 5 ha quindi equazioni

$$x = \rho \cos(\theta), \quad y = \rho \sin(\theta), \quad z = \rho^2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

Area di una superficie

1. Il caso cartesiano

1.1. Il caso affine. Limitiamoci a una superficie cartesiana $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$ e consideriamo, in prima istanza il caso

$$f(x, y) = ax + by$$

Il grafico di tale funzione al variare di (x, y) nel quadrato $\Omega : \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ è un parallelogramma Π dello spazio di vertici

$$(0, 0, 0), \quad (1, 0, a), \quad (1, 1, a + b), \quad (0, 1, b)$$

I lati di Π sono rappresentati dai vettori $\mathbf{u} = (1, 0, a)$ e $\mathbf{v} = (0, 1, b)$: com'è noto l'area di Π è il modulo del prodotto vettoriale $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$.

Pertanto

$$\mathcal{A}(\Pi) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = \sqrt{1 + a^2 + b^2}$$

Il caso di $f(x, y) = h + ax + by$, $(x, y) \in \Omega$ risulta del tutto analogo: il parallelogramma grafico risulta semplicemente alzato (o abbassato) della quantità h senza che questo ne modifichi l'area che resta quindi $\sqrt{1 + a^2 + b^2}$.

È ragionevole, alla luce di quanto osservato finora, riconoscere che

- il parallelogramma Σ_r grafico di $f(x, y) = h + ax + by$, $(x, y) \in \Omega_r : \{0 \leq x \leq r, 0 \leq y \leq r\}$ abbia area

$$\mathcal{A}(\Sigma_r) = \sqrt{1 + a^2 + b^2} r^2,$$

- il parallelogramma Σ_P grafico di $f(x, y) = h + ax + by$, $(x, y) \in P : \alpha \leq x \leq \beta, \gamma \leq y \leq \delta$ abbia area

$$\mathcal{A}(\Sigma_P) = \sqrt{1 + a^2 + b^2} \mathcal{A}(P)$$

1.2. Il caso generale. Il caso di una $f(x, y)$ non necessariamente di forma $h + ax + by$ può essere trattato approssimando localmente $f(x, y)$ con la formula di Taylor di grado 1.

Sia ad esempio $f(x, y) = \sin(2x + 3y)$, $(x, y) \in P : \{-0.5 \leq x \leq 0.5, -0.5 \leq y \leq 0.5, \}$ e cerchiamo di stimare l'area della corrispondente superficie Σ grafico:

- $f(x, y) \approx f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y = 2x + 3y$,
- detta Σ^* la superficie grafico della funzione $2x + 3y$, $(x, y) \in \Omega$ riesce

$$\mathcal{A}(\Sigma^*) = \sqrt{1 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \mathcal{A}(P)$$

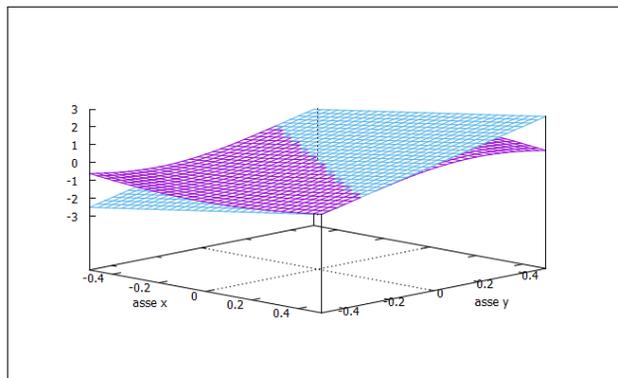


FIGURA 1. $f(x,y) = \sin(2x+3y)$, $(x,y) \in P: \{-0.5 \leq x \leq 0.5, -0.5 \leq y \leq 0.5, \}$

- $\mathcal{A}(\Sigma) \approx \mathcal{A}(\Sigma^*) \rightarrow \mathcal{A}(\Sigma) \approx \sqrt{14} \mathcal{A}(P)$.

Per stimare l'area del grafico di $f(x,y)$, $(x,y) \in \Omega$ si può quindi:

- approssimare Ω con un plirettangolo formato da n rettangoli privi di punti interni comuni,

$$\Omega \approx P_1 \cup \dots \cup P_n$$

- approssimare in ognuno di tali rettangoli $f(x,y)$ con un suo sviluppo di Taylor di primo ordine,

$$f(x,y) \approx f(x_i, y_i) + f_x(x_i, y_i)(x - x_i) + f_y(x_i, y_i)(y - y_i)$$

- detto Σ_i il grafico di $f(x,y)$, $(x,y) \in P_i$ e Σ_i^* il grafico della corrispondente approssimazione di Taylor riesce

$$\mathcal{A}(\Sigma_i) \approx \mathcal{A}(\Sigma_i^*) = \sqrt{1 + f_x^2(x_i, y_i) + f_y^2(x_i, y_i)} \mathcal{A}(P_i)$$

Ne segue pertanto

$$\mathcal{A}(\Sigma) \approx \sum_{i=1}^n \mathcal{A}(\Sigma_i) \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f_x^2(x_i, y_i) + f_y^2(x_i, y_i)} \mathcal{A}(P_i)$$

Tenuto presente che l'ultima somma approssima l'integrale doppio

$$\iint_{\Omega} \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)} dx dy$$

si riconosce ragionevolmente che

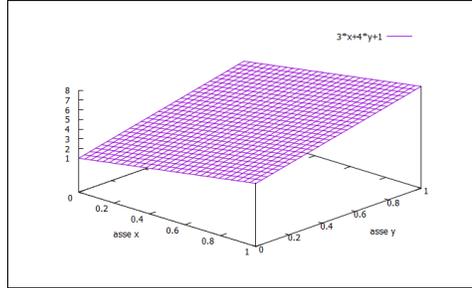
$$\mathcal{A}(\Sigma) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)} dx dy$$

ESEMPIO 1.1. Sia $f(x,y) = 3x + 4y + 1$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. La superficie è il quadrilatero piano di vertici

$(0,0,1)$, $(1,0,4)$, $(1,1,8)$, $(0,1,5)$

La sua area è

$$\iint_{\Omega} \sqrt{1+3^2+4^2} dx dy = \sqrt{26} \approx 5$$



ESEMPIO 1.2. Calcoliamo l'area della superficie

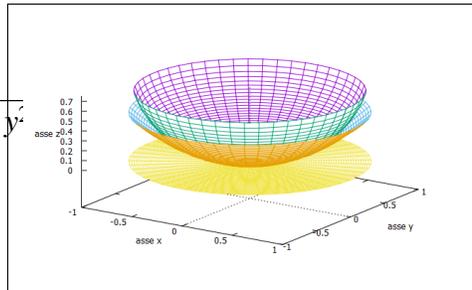
$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad \Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$f_x = x, f_y = y: \sqrt{1+f_x^2+f_y^2} = \sqrt{1+x^2+y^2}$$

$$Area = \iint_{\Omega} \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1+\rho^2} \rho d\rho =$$

$$= \pi \int_0^1 \sqrt{1+\rho^2} d(1+\rho^2) = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\pi \approx 1.21895 \pi$$



OSSERVAZIONE 1.3. L'area trovata è $\approx 1.21895 \pi$: l'area del cerchio piatto (sotto in giallo) è π l'area della semisfera è 2π .

Il valore trovato, intermedio tra i due è ragionevole, vedi Figura 1.2 .

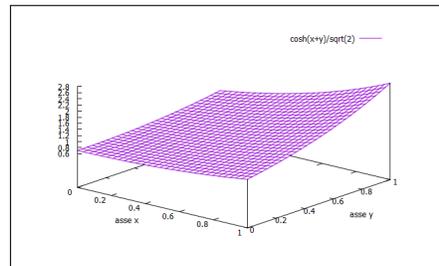
ESEMPIO 1.4. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cosh(x+y)$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

L'area della superficie è pertanto

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \sqrt{1+\sinh^2(x+y)} dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 \cosh(x+y) dy =$$

$$= \int_0^1 \{ \sinh(x+1) - \sinh(x) \} dx = \cosh(2) - 2\cosh(1) + 1$$



2. Area di una superficie parametrica

La superficie Σ sia rappresentata parametricamente

$$(82) \quad \begin{cases} x = \phi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \\ z = \chi(u,v) \end{cases} \quad (u,v) \in \Omega \quad \rightarrow \quad Area(\Sigma) = \iint_{\Omega} \sqrt{EG-F^2} du dv$$

avendo indicato con

$$\begin{cases} E = \chi_u^2 + \phi_u^2 + \psi_u^2 \\ G = \chi_v^2 + \phi_v^2 + \psi_v^2 \\ F = \chi_u \chi_v + \phi_u \phi_v + \psi_u \psi_v \end{cases}$$

La formula proposta può essere giustificata servendosi del significato geometrico del modulo del prodotto vettoriale:

$$\vec{X}_u du \wedge \vec{X}_v dv = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \phi_u & \psi_u & \chi_u \\ \phi_v & \psi_v & \chi_v \end{pmatrix} du dv \rightarrow \left| \vec{X}_u du \wedge \vec{X}_v dv \right| = \sqrt{EG - F^2} du dv$$

che rappresenta l'area di ogni mini parallelogramma di lati i vettori $\vec{X}_u du$, $\vec{X}_v dv$, tangente alla superficie e corrispondente al mini quadratino di estremi (u, v) e $(u + du, v + dv)$ del piano (u, v) , e che quindi, per integrazione su Ω , suggerisce la formula dell'area indicata all'inizio.

OSSERVAZIONE 2.1. *Ovviamente il caso delle superfici cartesiane rientra in quello delle superfici parametriche,*

$$z = f(x, y), (x, y) \in \Omega \rightarrow \begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = f(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in \Omega$$

La radice $\sqrt{EG - F^2}$ restituisce in tal caso la precedente $\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$

2.1. Esempio. L'area della sfera.

La sfera di raggio 1 si rappresenta parametricamente con

$$\begin{cases} x = \sin(u) \cos(v), \\ y = \sin(u) \sin(v), \\ z = \cos(u), \end{cases} \quad 0 \leq u \leq \pi, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

$$\begin{cases} E = \cos^2(u) \cos^2(v) + \sin^2(u) + \cos^2(u) \sin^2(v) & = 1 \\ G = \cos^2(v) \sin^2(u) + \sin^2(u) \sin^2(v) & = \sin^2(u) \\ F = 0 \end{cases}$$

$$EG - F^2 = \sin^2(u)$$

Tenuto conto che $0 \leq u \leq \pi$ riesce $\sqrt{EG - F^2} = \sin(u)$, segue

$$\text{Area} = \int_0^{2\pi} dv \int_0^\pi \sin(u) du = 4\pi$$

2.2. Le superfici di rotazione. Sia G il grafico di $f(x)$, $x \in [ab]$ e sia Σ la superficie ottenuta ruotando G intorno all'asse verticale.

Σ è rappresentata parametricamente da

$$x = \rho \cos(\theta), y = \rho \sin(\theta), z = f(\rho), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \rho \in [a, b]$$

Le espressioni E, G, F sono quindi

$$\begin{cases} E = x_\rho^2 + y_\rho^2 + z_\rho^2 & = 1 + f'^2(\rho) \\ G = x_\theta^2 + y_\theta^2 + z_\theta^2 & = \rho^2 \\ F = x_\rho x_\theta + y_\rho y_\theta + z_\rho z_\theta & = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \sqrt{EG - F^2} = \rho \sqrt{1 + f'^2(\rho)}$$

Da cui

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b \rho \sqrt{1 + f'^2(\rho)} d\rho = 2\pi \int_a^b \rho \sqrt{1 + f'^2(\rho)} d\rho$$

OSSERVAZIONE 2.2. L'espressione $\sqrt{1 + f'^2(\rho)} d\rho$ è un'approssimazione della lunghezza ds dell'arco del grafico di $f(x)$ per $x \in [\rho, \rho + d\rho]$.

Il prodotto $2\pi\rho \sqrt{1 + f'^2(\rho)} d\rho$ rappresenta l'area della superficie laterale di un cilindro di raggio ρ e altezza $\sqrt{1 + f'^2(\rho)} d\rho$.

L'espressione dell'area trovata per la superficie di rotazione si collega alla lettura di tale superficie come unione di cilindri di altezze e raggi diversi.

ESEMPIO 2.3. Sia $f(x) = mx$, $x \in [0, 1]$ la superficie di rotazione generata è un cono.

La sua area è $2\pi \int_0^1 \rho \sqrt{1 + m^2} d\rho = \pi \sqrt{1 + m^2}$.

3. Integrali superficiali

Definita l'area di una superficie Σ si definiscono gli integrali superficiali di una funzione reale di tre variabili reali $f(x, y, z)$ continua su di essa.

Il concetto, comune a tutti gli integrali è quello di limiti di somme

- decomposizione della superficie, $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots$,
- prodotti $f(P_i) \text{area}(\Sigma_i)$, $P_i \in \Sigma_i$,
- somme dei prodotti ottenuti e loro limite all'infinito della decomposizione

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \lim \sum_i f(P_i) \mathcal{A}(\Sigma_i)$$

L'integrale si calcola tramite la rappresentazione parametrica con la quale la superficie è stata assegnata e corrisponde al valore

$$\iint_{\Omega} f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \sqrt{EG - F^2} du dv$$

L'espressione $\sqrt{EG - F^2} dudv$ si dice in genere *elemento d'area*, essa infatti corrisponde alla notazione $d\sigma$ presente nella scrittura degli integrali estesi a superfici.

ESEMPIO 3.1. Sia Σ la superficie cartesiana grafico di

$$g(x, y) = x + 2y + 3, \quad (x, y) \in \Omega : \{0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$$

e sia $f(x, y, z) = x + y + z$.

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma &= \iint_{\Omega} \{x + y + (x + 2y + 3)\} \sqrt{1 + 2^2 + 3^2} dx dy = \\ &= \sqrt{14} \int_0^2 dx \int_0^3 (2x + 3y + 3) dy = 57 \end{aligned}$$

4. Elemento d'area

Gli integrali superficiali,

$$\iint_{\mathcal{S}} g(x, y, z) d\sigma$$

come gli integrali curvilinei, si basano su due elementi fondamentali

- la conoscenza di una rappresentazione parametrica della superficie

$$\begin{cases} x = \phi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \\ z = \chi(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in \Omega$$

- l'espressione dell'elemento d'area $d\sigma$ in termini di $dudv$
- ove necessario un vettore \mathbf{v} normale alla superficie.

Riassumiamo quanto sopra nel caso di tre tipi di superficie particolarmente importanti:

4.1. Superfici cartesiane. $z = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega$

$$d\sigma = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

da cui

$$\iint_{\mathcal{S}} g(x, y, z) d\sigma = \iint_{\Omega} g[x, y, f(x, y)] \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

Il gradiente di $f(x, y)$ produce un vettore normale

$$\mathbf{v} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \{f_x, f_y, -1\}$$

4.2. Superfici di rotazione. $z = f(x)$, $0 \leq a \leq x \leq b$

La rappresentazione parametrica è

$$x = u \cos(v), y = u \sin(v), z = f(u), \quad a \leq u \leq b, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

$$d\sigma = u \sqrt{1 + f'^2(u)} du dv$$

$$\iint_{\mathcal{S}} g(x, y, z) d\sigma = \int_0^{2\pi} dv \int_a^b g[u \cos(v), u \sin(v), f(u)] u \sqrt{1 + f'^2(u)} du$$

$$\mathbf{v} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(u)}} \{ \cos(v) f'(u), \sin(v) f'(u), -1 \}$$

4.3. Sfera. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

$$x = R \sin(v) \cos(u), y = R \sin(v) \sin(u), z = R \cos(v), \quad 0 \leq v \leq \pi, \quad 0 \leq u \leq 2\pi$$

$$d\sigma = R^2 \sin(v) du dv$$

$$\iint_{\mathcal{S}} g(x, y, z) d\sigma = R^2 \int_0^\pi \sin(v) dv \int_0^{2\pi} g[R \sin(v) \cos(u), R \sin(v) \sin(u), R \cos(v)] du$$

La nota proprietà del raggio ortogonale alla sfera produce il versore normale

$$\mathbf{v} = \frac{1}{R} \{x, y, z\}$$

5. Il teorema di Stokes nello spazio

Sia \mathcal{S} una superficie e sia $\partial\mathcal{S}$ la curva suo bordo e sia \mathbf{F} un campo vettoriale: esiste un legame importante tra

- il flusso $\iint_{\mathcal{S}} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{v} d\sigma$ traverso \mathcal{S} ,
- la circuitazione $\oint_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} ds$, o lavoro, prodotto da \mathbf{F} lungo $\partial\mathcal{S}$.

Il legame, detto Teorema di Stokes, è il seguente

TEOREMA 5.1. *Sia \mathbf{F} un campo vettoriale di classe $C^1(\mathbf{A})$, \mathbf{A} un dominio rettangolare aperto dello spazio \mathbb{R}^3 , sia \mathcal{S} una superficie regolare orientabile¹ contenuta in \mathbf{A} e sia $\partial\mathcal{S}$ il suo bordo:*

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} ds = \iint_{\mathcal{S}} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{v} d\sigma$$

Il legame tra il verso di percorrenza sul bordo $\partial\mathcal{S}$, verso che determina il segno del lavoro prodotto, e la direzione della normale su \mathcal{S} , direzione che determina il segno del flusso è analogo a quello visto nel piano: una persona che cammini sulla superficie, dritta come indica la normale \mathbf{v} deve percorrere il bordo vedendo in ogni momento la superficie alla sua sinistra.

¹esistono superfici non orientabili...si pensi al nastro di Moebius vedi il disegno di Escher

ESEMPIO 5.2. Sia \mathcal{S} la semisfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ contenuta nel semispazio $z \geq 0$: il bordo $\partial\mathcal{S}$ è la circonferenza del piano $z = 0$ di centro l'origine e raggio $r = 1$.

Se la normale \mathbf{v} alla semisfera punta verso l'origine allora il verso di percorrenza su $\partial\mathcal{S}$ deve essere quello orario.

Se la normale \mathbf{v} punta nel verso opposto, cioè punta verso l'esterno della sfera allora la circonferenza bordo deve essere percorsa in verso antiorario.

5.1. Campi irrotazionali. Un campo \mathbf{F} che abbia rotore nullo si dice irrotazionale. Una conseguenza abbastanza diretta del teorema di Stokes è la seguente

PROPOSIZIONE 5.3. Ogni campo vettoriale \mathbf{F} di classe $C^1(A)$, con A dominio rettangolare aperto dello spazio \mathbb{R}^3 , irrotazionale, ammette potenziale, cioè è un campo gradiente.

PROPOSIZIONE 5.4. Il lavoro di un campo vettoriale \mathbf{F} di classe $C^1(A)$, con A dominio rettangolare aperto dello spazio \mathbb{R}^3 , irrotazionale, lungo una curva \mathcal{C}

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = U(Q) - U(P)$$

coincide con la differenza di potenziale agli estremi P a Q della curva.

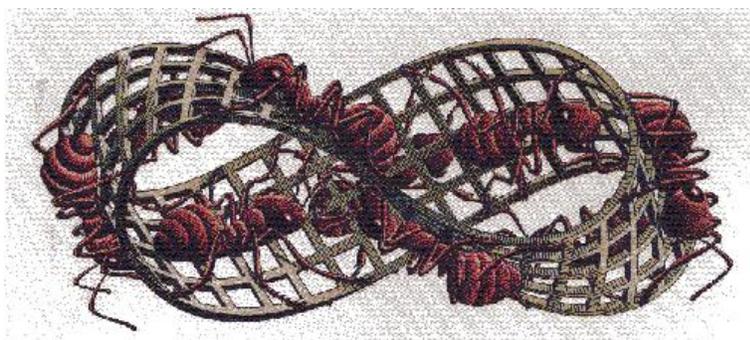


FIGURA 2. Il famoso nastro di Möbius secondo Escher

OSSERVAZIONE 5.5. Il precedente teorema è in un certo senso sorprendente: per calcolare la circuitazione di un vettore \mathbf{F} lungo una curva C si può calcolare il flusso del rotore attraverso cosa?

... attraverso una qualsiasi superficie Σ di cui la curva C sia bordo.

Probabilmente di tali superfici ce ne sono più d'una....

ESEMPIO 5.6. Sia \mathcal{T} la superficie triangolare determinata dai punti

$$A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0), C = (0, 0, 1)$$

di rappresentazione parametrica

$$x = (1 - v)(1 - u), \quad y = (1 - v)u, \quad z = v, \quad 0 \leq u \leq 1, \quad 0 \leq v \leq 1$$

Il versore normale è $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{3}} \{1, 1, 1\}$ e l'elemento d'area è $d\sigma = \sqrt{3}(1-v) du dv$.

Il bordo è la poligonale $AB BC CA$ con

$$\begin{cases} AB: & x = 1-t & y = t & z = 0 \\ BC: & x = 0 & y = 1-t & z = t \\ CA: & x = t & y = 0 & z = 1-t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

Sia $\mathbf{F} = \{y, 3x, x+y+z\} \rightarrow \text{rot}(\mathbf{F}) = \{1, -1, 2\}$ si ha

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{v} d\sigma &= \iint_{[0,1] \times [0,1]} \{1, -1, 2\} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \{1, 1, 1\} \sqrt{3}(1-v) du dv = \\ &= \iint_{[0,1] \times [0,1]} 2(1-v) du dv = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \oint_{\partial \mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} ds &= \int_{AB} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} ds + \int_{BC} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} ds + \int_{CA} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = \\ &= \int_0^1 \{t, 3(1-t), 1\} \cdot \{-1, 1, 0\} dt + \int_0^1 \{1-t, 0, 2(1-t)\} \cdot \{0, -1, 1\} dt + \\ &\quad + \int_0^1 \{0, 3t, 1\} \cdot \{1, 0, -1\} dt = \int_0^1 (-6t + 4) dt = 1 \end{aligned}$$

I due valori, quello del flusso del rotore e quello della circuitazione del campo sono venuti uguali, come il teorema di Stokes dichiarava.

Osserviamo inoltre che la poligonale $AB BC CA$ è bordo anche della superficie formata dai tre triangoli appartenenti ai piani coordinati

$$\mathcal{S} = \triangle_{OAB} \cup \triangle_{OBC} \cup \triangle_{OCA}$$

con normali ciascuno

$$\mathbf{v}_{\triangle_{OAB}} = \{0, 0, -1\}, \quad \mathbf{v}_{\triangle_{OBC}} = \{-1, 0, 0\}, \quad \mathbf{v}_{\triangle_{OCA}} = \{0, -1, 0\}$$

L'orientamento positivo di percorrenza in questo caso risulta l'opposto. Calcoliamo

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{S}} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{v}_{\mathcal{S}} d\sigma &= \iint_{\triangle_{OAB}} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{v}_{\triangle_{OAB}} d\sigma + \\ &+ \iint_{\triangle_{OBC}} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{v}_{\triangle_{OBC}} d\sigma + \iint_{\triangle_{OCA}} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{v}_{\triangle_{OCA}} d\sigma \end{aligned}$$

Tenuto conto che

$$\begin{cases} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{v}_{\triangle_{OAB}} = \{1, -1, 2\} \cdot \{0, 0, -1\} = -2 \\ \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{v}_{\triangle_{OBC}} = \{1, -1, 2\} \cdot \{-1, 0, 0\} = -1 \\ \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{v}_{\triangle_{OCA}} = \{1, -1, 2\} \cdot \{0, -1, 0\} = 1 \end{cases}$$

Da cui

$$\iint_{\mathcal{S}} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{v}_{\mathcal{S}} d\sigma = -2 \times \frac{1}{2} - 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = -1$$

Valore ancora coincidente con la circuitazione lungo il bordo, questa volta percorso nell'altro verso.

6. Il Teorema della divergenza nello spazio

Sia \mathcal{S} una superficie che racchiuda completamente un dominio Ω dello spazio, ad esempio \mathcal{S} sia una superficie sferica o la superficie di un ellissoide.

\mathcal{S} , frontiera di Ω si indica anche con $\mathcal{S} = \partial \otimes$.

Assegnato un campo $\mathbf{F} = \{A(x, y, z), B(x, y, z), C(x, y, z)\}$ e detto \mathbf{v} il versore normale ad \mathcal{S} diretto nel verso uscente da Ω si considera l'integrale superficiale

$$\iint_{\partial \otimes} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} d\sigma$$

che prende il nome di flusso di \mathbf{F} uscente da Ω .

Indicata con $\operatorname{div} \mathbf{F} = A'_x(x, y, z) + B'_y(x, y, z) + C'_z(x, y, z)$ vale la seguente relazione

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz = \iint_{\partial \otimes} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} d\sigma$$

che prende il nome di *teorema della divergenza*.

Si tratta di una formula del tutto analoga a quella osservata nel caso piano. Le differenze sono

- in luogo di un integrale doppio si ha un integrale triplo,
- in luogo di un integrale curvilineo si ha un integrale superficiale.

ESEMPIO 6.1. Sia \mathcal{S} la superficie della palla $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ e sia $F = \{x, y, z\}$. Il versore normale uscente da Ω è $\mathbf{v} = \{x, y, z\}$.

Riesce $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = x^2 + y^2 + z^2 = 1$; pertanto il flusso di F uscente da Ω è, per definizione,

$$\iint_{\partial \Omega} F \cdot \mathbf{v} d\sigma = \iint_{\partial \Omega} d\sigma = 4\pi$$

Tenuto conto che $\operatorname{div} F = 1 + 1 + 1 = 3$ si ha

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dx dy dz = \iiint_{\Omega} 3 dx dy dz = 3 \frac{4}{3} \pi = 4\pi$$

da cui l'uguaglianza prevista dal teorema della divergenza.

Il risultato che appare scontato nell'esempio diventa più interessante nel caso di un campo $F = \{ax, by, cz\}$ diretto in modo non necessariamente radiale: in questo caso $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = ax^2 + by^2 + cz^2 \neq 1$ e il valore di

$$\iint_{\partial \Omega} F \cdot \mathbf{v} d\sigma = \iint_{\partial \Omega} (ax^2 + by^2 + cz^2) d\sigma$$

non è ovvio. Resta invece ancora facile il calcolo dell'integrale triplo

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F dx dy dz = \iiint_{\Omega} (a + b + c) dx dy dz = (a + b + c) \frac{4}{3} \pi$$

e quindi, in base al teorema della divergenza si ha di conseguenza anche il valore del flusso uscente.

7. Riassumendo

Richiamiamo alcuni termini di uso comune nell'integrazione curvilinea e/o superficiale

- **Lavoro di una campo:** $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \tau ds$
– deve essere dato un campo vettoriale, $F = \{A(x, y, z), B(x, y, z), C(x, y, z)\}$

- una curva $\mathcal{C} : \{x(t), y(t), z(t)\}, a \leq t \leq b \rightarrow \tau = \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \{x'(t), y'(t), z'(t)\}$
- deve essere assegnato l'orientamento, se taciuto si sottintende quello delle t crescenti

L'algoritmo di calcolo è $\int_a^b \{A[x(t), \dots]x'(t) + B[x(t), \dots]y'(t) + C[x(t), \dots]z'(t)\} dt$.

Il lavoro è anche indicato con la notazione detta delle forme differenziali

$$\int_{\mathcal{C}} (Adx + Bdy + Cdz)$$

particolarmente utile quando la curva è una poligonale coordinata.

Se la curva \mathcal{C} è chiusa il lavoro lungo essa viene anche denominato come circuitazione di \mathbf{F} lungo \mathcal{C} , ed è indicato con la notazione

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \tau ds$$

• **Flusso di un campo:**

- per i campi piani, dimensione 2 si parla del flusso attraverso una curva \mathcal{C} del piano

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} ds$$

- per i campi di dimensione 3 si parla del flusso attraverso una superficie \mathcal{S} dello spazio

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} d\sigma$$

In entrambi i casi il flusso coincide con l'integrale doppio o triplo dello scalare $\text{div} \mathbf{F}$ esteso al dominio racchiuso da \mathcal{C} o da \mathcal{S} .

Parte 5

Esercizi

Esercizi sui vettori

Esercizio 1.1. Siano $P = (2, 1, 0)$ e $Q = (1, 3, -2)$ determinare:

- il vettore $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$
- il modulo $\|\mathbf{u}\|$
- un vettore parallelo ad \mathbf{u} e di modulo 1.

Soluzione:

Il vettore $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$ è $(1 - 2, 3 - 1, -2 - 0) = (-1, 2, -2)$

Riesce pertanto

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

I vettori $\lambda \mathbf{u}$ sono, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, paralleli a \mathbf{u} e hanno modulo $|\lambda| \|\mathbf{u}\|$: pertanto i vettori paralleli a \mathbf{u} e di modulo 1 sono

$$\frac{1}{3}\mathbf{u}, \quad -\frac{1}{3}\mathbf{u}$$

Esercizio 1.2. Siano $\mathbf{a} = (2, 3, 1)$, $\mathbf{b} = (1, -2, 0)$, $\mathbf{c} = (5, 2, -1)$: determinare

- il vettore $\mathbf{d} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c}$
- il modulo $\|\mathbf{d}\|$

Soluzione:

$$\begin{cases} \mathbf{a} = (2, 3, 1) & \rightarrow 2\mathbf{a} = (4, 6, 2) \\ \mathbf{b} = (1, -2, 0) & \rightarrow 3\mathbf{b} = (3, -6, 0) \\ \mathbf{c} = (5, 2, -1) & \rightarrow -\mathbf{c} = (-5, -2, 1) \end{cases} \rightarrow \mathbf{d} = (2, -2, 3)$$

Da cui

$$\|\mathbf{d}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{17}$$

Si osservi che il modulo di \mathbf{d} non è la somma $2\|\mathbf{a}\| + 3\|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{c}\|$, anzi è molto minore:

$$\sqrt{17} < 2\sqrt{14} + 3\sqrt{5} + \sqrt{30}$$

Esercizio 1.3. Determinare per quali λ i due vettori $\mathbf{a} = (2, \lambda, 1)$ e $\mathbf{b} = (4, -2, -2)$ sono ortogonali.

Soluzione:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 2 \times 4 + \lambda \times (-2) + 1 \times (-2) = 6 - 2\lambda$$

L'ortogonalità corrisponde pertanto a

$$6 - 2\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 3$$

Esercizio 1.4. Siano $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ e $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$: determinare

- il vettore $\mathbf{d} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$
- un vettore ortogonale a \mathbf{b}
- un vettore ortogonale a \mathbf{d}

Soluzione:

$$\begin{cases} \mathbf{a} = (2, 3, 1) & 2\mathbf{a} = (4, 6, 2) \\ \mathbf{b} = (1, -2, 0) & 3\mathbf{b} = (3, -6, 0) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \mathbf{d} = (7, 0, 2)$$

Un vettore $\mathbf{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$ ortogonale a \mathbf{b} deve verificare

$$(\mathbf{n}, \mathbf{b}) = \alpha - 2\beta = 0$$

Sono pertanto ortogonali a \mathbf{b} tutti i vettori $(2\beta, \beta, \gamma)$ qualunque siano $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$: ad esempio il vettore $(0, 0, 1)$ è ortogonale a \mathbf{b} .

Con lo stesso ragionamento si trovano vettori \mathbf{m} ortogonali a \mathbf{d} : ad esempio il vettore $(0, 1, 0)$ è ortogonale a \mathbf{d} .

Esercizio 1.5. Sia $\mathbf{u}(t) = 2t\mathbf{i} + (1 + t^2)\mathbf{j} + t(t^2 - 1)\mathbf{k} \quad \forall t \in \mathbb{R}$: determinare

- i vettori $\mathbf{u}(-1), \mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1)$
- il vettore $\mathbf{v}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(t+h) - \mathbf{u}(t)}{h}$
- i vettori $\mathbf{v}(-1), \mathbf{v}(0), \mathbf{v}(1)$

Soluzione:

$$\mathbf{u}(t) = 2t\mathbf{i} + (1 + t^2)\mathbf{j} + t(t^2 - 1)\mathbf{k} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} u(-1) = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \\ u(0) = \mathbf{j} \\ u(1) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \end{cases}$$

Il limite proposto conduce semplicemente a considerare le derivate

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(t+h) - \mathbf{u}(t)}{h} = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (3t^2 - 1)\mathbf{k}$$

da cui segue

$$\mathbf{v}(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (3t^2 - 1)\mathbf{k} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{v}(-1) = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \\ \mathbf{v}(0) = 2\mathbf{i} - \mathbf{k} \\ \mathbf{v}(1) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \end{cases}$$

Esercizio 1.6. Siano $\mathbf{a} = (3, 1, -1)$ e $\mathbf{b} = (1, 2, -3)$: determinare

- i prodotti vettoriali $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ e $\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$
- l'area del parallelogramma determinato da \mathbf{a} e \mathbf{b} .

Soluzione:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = +\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

L'area \mathcal{A} del parallelogramma formato dai due vettori è il modulo di $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$:

$$\mathcal{A} = \|(-1, 8, 5)\| = \sqrt{1^2 + 8^2 + 5^2} = \sqrt{90}$$

Esercizio 1.7. Costruire le matrici A e B i cui termini sono rispettivamente

$$a_{i,j} = i + j, \quad b_{i,j} = 2i - 3j, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2$$

Soluzione:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 1.8. Dette A e B le matrici del precedente esercizio costruire le matrici

$$2A - 3B, \quad A^T, \quad A \cdot B, \quad B \cdot A$$

Soluzione:

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad 3B = \begin{pmatrix} -3 & -12 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow 2A + 3B = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{matrice simmetrica}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \times (-1) + 3 \times 1 & 2 \times (-4) + 3 \times (-2) \\ 3 \times (-1) + 4 \times 1 & 3 \times (-4) + 4 \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -14 \\ 1 & -20 \end{pmatrix}$$

$$B.A = \begin{pmatrix} (-1) \times 2 + (-4) \times 3 & (-1) \times 3 + (-4) \times 4 \\ 1 \times 2 + (-2) \times 3 & 1 \times 3 + (-2) \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -19 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$$

Come si vede il prodotto $A.B \neq B.A$.

Esercizio 1.9. Assegnato il vettore $\mathbf{n} = (1, -1, 2)$ e il punto $P_0 = (1, 2, 3)$ determinare il piano passante per P_0 e ortogonale a \mathbf{n} . Determinare inoltre tre punti, diversi, di tale piano.

Soluzione:

Dato il punto $P_0 = (1, 2, 3)$ e il vettore $\mathbf{n} = (1, -1, 2)$ l'equazione cartesiana del piano è la seguente

$$1(x-1) + 2(y+1) + 3(z-2) = 0 \quad \rightarrow \quad x + 2y + 3z - 5 = 0$$

Appartengono al piano i tre punti

$$A = (5, 0, 0), \quad B = (0, -5, 5), \quad C = (-5, 5, 0)$$

le cui coordinate soddisfano l'equazione del piano.

Esercizio 1.10. Determinare l'equazione della sfera di centro $C = (3, 4, 5)$ e raggio $\rho = 3$. Determinare tre punti, diversi, su tale superficie.

Soluzione:

L'equazione cartesiana della sfera di centro $C = (3, 4, 5)$ e raggio $\rho = 3$ è

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 3^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 10z + 41 = 0$$

Appartengono alla sfera i tre punti

$$A = (6, 4, 5), \quad B = (3, 7, 5), \quad C = (3, 4, 8)$$

le cui coordinate soddisfano l'equazione.

La verifica è più facile servendosi della prima forma $(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 = 3^2$.

Esercizio 1.11. Assegnato il piano

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$$

determinare la distanza del punto $P = (-1, -1, -1)$ da tale piano

Soluzione:

La formula della distanza punto-piano produce l'espressione

$$\frac{\left| -\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2}} = \frac{107}{\sqrt{769}}$$

Esercizio 1.12. *Verificare che i tre vettori*

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (1, -1, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$$

costituiscono una base di \mathbb{R}^3 . Dette (a, b, c) le coordinate di un vettore \mathbf{u} di \mathbb{R}^3 nell'ordinaria base $\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$ determinare le coordinate dello stesso vettore nella base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

Soluzione:

Per riconoscere che i tre vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (1, -1, 0), \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$ formino una base di \mathbb{R}^3 occorre riconoscere che

- sono linearmente indipendenti:

$$a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 = (a+b, a-b, c) = (0, 0, 0) \rightarrow \begin{cases} a+b = 0 \\ a-b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \rightarrow a=b=c=0$$

- ogni vettore (α, β, γ) si può rappresentare con una combinazione lineare di quei tre vettori.

$$a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 = (a+b, a-b, c) = (\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow \begin{cases} a+b = \alpha \\ a-b = \beta \\ c = \gamma \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{2}(\alpha + \beta), \quad b = \frac{1}{2}(\alpha - \beta), \quad c = \gamma$$

Riconosciuto che i tre vettori $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (1, -1, 0), \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$ formano una base di \mathbb{R}^3 si ha, in particolare

$$(1, 0, 0) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2), \quad (0, 1, 0) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), \quad \text{quad} (0, 0, 1) = \mathbf{v}_3$$

Pertanto se

$$\begin{aligned} u &= a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = \frac{a}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \frac{b}{2}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + c\mathbf{v}_3 = \\ &= \frac{1}{2}(a+b)\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}(a-b)\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

Se le coordinate del vettore u nella base canonica erano (a, b, c) allora le coordinate nella base formata dai tre vettori formata dai tre $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono

$$\left(\frac{1}{2}(a+b), \frac{1}{2}(a-b), c \right)$$

Esercizio 1.13. *Sia A la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

- determinare i due vettori colonna di A
- determinare i trasformati $A.(1, 0)$ e $A.(0, 1)$
- determinare i trasformati $A.(x, y)$ al variare di $x, y \in \mathbb{R}$.

Soluzione:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} \right)$$

$$A \cdot (1, 0) = 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} = (2, 3)$$

$$A \cdot (0, 1) = 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} = (-4, -6)$$

$$A \cdot (x, y) = x \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} = (2x - 4y, 3x - 6y)$$

Esercizio 1.14. Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

determinare $\text{Ker}(A)$ cioè determinare la totalità dei vettori $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$A \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Soluzione:

Sia $\mathbf{u} = (x, y) \in \text{Ker}(A)$: tenuto presente che

$$A(x, y) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ 3x - 6y = 0 \end{cases}$$

Sono soluzioni del sistema tutti i numeri

$$x = 2t, \quad y = t \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Il $\text{Ker}(A)$ è pertanto formato da tutti i vettori $t(2, 1)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.

Esercizi sulle matrici

Esercizio 2.1. Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

e siano $u = (1, 0)$ e $v = (1, 1)$ due vettori assegnati:

- calcolare l'area del parallelogramma determinato dai due vettori u e v ,
- calcolare i due vettori Au e Av , e calcolare l'area del parallelogramma da essi determinato,
- calcolare il determinante di A .

Soluzione:

Il parallelogramma formato da u e da v , base 1 e altezza 1, ha ovviamente area $\mathcal{A}_1 = 1$.
I trasformati sono

$$Au = (1, 1), \quad Av = (3, -3)$$

si tratta di due vettori ortogonali fra loro, quindi il parallelogramma che essi determinano è un rettangolo di lati

$$\|Au\| = \sqrt{2}, \quad \|Av\| = 3\sqrt{2}$$

e quindi di area $\mathcal{A}_2 = 6$.

Si ha $\det(A) = -6$: non è un caso che

$$\mathcal{A}_2 = |\det(A)| \mathcal{A}_1$$

Esercizio 2.2. Sia A una matrice 3×3 assegnata e sia A^T la sua trasposta: riconoscere che $C = A + A^T$ è una matrice simmetrica.

Soluzione:

Siano, ad esempio $a_{2,3}$ e $a_{3,2}$ gli elementi di A rispettivamente nella seconda riga e terza colonna e nella terza riga e seconda colonna.

Viceversa gli stessi numeri $a_{3,2}$ e $a_{2,3}$ sono gli elementi di A^T rispettivamente nella seconda riga e terza colonna e nella terza riga e seconda colonna.

Pertanto detti $c_{i,j}$ gli elementi di $C = A + A^T$ riesce

$$c_{2,3} = a_{2,3} + a_{3,2}, \quad c_{3,2} = a_{3,2} + a_{2,3}$$

da cui si riconosce la simmetria

$$c_{2,3} = c_{3,2}$$

Ragionamento analogo per ogni altro elemento $c_{i,j}$.

Esercizio 2.3. Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

e siano $u = (1, 2)$ e $v = (3, -1)$ due vettori assegnati:

- calcolare il prodotto scalare (Au, v)
- calcolare il prodotto scalare $(u, A^T v)$
- calcolare la differenza $(Au, v) - (u, A^T v)$

Ovviamente A^T è la matrice trasposta di A .

Soluzione:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

e pertanto

$$\begin{cases} Au = (11, 11) & \rightarrow (Au, v) = (11, 11) \cdot (3, -1) = 22 \\ A^T v = (0, 11) & \rightarrow (u, A^T v) = (1, 2) \cdot (0, 11) = 22 \end{cases}$$

Esercizio 2.4. Assegnati i due vettori di \mathbb{R}^3 $u = (1, 2, 3)$ e $v = (4, 5, 6)$

- determinare il prodotto vettoriale $c = u \wedge v$
- scrivere l'equazione del piano p per $P_0 = (0, 0, 0)$ ortogonale a c ,
- scrivere le equazioni parametriche della retta r per P_0 parallela a u .
- verificare che r è contenuta nel piano p

Soluzione:

$$c = u \wedge v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -3i + 6j - 3k = (-3, 6, -3)$$

Il piano per $P_0 = (0, 0, 0)$ ha pertanto equazione

$$-3x + 6y - 3z = 0 \rightarrow x - 2y + z = 0$$

Le equazioni parametriche di r sono

$$\begin{cases} x = -3t \\ y = 6t \\ z = -3t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Sostituendo nell'equazione del piano le espressioni parametriche indicate

$$(-3t) - 2(6t) + (-3t) = 0$$

si riconosce che tutti i punti della retta hanno coordinate che soddisfano l'equazione del piano, ovvero che tutta la retta è contenuta nel piano.

OSSERVAZIONE 2.1. *Tenuto conto che il punto P_0 appartiene al piano e alla retta r , per concludere che la retta giacesse interamente nel piano sarebbe bastato trovare un altro punto della retta che appartenesse anch'egli al piano.*

Esercizio 2.5. *Siano*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

- calcolare le matrici prodotto AB e AC
- calcolare la matrice prodotto AD

Soluzione:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad A \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad A \cdot D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alcune sorprese:

- $A \cdot B = A \cdot C$ eppure $A \neq 0$, $B \neq C$, quindi per il prodotto di matrici non vale in generale la semplificazione usuale

$$\rho \neq 0, \rho a = \rho b \rightarrow a = b$$

- $A \neq 0$, $D \neq 0$ eppure $A \cdot D = 0$, quindi per il prodotto di matrici non vale in generale la conclusione usuale

$$ab = 0 \rightarrow a = 0 \text{ oppure } b = 0$$

Certo la matrice A qualche difetto ce l'ha: il determinante nullo....

Esercizio 2.6. *Siano*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{pmatrix},$$

Calcolare

- $\det(A)$
- $\det(B)$
- $\det(AB)$

Soluzione:

$$\det(A) = 1, \quad \det(B) = -23, \quad \det(A \cdot B) = -23$$

... non è un caso: è il teorema di Binet:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Esercizio 2.7. *Siano*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

Calcolare

- le matrici inverse A^{-1} e B^{-1}
- la matrice prodotto $C = AB$
- la matrice prodotto $D = B^{-1}A^{-1}$
- le matrici prodotto CD , DC .

Soluzione:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-7} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 18 & 31 \end{pmatrix} \quad D = B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{31}{7} & \frac{9}{7} \\ \frac{18}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2.8. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 37 & 13 \\ 42 & 53 \end{pmatrix}$$

calcolare il determinante della matrice A^{-1} .

Soluzione:

Si ha

$$\det(A) = 1415 \neq 0$$

Quindi esiste la matrice inversa A^{-1} e, per il teorema di Binet

$$1 = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) \rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{1415}$$

Esercizio 2.9. *Calcolare il volume del parallelepipedo che ha un vertice in $O = (0,0,0)$ e gli altri tre vertici ad esso adiacenti nei punti*

$$A = (2,0,-1), \quad B = (1,3,1), \quad C = (1,1,2)$$

Calcolare inoltre le aree delle tre facce contenenti rispettivamente i punti

$$\{O, A, B\}, \quad \{O, A, C\}, \quad \{O, B, C\}$$

Soluzione:

Il volume del parallelepipedo determinato da tre vettori dello spazio corrisponde al significato geometrico del determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12$$

Le aree delle tre facce corrispondono ai moduli dei prodotti vettoriali

$$\begin{aligned} & |\vec{OA} \wedge \vec{OB}|, \quad |\vec{OA} \wedge \vec{OC}|, \quad |\vec{OB} \wedge \vec{OC}| \\ \begin{cases} \vec{OA} \wedge \vec{OB} = (3, -3, 6) & \rightarrow \sqrt{54} \\ \vec{OA} \wedge \vec{OC} = (1, -5, 2) & \rightarrow \sqrt{30} \\ \vec{OB} \wedge \vec{OC} = (5, -1, -2) & \rightarrow \sqrt{30} \end{cases} \end{aligned}$$

Esercizio 2.10. *Determinare i coefficienti a, b, c, d tali che il piano $ax + by + cz + d = 0$ passi per i punti $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 1, 2)$, $C = (1, 2, 3)$.*

Soluzione:

Le coordinate dei tre punti assegnati devono soddisfare l'equazione del piano: da questo discende il sistema lineare di tre equazioni nelle quattro incognite a, b, c, d :

$$\begin{cases} 0a + 0b + 0c + d = 0 \\ 0a + 1b + 2c + d = 0 \\ 1a + 2b + 3c + d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ b + 2c = 0 \\ a + 2b + 3c = 0 \end{cases}$$

Il sistema non determina i quattro numeri, i quali sono ovviamente determinati a meno di un fattore di proporzionalità $\frac{1}{2}$: una quaterna soluzione è ad esempio

$$a = -1, \quad b = 2, \quad c = -1, \quad d = 0$$

Il piano è pertanto, cambiando tutti i segni,

$$x - 2y + z = 0$$

Esercizio 2.11. *Siano r_1 ed r_2 le rette di equazioni parametriche rispettivamente*

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -t \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x = -\frac{1}{2}s \\ y = 2s \\ z = -1 + s \end{cases} \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$$

verificare che sono incidenti e determinare le coordinate del loro punto di intersezione.

Soluzione:

Dire che le due rette sono incidenti vuol dire che hanno un punto in comune: cioè esiste un t e un s tali che

$$\begin{cases} 1+2t = -\frac{1}{2}s \\ 3-t = 2s \\ -t = -1+s \end{cases} \rightarrow t = -1, \quad s = 2$$

Il punto comune alle due rette è $(-1, 4, 1)$.

Esercizio 2.12. Sia A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -14 \end{pmatrix}$$

provare che per ogni vettore $b \in \mathbb{R}^3$ esiste ed è unico $u \in \mathbb{R}^3$ tale che $Au = b$.

Soluzione:

L'esercizio equivale a riconoscere che il sistema lineare di tre equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = b_1 \\ 3x - y + 5z = b_2 \\ 4x + y - 14z = b_3 \end{cases}$$

ha soluzione qualunque siano i termini noti (b_1, b_2, b_3) .

Il teorema di Cramer stabilisce che tale risolubilità è garantita se il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da zero.

Questo effettivamente accade

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -14 \end{vmatrix} = 112 \neq 0$$

Esercizio 2.13. Determinare con le formule di Cramer il valore della seconda incognita, y nel sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ x + 4y + 9z = 10 \\ x + 8y + 27z = 10 \end{cases}$$

Soluzione:

Dette A_1, A_2, A_3 le colonne della matrice A dei coefficienti e B la colonna dei termini noti le formule di Cramer producono

$$y = \frac{\det(\{A_1, B, A_3\})}{\det(\{A_1, A_2, A_3\})} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 1 & 10 & 9 \\ 1 & 10 & 27 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix}} = \frac{10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 27 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix}} = 0$$

avendo osservato che il determinante a numeratore è sicuramente nullo per via delle due colonne uguali.

Esercizio 2.14. Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- determinare gli autovalori di A ,
- determinare i corrispondenti autovettori.

Soluzione:

L'equazione caratteristica determina gli autovalori:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

L'autovettore relativo all'autovalore $\lambda_1 = -3$ è qualunque soluzione del sistema

$$\begin{cases} 2x + 5y = -3x \\ x - 2y = -3y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x + 5y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \rightarrow t(1, -1) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

L'autovettore relativo all'autovalore $\lambda_2 = 3$ è qualunque soluzione del sistema

$$\begin{cases} 2x + 5y = 3x \\ x - 2y = 3y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + 5y = 0 \\ x - 5y = 0 \end{cases} \rightarrow t(5, 1) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

I due autovettori $(1, -1)$, $(5, 1)$ sono linearmente indipendenti, quindi la matrice A è diagonalizzabile.

Esercizio 2.15. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare

- gli autovalori di A ,
- i corrispondenti autovettori,
- riconoscere che gli autovettori formano una base di \mathbb{R}^3 .

Soluzione:

Gli autovalori di A sono le radici dell'equazione caratteristica

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando il determinante con la regola di Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1-\lambda \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda)^2 + 2(1-\lambda) = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 3 \end{cases}$$

Gli autovettori corrispondenti sono le soluzioni dei seguenti sistemi

$$\begin{cases} 4x+0y+1z = x \\ -2x+1y+0z = y \\ -2x+0y+1z = z \end{cases} \quad \begin{cases} 4x+0y+1z = 2x \\ -2x+1y+0z = 2y \\ -2x+0y+1z = 2z \end{cases} \quad \begin{cases} 4x+0y+1z = 3x \\ -2x+1y+0z = 3y \\ -2x+0y+1z = 3z \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} 3x+z = 0 \\ -2x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+z = 0 \\ -2x-y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+z = 0 \\ -2x-2y = 0 \end{cases}$$

Gli autovettori, cioè le soluzioni dei tre sistemi sono rispettivamente

$$t(0, 1, 0), \quad t(1, -2, -2), \quad t(1, -1, -1) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

I vettori $(0, 1, 0)$, $(1, -2, -2)$, $(1, -1, -1)$ sono linearmente indipendenti: basta infatti osservare che

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

per concludere, in base alle formule di Cramer che l'unica combinazione lineare che dia il vettore nullo è quella a coefficienti tutti nulli.

Esercizi su insiemi del piano

Esercizio 3.1. Sia E l'insieme dei punti (x,y) che soddisfano le seguenti disuguaglianze

$$x+y \geq 0, \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

- esaminare se E è limitato,
- indicare la frontiera di E ,
- esaminare se E è convesso,
- determinare l'area di E .

Soluzione:

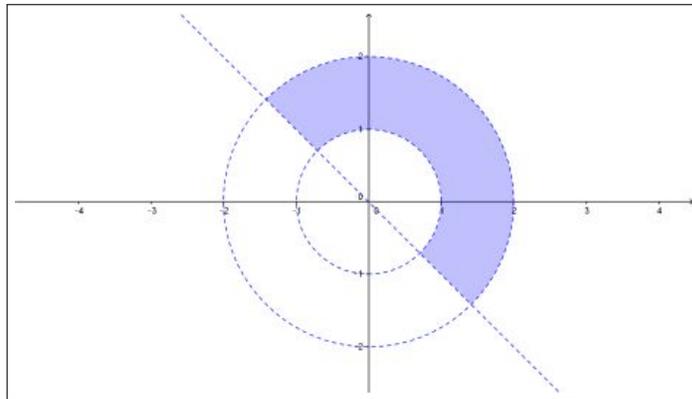


FIGURA 1. $x+y \geq 0, \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$

L'insieme E è limitato: l'ultima delle disuguaglianze che lo determinano $x^2 + y^2 \leq 4$ significa infatti che tutti i punti di E distano dall'origine non più di $\sqrt{4}$.

La frontiera di E è formata dalle due semicirconferenze e dai due segmenti ad esse collegati.

Un insieme è convesso se contiene tutti i segmenti di cui contiene gli estremi: la figura mostra chiaramente che E non è convesso, come si riconosce prendendo, ad esempio due punti appartenenti alla semicirconferenza più piccola e tracciando il segmento da essi determinato.

L'area di E si ricava dall'area del cerchio, del semicerchio, delle corone circolari...

$$Area(E) = \frac{1}{2} \pi (4 - 1) = \frac{3\pi}{2}$$

Esercizio 3.2. Sia $\{(x_n, y_n)\}$ la successione

$$x_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}, \quad y_n = \frac{n^3 + n^2}{3 + n^3}, \quad n = 1, 2, \dots$$

- esaminare se la successione $\{(x_n, y_n)\}$ è limitata,
- trovare due semipiani che contengano tutti i punti della successione,
- determinare il punto $Q = (a, b)$ limite della successione.

Soluzione:

Tenuto presente che

$$|x_n| = \left| \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right| \leq 1, \quad |y_n| = \left| \frac{n^3 + n^2}{3 + n^3} \right| \leq \frac{2n^3}{n^3} = 2$$

si riconosce che i punti della successione distano dall'origine meno di $1 + 2 = 3$, e costituiscono quindi un insieme limitato.

È evidente che

$$x_n \geq 0, \quad y_n \geq 0$$

quindi i punti della successione appartengono al semipiano $x \geq 0$ e al semipiano $y \geq 0$.

Tenuto conto che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^2}{3 + n^3} = 1$$

si riconosce che il punto $Q = (1, 1)$ è il limite della successione.

Esercizio 3.3. Sia $f(x, y) = \log(x^2 - y^2)$

- determinare l'insieme E di definizione,
- esaminare se E è limitato,
- determinare un P_0 interno ad E e un intorno circolare di P_0 contenuto in E ,
- determinare i punti (x, y) nei quali riesce $f(x, y) = 0$

Soluzione:

La funzione *logaritmo* è definita sui numeri positivi quindi l'insieme di definizione della funzione $f(x, y) = \log(x^2 - y^2)$ è $E : x^2 - y^2 > 0$.

Tenuto conto che

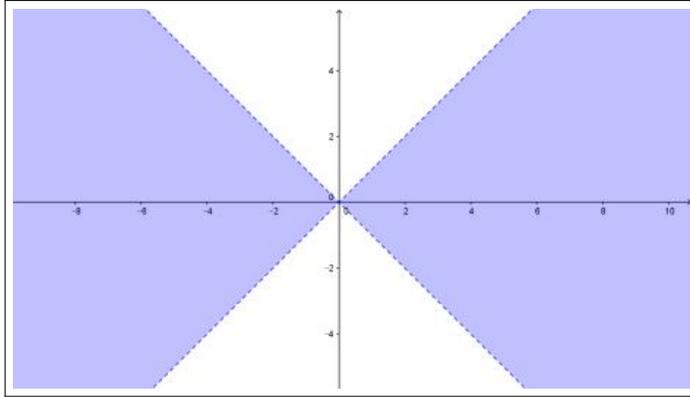
$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

l'insieme di definizione è di conseguenza l'unione delle soluzioni dei due sistemi

$$\begin{cases} x - y > 0 \\ x + y > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y < 0 \\ x + y < 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del primo sono l'angolo intersezione dei due semipiani $x - y > 0$, $x + y > 0$.

Le soluzioni dell'altro sistema sono l'angolo, opposto al vertice del primo, intersezione dei due semipiani $x - y < 0$, $x + y < 0$.

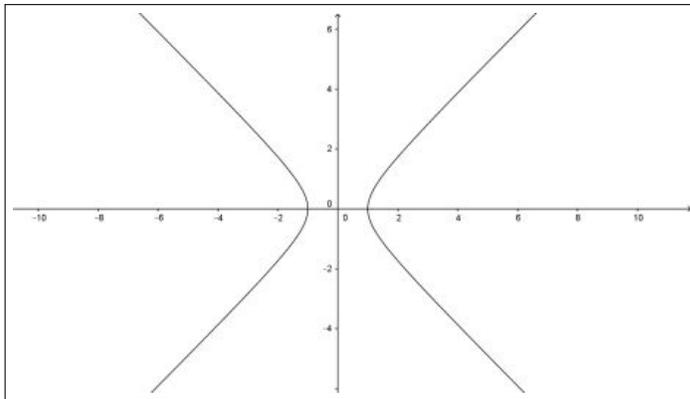
FIGURA 2. $x^2 - y^2 > 0$

Un punto interno ad E è, ad esempio il punto $P_0 = (1,0)$: tenuto presente che P_0 dista $\rho = \sqrt{\frac{1}{2}}$ dalle due rette $y = -x$ e $y = x$ che delimitano E si riconosce che il cerchietto di centro P_0 e raggio, ad esempio, $\frac{\rho}{2}$ è un intorno circolare di P_0 contenuto in E .

L'equazione $f(x,y) = 0$, cioè $\log(x^2 - y^2) = 0$ equivale a

$$x^2 - y^2 = 1$$

nota equazione dell'iperbole equilatera

FIGURA 3. $x^2 - y^2 = 1$

Esercizio 3.4. Sia $f(x,y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$

- esaminare se $f(x,y)$ ammette minimo e/o massimo,
- determinare le linee di livello $f(x,y) = -1$, $f(x,y) = 0$, $f(x,y) = 1$,
- determinare il minimo e il massimo in \mathbb{R}^2 della funzione $g(x,y) = e^{f(x,y)}$.

Soluzione:

La funzione $f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$ è una funzione radiale: cioè i suoi valori sono gli stessi su tutti i punti che hanno la stessa distanza dall'origine, dipendono cioè solo dal raggio.

La funzione che determina la f è la funzione $\sin(t)$ della quale è noto il minimo, -1 e il massimo 1 : quindi la f ammette minimo -1 , valore ottenuto sui punti delle circonferenze

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

Analogamente la f ammette massimo 1 , valore ottenuto sui punti delle circonferenze

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Le tre linee di livello richieste corrispondono alle tre famiglie di circonferenze

$$\begin{cases} f(x, y) = -1 & \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ f(x, y) = 0 & \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = k\pi \\ f(x, y) = 1 & \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

La funzione $g(x, y) = e^{f(x, y)}$ è ancora una funzione radiale: tenuto presente che

$$-1 \leq f(x, y) \leq 1$$

riesce di conseguenza, stante la monotonia della funzione esponenziale,

$$e^{-1} \leq e^{f(x, y)} \leq e^1$$

I valori e^{-1} e e^1 sono rispettivamente il minimo e il massimo della g .

Esercizio 3.5. Sia $f(x, y) = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ la somma delle distanze del punto (x, y) dai due punti $(-1, 0)$ e $(1, 0)$:

- determinare l'insieme di definizione di $f(x, y)$,
- esaminare se $f(x, y)$ è limitata,
- determinare i valori $f(x, 0)$ per tutti gli $x \in [-1, 1]$
- determinare il minimo di $f(x, y)$,
- determinare la linea di livello $f(x, y) = 4$.

Soluzione:

La funzione *distanza* è definita in tutto il piano, quindi l'insieme di definizione di $f(x, y)$ è tutto il piano.

Ovviamente f non è limitata, non sono infatti limitate le due distanze da sommare.

$$f(x, 0) = \sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x-1)^2} = |x+1| + |x-1| = 2 \quad \forall x \in [-1, 1]$$

Consideriamo il triangolo di vertici $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$, $P = (x, y)$: la disuguaglianza triangolare riconosce che

$$\overline{AB} \leq \overline{AP} + \overline{PB} \quad \rightarrow \quad 2 \leq \overline{AP} + \overline{PB} = f(x, y)$$

Se ne deduce che il minimo di f è 2 ed è ottenuto in tutti i punti del segmento $(-1, 0), (1, 0)$.

$$f(x, y) = 4 \rightarrow \left(\sqrt{(x+1)^2 + y^2} \right)^2 = \left(4 - \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \right)^2$$

da cui

$$4x = 16 - 8\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \rightarrow (4x - 16)^2 = 64(x-1)^2 + 64y^2$$

e quindi

$$48x^2 + 64y^2 = 192 \rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

la nota ellisse di semiassi $a = 2$ e $b = \sqrt{3}$.

Esercizio 3.6. Sia E l'insieme del piano descritto dalle condizioni

$$0 \leq x \leq 1, \quad -x^2 \leq y \leq x^2$$

- esaminare se E è limitato,
- determinare i punti di frontiera di E ,
- esaminare se E è convesso,
- esaminare se la funzione $f(x, y) = \log(|y - x^2|)$ è definita in E .

Soluzione:

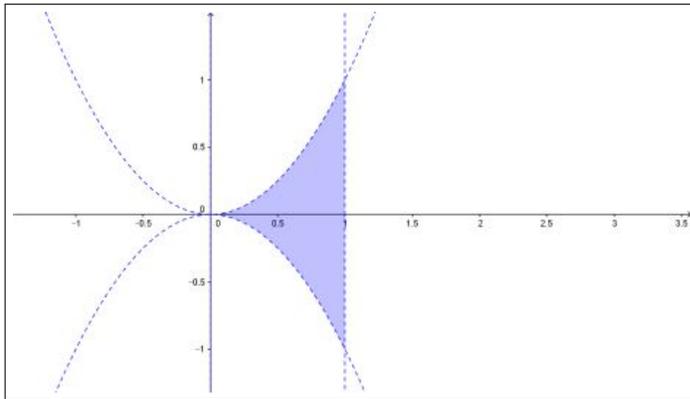


FIGURA 4. $0 \leq x \leq 1, \quad -x^2 \leq y \leq x^2$

L'insieme E è limitato: infatti

$$|x| \leq 1, \quad |y| \leq x^2 \rightarrow |y| \leq 1$$

ovvero i punti di E distano dall'origine meno di 2.

I punti di frontiera di E sono i due rami di parabola che lo delimitano e il segmento verticale da $(1, -1)$ a $(1, 1)$.

L'insieme E non è convesso: il segmento che congiunge i due punti di E : $(0, 0), (1, 1)$ non è interamente contenuto in E .

La funzione $f(x,y) = \log(|y-x^2|)$ non è definita in E , ad esempio nel punto $(0,0)$ la funzione f non è definita.

Certamente f è definita su tutti i punti interni ad E , ovvero in E privato della sua frontiera.

Esercizio 3.7. Sia $f(x,y) = 7x^2 + 4xy + 6y^2 + 1$

- determinare il minimo di $f(x,y)$ per $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
- determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x,y) = k$ ha soluzioni,
- determinare l'insieme di definizione di $g(x,y) = \frac{1}{f(x,y)}$

Soluzione:

La funzione $f(x,y) = 7x^2 + 4xy + 6y^2 + 1$ è somma della costante 1 e del termine $7x^2 + 4xy + 6y^2$, termine sempre positivo o nullo: infatti

$$7x^2 + 4xy + 6y^2 = (2x+y)^2 + 3x^2 + 5y^2 \geq 0$$

Pertanto $f(x,y) \geq 1$: tenuto presente che $f(0,0) = 1$ si riconosce pertanto che 1 è il minimo di f ed è raggiunto nell'origine.

Tenuto presente che f è illimitata superiormente si riconosce che l'equazione $f(x,y) = k$ ha soluzione per ogni $k \in [1, +\infty)$.

Tenuto presente che $f(x,y) \neq 0$ in tutto \mathbb{R}^2 si riconosce anche che la frazione $g(x,y) = \frac{1}{f(x,y)}$ è definita in tutto \mathbb{R}^2 .

Esercizio 3.8. Sia z il numero complesso $0.7 - 0.7i$ e siano z^2, z^3, \dots le sue potenze:

- disegnare sul piano i punti P_1, P_2, P_3, P_4 corrispondenti a z, z^2, z^3, z^4
- detta $\{P_n\}$ la successione costruita con le potenze di z esaminare se si tratta di una successione convergente,
- dette $w_n = \sum_{k=1}^n z^k$ esaminare se la successione $\{w_n\}$ è convergente.

Soluzione:

$$z = 0.7 - 0.7i, \quad z^2 = 0 - 0.98i, \quad z^3 = -0.69 - 0.69i, \quad z^4 = -0.96 - 0i$$

Tenuto conto che

$$|z| = \frac{98}{100} < 1 \quad \rightarrow \quad |z^n| = \left(\frac{98}{100}\right)^n \rightarrow 0$$

si riconosce che la successione $\{P_n\}$ tende a $(0,0)$.

$$w_n = \sum_{k=1}^n z^k = z \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \rightarrow \frac{z}{1 - z}$$

Esercizio 3.9. Sia $f(x,y) = [x+y]$ ove le parentesi quadra rappresentano la funzione parte intera ($[3.7] = 3, [-0.3] = -1, \dots$):

- determinare per quali k l'equazione $f(x,y) = k$ ha soluzioni,
- determinare in quali punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ la funzione $f(x,y)$ è continua,
- determinare il minimo e il massimo di $f(x,y)$ nel chiuso $Q : 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10$
- determinare il minimo e il massimo di $f(x,y)$ nel quadrato aperto, cioè frontiera esclusa, $S : 0 < x < 10, 0 < y < 10$

Soluzione:

La funzione f assegnata produce numeri interi, quindi è ovvio che l'equazione $f(x,y) = k$ potrà avere soluzione solo se k è un intero.

Che la soluzione esista per ogni k intero discende dall'ovvia uguaglianza $f(k,0) = k$ valida per ogni k intero.

la soluzione ovviamente non è unica: tutti i punti della retta $x + y = k$ sono altrettante soluzioni.

Ma anche sono soluzioni della stessa equazione tutte le coppie (x,y) comprese nella striscia

$$k \leq x + y < k + 1$$

La funzione $f(x,y) = [x+y]$ non è continua su tutte le rette $x + y = h$ con h intero: basta infatti spostarsi di poco per ottenere valori della funzione che dal valore h passano al valore $h - 1$.

Il minimo e il massimo di f nel quadrato chiuso, cioè frontiera inclusa, Q sono rispettivamente

$$0 = f(0,0), \quad 20 = f(10,10)$$

Il minimo e il massimo di f nel quadrato aperto, cioè frontiera esclusa, sono rispettivamente

$$0 = f(0.1,0.1) = f(0.1,0.2) = \dots, \quad 19 = f(9.5,9.5) = f(9.6,9.7) = \dots$$

Esercizio 3.10. Sia $p(x,y) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ la funzione prodotto delle distanze di $P = (x,y)$ dai due punti $(1,0)$ e $(-1,0)$:

- determinare il minimo di $p(x,y)$ per $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
- determinare le espressioni di $p(0,y)$ e $p(x,0)$,
- esaminare se vale la simmetria $p(x,y) = p(-x,y)$.

Soluzione:

La funzione $p(x,y) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$, prodotto di due distanze, due numeri non negativi, è non negativa.

Tenuto conto che $p(-1,0) = p(1,0) = 0$ si riconosce che il minimo è zero, valore raggiunto appunto in quei due punti.

$$p(0,y) = 1 + y^2, \quad p(x,0) = \sqrt{(x-1)^2} \sqrt{(x+1)^2} = |x^2 - 1|$$

$$p(x,y) = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{(1+x)^2 + y^2} \sqrt{(1-x)^2 + y^2} = p(-x,y)$$

Esercizio 3.11. Siano $f(x,y) = x + y + 1$ e $g(x,y) = x - y$

- descrivere i grafici di f e di g indicando tre punti appartenenti al primo grafico e tre punti appartenenti al secondo,
- detta $M(x,y) = \max\{f(x,y), g(x,y)\}$ la funzione che in ogni punto (x,y) vale il maggiore dei due valori $f(x,y)$ e $g(x,y)$, descrivere il grafico di M
- descrivere i grafici delle funzioni modulo $|f(x,y)|$ e $|g(x,y)|$.

Soluzione:

I grafici di $f(x,y)$ e di $g(x,y)$, polinomi in x e y di primo grado, sono due piani, pertanto sono determinati da tre punti ciascuno, $A_f = (0,0,1)$, $B_f = (1,0,2)$, $C_f = (1,1,3)$ e $A_g = (0,0,0)$, $B_g = (1,0,1)$, $C_g = (1,1,0)$.

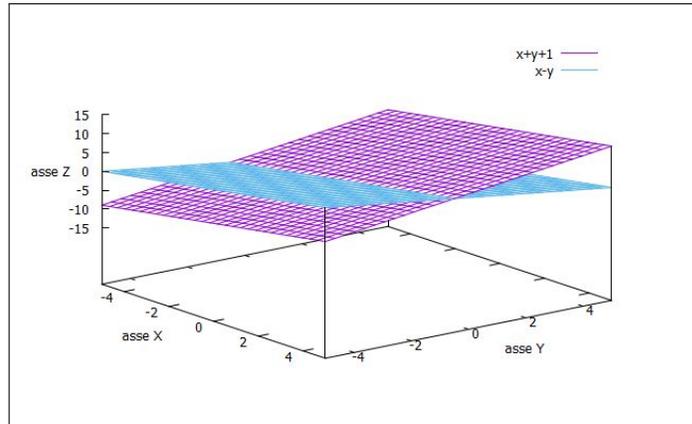


FIGURA 5. $f(x,y) = x + y + 1$ e $g(x,y) = x - y$

Il grafico di $M(x,y) = \max\{f(x,y), g(x,y)\}$ è costituito da due parti di piano:

- la parte del piano grafico di $f(x,y)$ in corrispondenza ai punti (x,y) con $y \geq -\frac{1}{2}$ nei quali $f(x,y) \geq g(x,y)$,
- la parte del piano grafico di $g(x,y)$ in corrispondenza ai punti (x,y) con $y \leq -\frac{1}{2}$ nei quali $f(x,y) \leq g(x,y)$.

Il grafico di $|f(x,y)|$ è costituito

- dalla parte del piano grafico di $f(x,y)$ in corrispondenza ai punti (x,y) con $x + y + 1 \geq 0$ nei quali $f(x,y) \geq 0$,
- la parte del piano grafico di $-f(x,y)$ in corrispondenza ai punti (x,y) con $x + y + 1 \leq 0$ nei quali $f(x,y) \leq 0$.

Analogo discorso per il grafico di $|g(x,y)|$.

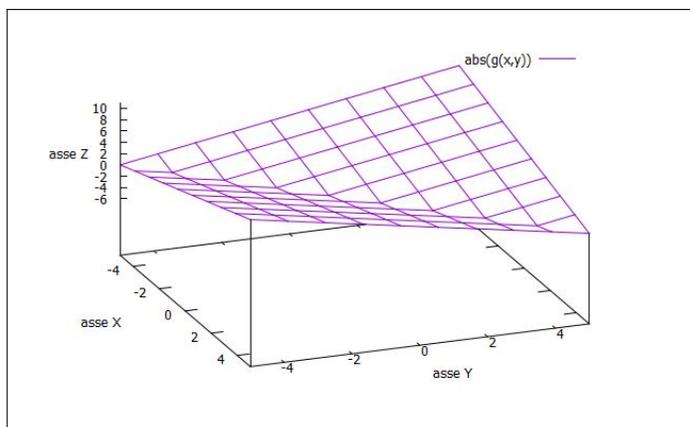


FIGURA 6. $|g(x,y)| = |x - y|$

Esercizi su derivate parziali

Esercizio 4.1. Sia $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$: calcolare

- le due derivate parziali prime $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$,
- il gradiente nel punto $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$,
- il laplaciano $\Delta f(x, y) = f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y)$ nell'origine.

Soluzione:

$$f(x, y) = \sin(x^2 + y^2) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} f_x(x, y) = \cos(x^2 + y^2) 2x \\ f_y(x, y) = \cos(x^2 + y^2) 2y \end{cases}$$

$$\nabla f(x, y) = \{\cos(x^2 + y^2) 2x, \cos(x^2 + y^2) 2y\} \quad \rightarrow \quad \nabla f(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) = \{2\sqrt{\pi}, 2\sqrt{\pi}\}$$

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \cos(x^2 + y^2) 2x \\ f_y(x, y) = \cos(x^2 + y^2) 2y \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} f_{xx}(x, y) = -\sin(x^2 + y^2) (2x)^2 + \cos(x^2 + y^2) 2 \\ f_{yy}(x, y) = -\sin(x^2 + y^2) (2y)^2 + \cos(x^2 + y^2) 2 \end{cases}$$

$$\Delta f(x, y) = f_{xx}(x, y) + f_{yy}(x, y) \quad \rightarrow \quad \Delta f(0, 0) = 4$$

Esercizio 4.2. Sia $f(x, y) = \frac{1}{3 + x^2 + y^2}$: calcolare

- il gradiente nell'origine,
- il gradiente nei punti $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$,
- disegnare i quattro vettori precedenti.

Soluzione:

$$f(x, y) = \frac{1}{3 + x^2 + y^2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} f_x(x, y) = -\frac{2x}{(3 + x^2 + y^2)^2} \\ f_y(x, y) = -\frac{2y}{(3 + x^2 + y^2)^2} \end{cases}$$

$$\nabla f(x, y) = -\frac{2}{(3 + x^2 + y^2)^2} \{x, y\}$$

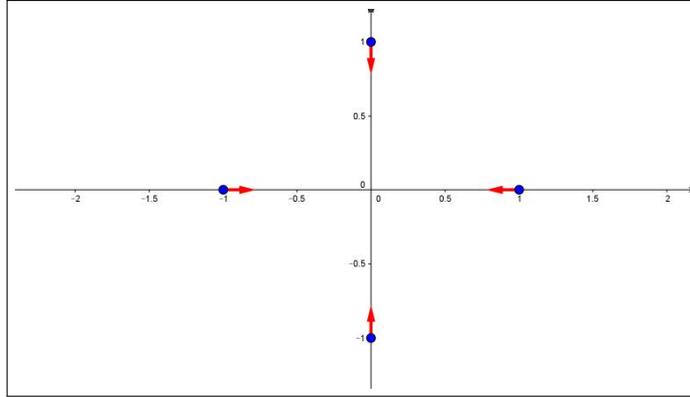


FIGURA 1. $\nabla f(x,y) = -\frac{2}{(3+x^2+y^2)^2} \{x,y\}$

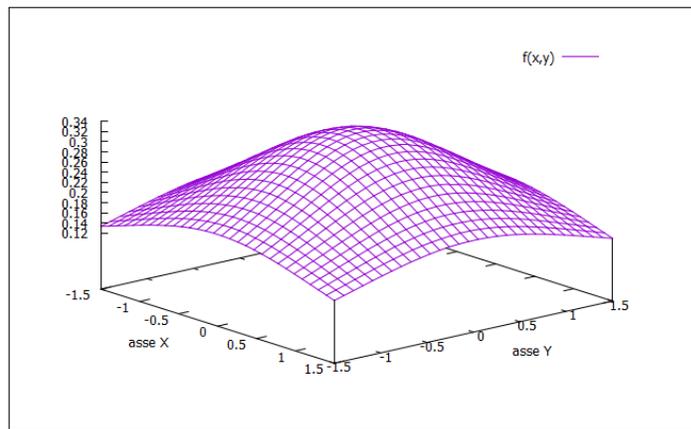


FIGURA 2. $z = f(x,y)$

$$\nabla f(0,0) = \{0,0\}$$

$$\nabla f(1,0) = -\frac{2}{16}\{1,0\} \quad \nabla f(0,1) = -\frac{2}{16}\{0,1\}$$

$$\nabla f(-1,0) = -\frac{2}{16}\{-1,0\} \quad \nabla f(0,-1) = -\frac{2}{16}\{0,-1\}$$

Si riconosce, guardando il grafico, che le direzioni dei gradienti nei quattro punti studiati indicano la direzione di maggiore salita camminando sulla superficie.

Esercizio 4.3. Sia $f(x,y) = 5x^2 + 3y^2$ e sia $g(\rho, \theta) = f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$ la stessa espressa in coordinate polari. Calcolare

- l'espressione esplicita di $g(\rho, \theta)$,
- le derivate parziali $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ nel punto $(1,0)$,
- le derivate parziali $g_\rho(\rho, \theta)$, $g_\theta(\rho, \theta)$ nel punto $(1,0)$

Soluzione:

$$f(x, y) = 5x^2 + 3y^2, \quad \begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases} \quad \rightarrow \quad g(\rho, \theta) = \rho^2 \{5 \cos^2(\theta) + 3 \sin^2(\theta)\}$$

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 10x \\ f_y(x, y) = 6y \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} f_x(1, 0) = 10 \\ f_y(1, 0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_\rho(\rho, \theta) = 2\rho \{5 \cos^2(\theta) + 3 \sin^2(\theta)\} \\ g_\theta(\rho, \theta) = -4\rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} g_\rho(1, 0) = 10 \\ g_\theta(1, 0) = 0 \end{cases}$$

Tenuto conto che

$$(x, y) = (1, 0) \Leftrightarrow (\rho, \theta) = (1, 0)$$

si verifica, dai risultati ottenuti anche la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$\begin{cases} g_\rho = f_x x_\rho + f_y y_\rho & \rightarrow & g_\rho(1, 0) = f_x(1, 0) x_\rho + f_y(1, 0) y_\rho = 10 \\ g_\theta = f_x x_\theta + f_y y_\theta & \rightarrow & g_\theta(1, 0) = f_x(1, 0) x_\theta + f_y(1, 0) y_\theta = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4.4. Sia $f(x, y) = x^2 + 3xy + 2y^2 + x + y + 1$:

- determinare la funzione composta $g(t) = f(2t, 3t)$,
- determinare il gradiente di $f(x, y)$ nel punto $(2, 3)$,
- determinare la derivata $g'(1)$.

Soluzione:

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + 2y^2 + x + y + 1 \quad \rightarrow \quad f(2t, 3t) = 40t^2 + 5t + 1$$

Da cui

$$g'(t) = 80t + 5 \quad \rightarrow \quad g'(1) = 85$$

La regola di derivazione delle funzioni composte produce del resto:

$$\nabla f(x, y) = \{2x + 3y + 1, 3x + 4y + 1\} \quad \rightarrow \quad \nabla f(2, 3) = \{14, 19\}$$

$$g'(t) = f_x x' + f_y y' = 14 \times 2 + 19 \times 3 = 85$$

Esercizio 4.5. Sia $f(x, y) = x^2 + 3xy + 5y^2$

- calcolare la differenza $\Delta = f(4, 5) - f(1, 1)$,
- calcolare le due differenze $a = f(4, 5) - f(4, 1)$ e $b = f(4, 1) - f(1, 1)$,
- rappresentare a e b servendosi del teorema di Lagrange in una dimensione,
- rappresentare Δ servendosi delle due espressioni di Lagrange per a e b .

Soluzione:

$$\Delta = f(4,5) - f(1,1) = 201 - 9 = 192, \quad \begin{cases} a = f(4,5) - f(4,1) = 168 \\ b = f(4,1) - f(1,1) = 24 \end{cases}$$

La quantità a rappresenta l'incremento della funzione $f(4,y)$ per $y \in [1,5]$ pertanto, usando il teorema di Lagrange in una dimensione si ha

$$a = f(4,5) - f(4,1) = f_y(4,\eta)(5-1)$$

Tenuto conto che $f_y(4,y) = 12 + 10y$

$$168 = (12 + 10\eta)(5-1) \quad \rightarrow \quad \eta = 3$$

Analogamente

$$b = f(4,1) - f(1,1) = f_x(\xi,1)(4-1)$$

e tenuto conto che $f_x(x,1) = 2x + 3$ si ricava $\xi = 5/2$. Complessivamente si ha pertanto

$$\Delta = 4f_y(4,\eta) + 3f_x(\xi,1)$$

che avendo calcolato esplicitamente i due punti di Lagrange η e ξ si riduce a

$$\Delta = 3f_x(5/2,1) + 4f_y(4,3)$$

Esercizio 4.6. Sia $f(x,y) = \frac{x-y}{1+(x+y)^2}$

- calcolare il gradiente di $\nabla f(x,y)$,
- posto $x = u - v$ e $y = u + v$ calcolare la matrice $m = \begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix}$,
- determinare la funzione composta $g(u,v) = f[x(u,v), y(u,v)]$,
- calcolare $\nabla g(u,v)$,
- calcolare il prodotto $m \cdot \nabla f(u-v, u+v)$.

Soluzione:

$$\nabla f(x,y) = \left\{ \frac{-x^2 + 2xy + 3y^2 + 1}{(1+(x+y)^2)^2}, \frac{-3x^2 - 2xy + y^2 - 1}{(1+(x+y)^2)^2} \right\}$$

$$m = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g(u,v) = f[u-v, u+v] = -\frac{2v}{4u^2+1} \quad \rightarrow \quad \nabla g(u,v) = \left\{ \frac{16uv}{(4u^2+1)^2}, \frac{-2}{4u^2+1} \right\}$$

$$m \cdot \nabla f(x,y) = \frac{1}{(1+(x+y)^2)^2} \{-4(x^2 - y^2), -2(1+(x+y)^2)\}$$

Sostituendo nell'espressione precedente $x = u - v$ e $y = u + v$ si ottiene

$$m \cdot \nabla f(u+v, u-v) = \left\{ \frac{16uv}{(4u^2+1)^2}, \frac{-2}{4u^2+1} \right\}$$

che coincide con quella trovata precedentemente.

Esercizio 4.7. Sia $f(x, y) = x^3 + y^3$

- Calcolare il limite

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(1 + \rho/\sqrt{2}, 1 + \rho/\sqrt{2}) - f(1, 1)}{\rho}$$

- calcolare la derivata di f nel punto $(1, 1)$ secondo la direzione del versore $u = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ servendosi di $\nabla f(1, 1)$.

Soluzione:

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(1 + \rho/\sqrt{2}, 1 + \rho/\sqrt{2}) - f(1, 1)}{\rho} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(1 + \rho/\sqrt{2})^3 + (1 + \rho/\sqrt{2})^3 - 2}{\rho} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(6/\sqrt{2} + 6\rho/2 \right) = 6/\sqrt{2} \end{aligned}$$

Tenuto conto che $\nabla f(1, 1) = \{3, 3\}$ la derivata direzionale di f in tale punto secondo la direzione del versore $u = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ è espressa da

$$\nabla f(1, 1) \cdot u = 3/\sqrt{2} + 3/\sqrt{2} = 6/\sqrt{2}$$

esattamente il valore ottenuto in precedenza calcolando direttamente il limite del rapporto incrementale lungo la direzione di u .

Esercizio 4.8. Sia $f(x, y) = \frac{x^2 + x + y + y^2}{x + y}$:

- rappresentare f servendosi delle coordinate polari,
- determinare il limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$

Soluzione:

Si noti che

$$\frac{x^2 + x + y + y^2}{x + y} = \frac{x^2 + y^2}{x + y} + 1$$

Servirsi delle coordinate polari significa esprimere

$$x = \rho \cos(\theta), \quad y = \rho \sin(\theta)$$

pertanto

$$f(x, y) = \frac{\rho^2 \cos^2(\theta) + \rho \cos(\theta) + \rho \sin(\theta) + \rho^2 \sin^2(\theta)}{\rho \cos(\theta) + \rho \sin(\theta)} = \frac{\rho}{\cos(\theta) + \sin(\theta)} + 1$$

L'espressione trovata, in accordo con quella cartesiana precedente mostra che l'insieme di definizione di f esclude la direzione $\cos(\theta) + \sin(\theta) = 0$, $\theta = -\pi/4$ ovvero la retta $x + y = 0$, bisettrice del secondo e quarto quadrante.

Far tendere $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ equivale a far tendere $\rho \rightarrow 0$ pertanto

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{\rho}{\cos(\theta) + \sin(\theta)} + 1 \right) = 1$$

Esercizio 4.9. Sia $f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

- determinare il limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$,
- determinare il limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi, \pi)} f(x, y)$,
- determinare il limite $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} f(x, y)$.

Soluzione:

La nota disuguaglianza

$$|\sin(t)| \leq |t|$$

implica

$$|\sin(x^2 + y^2)| \leq x^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad \left| \frac{\sin(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

da cui segue ovviamente

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$$

Tenuto conto che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi, \pi)} \sin(x^2 + y^2) = \sin(2\pi^2), \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (\pi, \pi)} \sqrt{x^2 + y^2} = \pi\sqrt{2} \neq 0$$

segue, ovviamente

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi, \pi)} f(x, y) = \frac{\sin(2\pi^2)}{\pi\sqrt{2}}$$

Tenuto conto che

$$\left| \frac{\sin(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

e che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

si riconosce che $\lim_{(x,y) \rightarrow \infty} f(x, y) = 0$.

Esercizio 4.10. Sia $f(x, y) = x^2 + 3xy + 5y^2 + x + 2y + 1$

- determinare il piano tangente al grafico nell'origine,
- determinare il piano tangente al grafico nel punto $(1, 1)$,

- *determinare le equazioni parametriche della retta determinata dai due piani precedenti.*

Soluzione:

L'equazione del piano tangente al grafico di $z = f(x, y)$ nel punto (x_0, y_0) è

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

pertanto l'equazione del piano richiesto nell'origine è:

$$z = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y \quad \rightarrow \quad z = 1 + x + 2y$$

Si noti come l'espressione ottenuta coincide con i termini di grado minore di 2 nel polinomio che rappresenta $f(x, y)$: tale coincidenza si incontra tuttavia solo se il punto (x_0, y_0) assegnato è l'origine.

L'equazione del piano tangente relativa al punto $(1, 1)$ è invece

$$z = f(1, 1) + f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1) \quad \rightarrow \quad z = 13 + 6(x - 1) + 15(y - 1)$$

I due piani assegnati sono

$$x + 2y - z + 1 = 0, \quad 6x + 15y - z - 8 = 0$$

La retta intersezione è costituita dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ 6x + 15y - z - 8 = 0 \end{cases}$$

Due vettori ortogonali ai due piani si ricavano dai coefficienti di x di y e di z : sono pertanto

$$u = \{1, 2, -1\}, \quad v = \{6, 15, -1\}$$

il vettore

$$w = u \wedge v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 6 & 15 & -1 \end{vmatrix} = \{13, -5, 3\}$$

ortogonale a u e v è pertanto parallelo alla retta intersezione dei due piani.

Un punto comune

$$\begin{cases} x + 2y = z - 1 \\ 6x + 15y = z + 8 \end{cases}$$

ponendo, ad esempio $z = 0$ si ricava

$$P_0 = \left\{ -\frac{31}{3}, \frac{14}{3}, 0 \right\}$$

Le equazioni parametriche della retta intersezione sono pertanto:

$$\begin{cases} x = -\frac{31}{3} + 13t \\ y = \frac{14}{3} - 5t \\ z = 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Esercizio 4.11. Sia $f(x,y) = 3x^2 + 4xy + 5y^2$: assegnati i punti $A = (0,0)$ e $B = (1,2)$ determinare un punto (x_0, y_0) del segmento AB tale che

$$f(B) - f(A) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (1, 2)$$

Soluzione:

$$f(B) - f(A) = f(1,2) - f(0,0) = 31$$

I punti del segmento AB sono rappresentati, parametricamente da

$$x = t, \quad y = 2t, \quad t \in [0, 1]$$

L'espressione di f sui punti del segmento è

$$g(t) = f(t, 2t) = 31t^2, \quad g'(t) = 62t$$

$$f(B) - f(A) = 31 = g(1) - g(0) = g'(\tau)(1 - 0) \quad \rightarrow \quad 62\tau = 31 \quad \rightarrow \quad \tau = 0.5$$

Tenuto conto che

$$g'(t) = f_x(t, 2t) \cdot 1 + f_y(t, 2t) \cdot 2$$

si riconosce che

$$f(B) - f(A) = \nabla f(0.5, 1) \times (1, 2)$$

Esercizio 4.12. Sia $f(x,y) = x^2 - y^2 - 1$: detta \mathcal{C} la spirale del piano di equazioni parametriche $x = t \cos(t), y = t \sin(t), t \geq 0$

- scrivere le equazioni parametriche del profilo altimetrico \mathcal{F} di f relativo a \mathcal{C} ,
- scrivere le equazioni parametriche della retta tangente ad \mathcal{F} nell'origine.

Soluzione:

Le equazioni parametriche del profilo altimetrico relativo alla spirale \mathcal{C} sono

$$\begin{cases} x = t \cos(t) \\ y = t \sin(t) \\ z = f(t \cos(t), t \sin(t)) = t^2 \cos^2(t) - t^2 \sin^2(t) - 1 \end{cases} \quad t \geq 0$$

Per $t = 0$ il punto del profilo altimetrico ha coordinate $(0, 0, -1)$.

I vettori formati con le derivate prime

$$\mathbf{u} = \{\cos(t) - t \sin(t), \sin(t) + t \cos(t), 2t \cos^2(t) - 2t^2 \cos(t) \sin(t) - 2t \sin^2(t) + 2t^2 \sin(t) \cos(t)\}$$

sono tangenti al profilo altimetrico.

In particolare quello tangente al profilo altimetrico in $(0, 0, -1)$ è

$$\mathbf{u}_0 = \{1, 0, 0\}$$

La retta tangente al profilo altimetrico nell'origine è pertanto quella per $(0, 0, -1)$, parallela all'asse x .

Esercizi sulla formula di Taylor

Esercizio 5.1. *Calcolare le derivate direzionali delle seguenti funzioni*

- $f(x, y) = x^2 + xy - 2$ nel punto $P = (1, 0)$ secondo la direzione del vettore $v = (2, 1)$,
- $g(x, y) = e^x \cos(y)$ nel punto $P = (0, 0)$ secondo la direzione del vettore $v = (1, 2)$.

Soluzione:

Le derivate direzionali di f in $P_0 = (x_0, y_0)$, detto $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ il vettore (vettore di lunghezza unitaria) relativo alla direzione assegnata, si possono calcolare con due algoritmi equivalenti:

•

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha \rho, y_0 + \beta \rho) - f(x_0, y_0)}{\rho}$$

•

$$\nabla f(x_0, y_0) \times \vec{v}$$

Applichiamo i due metodi alla prima funzione: $P_0 = (1, 0)$, $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$:

Primo metodo:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\rho)^2 + (1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\rho) \frac{1}{\sqrt{5}}\rho - 2 - (-1)}{\rho} = \sqrt{5}$$

Secondo metodo:

$$\nabla f(1, 0) = (2, 1) \quad \rightarrow \quad \nabla f(1, 0) \times \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1) = \sqrt{5}$$

I risultati naturalmente sono gli stessi !

Analoghi procedimenti per la seconda funzione producono il valore $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Esercizio 5.2. *Sia $f(x, t) = e^{-(x-2t)^2}$, determinare*

- la linea di livello $f(x, t) = 1$
- il gradiente $\nabla f(x, t)$ nei punti della linea di livello precedente,
- il modulo della derivata di f nell'origine secondo la direzione della stessa linea di livello.

Soluzione:

La funzione assegnata è di *tipo ondoso* : pensata la seconda variabile come riferita al tempo si può pensare che

- $f(x, 0)$ siano, per ogni x i valori che f produce al tempo $t = 0$
- $f(x, 1)$ siano, per ogni x i valori che f produce al tempo $t = 1$
- ecc. ecc.

È inoltre evidente che

il grafico di $f(x, 1)$ è il grafico di $f(x, 0)$ traslato di 2 nel verso delle x crescenti,
 il grafico di $f(x, 2)$ è il grafico di $f(x, 0)$ traslato di 4 nel verso delle x crescenti,
 ecc. ecc.

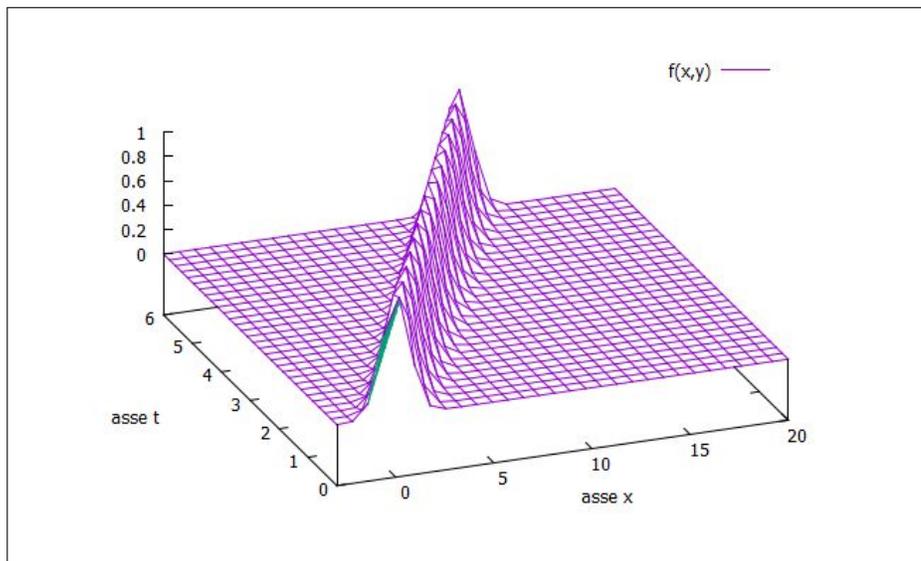


FIGURA 1. $f(x, t) = e^{-(x-2t)^2}$

Al passare del tempo le sezioni del grafico di $f(x, t)$ si configurano come le foto di un'onda che avanzi, nel verso delle x crescenti con velocità $v = 2$

La linea $f(x, t) = e^{-(x-2t)^2} = 1$ corrisponde alla retta $x - 2t = 0$: il vettore $\mathbf{v} = (1, -2)$ è, in ogni punto di tale retta, ortogonale alla retta stessa.

I punti della linea di livello considerata hanno coordinate $(2t, t)$ e, su di essi riesce $\nabla f(e^{-(x-2t)^2}) = (0, 0)$.

Altre linee di livello, $f(x, t) = k, k \in (0, 1)$ coincidono con $x - 2t = \pm \sqrt{-\log(k)}$

È evidente che in relazione ad ogni linea di livello di una funzione $f(x, y)$ il gradiente $\nabla f(x, t)$ è, in ogni punto della linea, ortogonale alla linea stessa.

Esercizio 5.3. Sia $f(x, y) = 3x + 5y + 2$, determinare

- $\nabla f(x, y)$,

- detti $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (2, 3)$ determinare i rapporti

$$\frac{f(B) - f(A)}{AB}, \quad \frac{f(C) - f(B)}{BC}, \quad \frac{f(A) - f(C)}{AC}$$

- calcolare le derivate direzionali di f

$$f'_{\vec{AB}}(A), \quad f'_{\vec{BC}}(B), \quad f'_{\vec{CA}}(C)$$

nei tre punti A, B, C secondo le direzioni dei tre vettori $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CA}$,

- confrontare i tre valori con quelli ottenuti dai precedenti rapporti.

Soluzione:

Il gradiente

$$\nabla f(x, y) = (3, 5)$$

è costante.

$$\frac{f(B) - f(A)}{AB} = 4\sqrt{2} \quad \frac{f(C) - f(B)}{BC} = \frac{13}{\sqrt{5}} \quad \frac{f(A) - f(C)}{AC} = -\frac{21}{\sqrt{13}}$$

Le derivate direzionali si calcolano tramite il gradiente già calcolato

$$\begin{cases} f'_{\vec{AB}}(A) = (3, 5) \times \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) & = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \\ f'_{\vec{BC}}(B) = (3, 5) \times \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2) & = \frac{13}{\sqrt{5}} \\ f'_{\vec{CA}}(C) = (3, 5) \times \frac{1}{\sqrt{13}}(-2, -3) & = -\frac{21}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

La linearità della funzione $f(x, y)$ implica che i rapporti secondo qualsiasi direzione coincidono con le derivate direzionali relative alle stesse direzioni.

Si noti come tutte le derivate direzionali trovate siano in modulo minori del modulo del gradiente.

Esercizio 5.4. Determinare il piano tangente al grafico delle seguenti funzioni :

- $f(x, y) = x^3 - y^3$ nel punto dello spazio $P = (0, 1, -1)$
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ nel punto dello spazio $P = (2, 0, 2)$

Soluzione:

L'equazione del piano tangente al grafico di $f(x, y)$ nel punto (dello spazio) $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è come noto

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Si hanno pertanto i seguenti due piani:

$$\begin{cases} f(x, y) = x^3 - y^3 & P = (0, 1, -1) & \rightarrow z = -1 - 3(y - 1) \\ f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} & P = (2, 0, 2) & \rightarrow z = 2 + 1(x - 2) \end{cases}$$

Esercizio 5.5. Calcolare gli eventuali punti di massimo, minimo o sella delle seguenti funzioni:

- $f(x, y) = x^2 y + x^2 - 2y$
- $f(x, y) = \log(1 + x^2 y^2)$

Soluzione:

Per determinare i punti richiesti occorre determinare, per ciascuna funzione, i punti critici, e, successivamente classificarli.

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y) = x^2 y + x^2 - 2y \\ f(x, y) = \log(1 + x^2 y^2) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} f_x = 2xy + 2x = 0 \\ f_y = x^2 - 2 = 0 \end{array} \right. \rightarrow (\pm\sqrt{2}, -1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_x = \frac{2xy^2}{1+x^2y^2} = 0 \\ f_y = \frac{2x^2y}{1+x^2y^2} = 0 \end{array} \right. \rightarrow \text{asse } x \text{ e asse } y$$

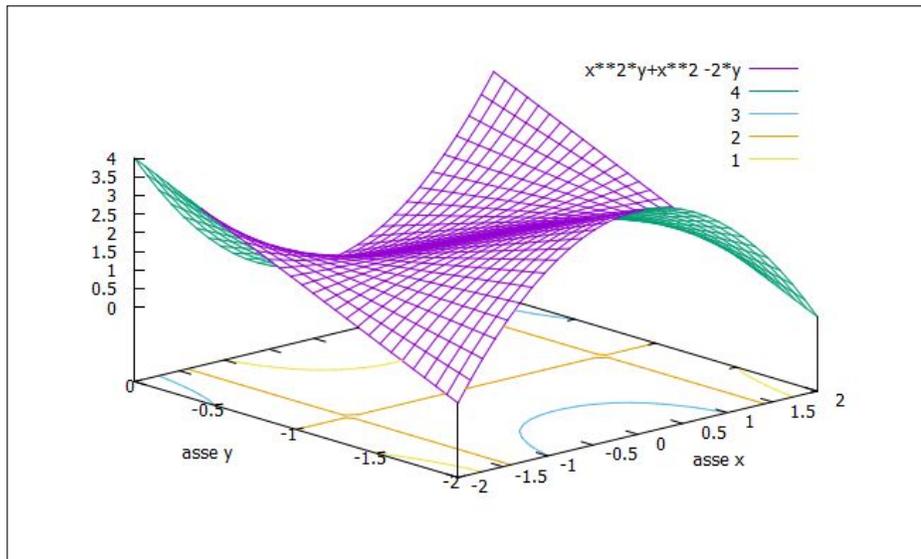


FIGURA 2. $f(x, y) = x^2 y + x^2 - 2y$

Per la prima funzione i punti $(\pm\sqrt{2}, -1)$ producono la matrice Hessiana

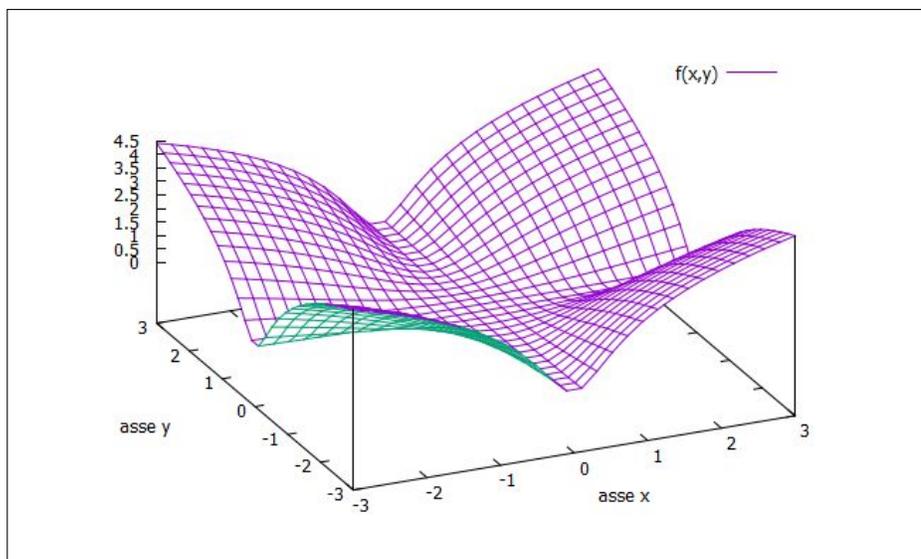
$$H(\pm\sqrt{2}, -1) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = -16 < 0$$

si tratta quindi di due punti sella.

Per la seconda funzione è evidente che fuori dagli assi

$$1 + x^2 y^2 > 1 \rightarrow \log(1 + x^2 y^2) > \log(1) = 0$$

e quindi è evidente che tutti i punti degli assi sono punti di minimo.

FIGURA 3. $f(x,y) = \log(1+x^2+y^2)$

Esercizio 5.6. Determinare lo sviluppo di Taylor di secondo grado centrato nell'origine delle seguenti funzioni :

- $f(x,y) = \sin(x) \sin(y)$
- $f(x,y) = x e^{xy}$
- $f(x,y) = x^2 \sin(y^2)$

Soluzione:

$$P(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2} \{ f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2 \}$$

$$\begin{cases} f(x,y) = \sin(x) \sin(y) & \rightarrow P(x,y) = xy \\ f(x,y) = x e^{xy} & \rightarrow P(x,y) = x \\ f(x,y) = x^2 \sin(y^2) & \rightarrow P(x,y) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 5.7. Determinare gli sviluppi di Taylor di secondo grado (gratuiti) centrati nell'origine delle seguenti funzioni :

- $f(x,y) = \sin(x+y)$
- $f(x,y) = e^{x-y}$
- $f(x,y) = \frac{1}{1-(x+y)}$

Soluzione:

$$\begin{array}{llll}
 \sin(t) & \rightarrow t & \rightarrow \sin(x+y) & \rightarrow (x+y) \\
 e^t & \rightarrow 1+t+\frac{1}{2!}t^2 & \rightarrow e^{x-y} & \rightarrow 1+(x-y)+\frac{1}{2!}(x-y)^2 \\
 \frac{1}{1-t} & \rightarrow 1+t+t^2 & \rightarrow \frac{1}{1-(x+y)} & \rightarrow 1+(x+y)+(x+y)^2
 \end{array}$$

Esercizio 5.8. Sia $f(x,y) = ((x-1)^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 1)$, determinare

- la linea di livello $f(x,y) = 0$,
- esaminare se il punto $(1/2, 0)$ sia di minimo, di massimo o di sella.

Soluzione: $f(x,y)$ è prodotto di due fattori quindi la linea di livello

$$\{f(x,y) = 0\} = \{(x-1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{x^2 + y^2 = 1\}$$

si compone di due circonferenze di raggio 1: la prima di centro $(1, 0)$, la seconda di centro $(0, 0)$.

Nel punto $(1/2, 0)$ riesce

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2(2x-1)(x^2 - x + y^2 - 1), \\ f_y(x,y) = 2y(2x^2 - 2x + 2y^2 - 1) \end{cases} \rightarrow f_x(1/2, 0) = f_y(1/2, 0) = 0$$

$$H((1/2, 0)) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 15 > 0$$

e quindi di tratta di un punto di massimo relativo.

Esercizio 5.9. Sia $f(x,y) = \sin^2(x+y)$, determinare

- le linee di livello $f(x,y) = 0$
- i punti critici
- classificare i punti trovati in minimi, massimi o punti sella.

Soluzione:

$$\sin^2(x+y) = k \rightarrow \sin(x+y) = \pm\sqrt{k} \rightarrow x+y = \pm \arcsin(\sqrt{k})$$

Si tratta di rette parallele alla $x+y = 0$.

$$f_x(x,y) = f_y(x,y) = 2 \sin(x+y) \cos(x+y)$$

I punti critici sono pertanto tutti i punti delle rette

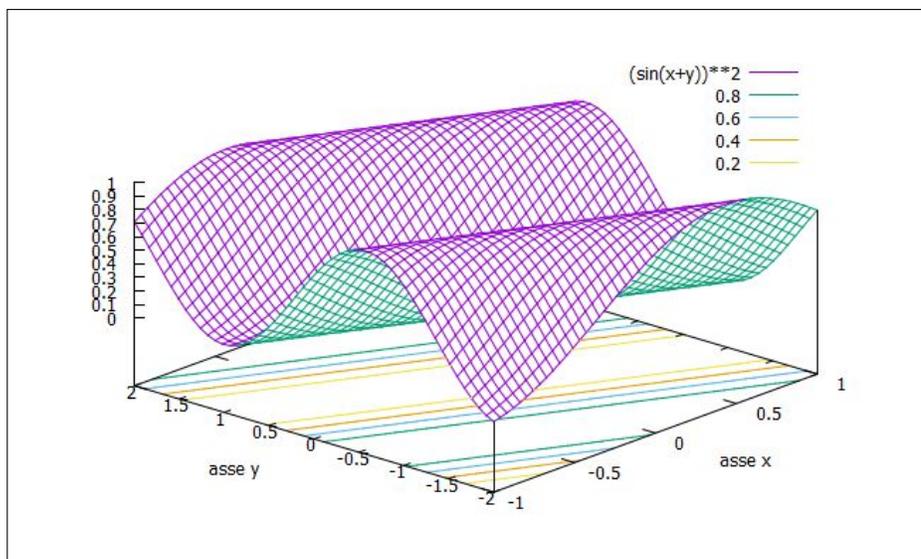
$$x+y = \frac{h}{2} \pi, \quad h \in \mathcal{Z}$$

Tenuto presente che

$$f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = 2 \cos^2(x+y) - 2 \sin^2(x+y)$$

ne segue

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = 0$$

FIGURA 4. $f(x,y) = \sin^2(x+y)$

Risultato di indecidibilità.

È del resto evidente dal grafico della funzione $\sin^2(t)$ che nei punti $t = k\pi$ la funzione vale zero, che quindi è il minimo e nei punti $t = k\pi + \pi/2$ la funzione vale 1 che quindi è il massimo.

Esercizio 5.10. Sia $f(x,y) = x^2 - 3y^2$, determinare il minimo e il massimo di f nel quadrato $Q: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$.

Soluzione:

La strategia da seguire è la seguente:

- determinazione dei punti critici che cadano all'interno dell'insieme assegnato,
- loro classificazione (punti di minimo, di massimo, di sella)
- determinazione del minimo e del massimo della restrizione della funzione alla frontiera:
 - minimo e massimo di $f(x, -1), x \in [-1, 1]$
 - minimo e massimo di $f(x, 1), x \in [-1, 1]$
 - minimo e massimo di $f(-1, y), y \in [-1, 1]$
 - minimo e massimo di $f(1, y), y \in [-1, 1]$
- il massimo è il maggiore dei valori trovati, il minimo il minore.

I punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x = 0 & \rightarrow x = 0 \\ f_y(x,y) = -6y = 0 & \rightarrow y = 0 \end{cases}$$

L'unico punto trovato, $(0,0)$ non è interno.

$$\begin{cases} f(x, -1) = x^2 - 3 & \rightarrow \min = -3, \max = -2 \\ f(x, 1) = x^2 - 3 & \rightarrow \min = -3, \max = -2 \\ f(-1, y) = 1 - 3y^2 & \rightarrow \min = -2, \max = 1 \\ f(1, y) = 1 - 3y^2 & \rightarrow \min = -2, \max = 1 \end{cases}$$

Ne segue pertanto che il minimo è -3 , valore assunto in $(0, 1)$, e il massimo è 1 assunto in $(1, 0)$.

Esercizio 5.11. Sia $f(x, y) = (3x + 5y)^2$, determinare il massimo e il minimo di f nella regione del piano racchiusa dalla curva $\mathcal{C} : x = 6 \cos(t), y = 4 \sin(t), t \in [0, 2\pi]$.

Soluzione:

La curva $\mathcal{C} : x = 6 \cos(t), y = 4 \sin(t), t \in [0, 2\pi]$ è l'ellisse di semiasse $x : 6$ e semiasse $y : 4$, e quindi la regione assegnata è quella dentro tale ellisse.

I punti critici della $f(x, y)$ sono

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 6(x + 5y) = 0 \\ f_y(x, y) = 10(x + 5y) = 0 \end{cases} \rightarrow x + 5y = 0$$

cioè tutti i punti della retta $x + 5y = 0$.

Tenuto conto che $f(x, y)$ essendo un quadrato è sempre non negativa e tenuto conto che sulla retta $x + 5y = 0$ la f vale zero, si riconosce che tutti i punti di tale retta sono punti di minimo per f .

Il minimo quindi è $m = 0$.

$$F(t) = f[6 \cos(t), 4 \sin(t)] = ((18 \cos(t) + 20 \sin(t))^2$$

Tenuto presente che

$$F'(t) = 2((18 \cos(t) + 20 \sin(t)) \cdot ((-18 \sin(t) + 20 \cos(t)))$$

la derivata si annulla nei punti t_1 e t_2 nei quali riesce, rispettivamente

$$\begin{cases} 18 \cos(t_1) + 20 \sin(t_1) = 0, & \rightarrow F(t_1) = 0 \\ -18 \sin(t_2) + 20 \cos(t_2) = 0 & \rightarrow F(t_2) = 18 \cos^2(t_2) \end{cases}$$

Il massimo pertanto è il valore $18 \cos^2(t_2)$. Tenuto presente che

$$-18 \sin(t_2) + 20 \cos(t_2) = 0 \rightarrow 18 \sqrt{1 - \cos^2(t_2)} = 20 \cos(t_2) \rightarrow \cos^2(t_2) = \frac{18^2}{18^2 + 20^2}$$

di conseguenza il valore massimo è

$$F(t_2) = 724$$

Esercizio 5.12. Sia $T(x, y, z) = e^{-x^2 - y^2 - z^2}$ la temperatura nei punti (x, y, z) dello spazio e siano

$$x(t) = t, \quad y(t) = t^2, \quad z(t) = t^3,$$

le coordinate in ogni tempo $t \geq 0$ di un punto che si allontana dall'origine.

Determinare

- la temperatura del punto al tempo $t = 0$,
- la temperatura del punto al tempo $t = 1$,
- la derivata rispetto al tempo della funzione composta $T(x(t), y(t), z(t))$ che rappresenta la temperatura del punto $(x(t), y(t), z(t))$ al tempo t .

Soluzione:

Al tempo $t = 0$ il punto si trova alle coordinate $(0, 0, 0)$ e quindi la temperatura in quel punto è $e^0 = 1$

Al tempo $t = 1$ il punto si trova alle coordinate $(1, 1, 1)$ e quindi la temperatura in quel punto è $e^{-1-1-1} = e^{-3}$.

La funzione composta e la sua derivata:

$$T(x(t), y(t), z(t)) = e^{-t-t^2-t^3} \rightarrow T'(x(t), y(t), z(t)) = e^{-t-t^2-t^3}(-1 - 2t - 3t^2)$$

Esercizi su integrali curvilinei

Esercizio 6.1. Calcolare la lunghezza della curva \mathcal{C} grafico della funzione $y = x^2$, $x \in [0, 1]$

Soluzione:

Il grafico indicato, un arco di parabola,

$$y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1$$

ha rappresentazione parametrica

$$\gamma(t) = \{t, t^2\}, \quad t \in [0, 1]$$

pertanto

$$\mathcal{L} = \int_0^1 \sqrt{1 + (2t)^2} dt$$

ovvero, posto $u = 2t$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int_0^2 \sqrt{1 + u^2} du$$

Tenuto presente che una primitiva di $\sqrt{1 + u^2}$ è

$$F(u) = \frac{1}{2} u \sqrt{u^2 + 1} + \frac{1}{2} \log(u + \sqrt{u^2 + 1})$$

si ha

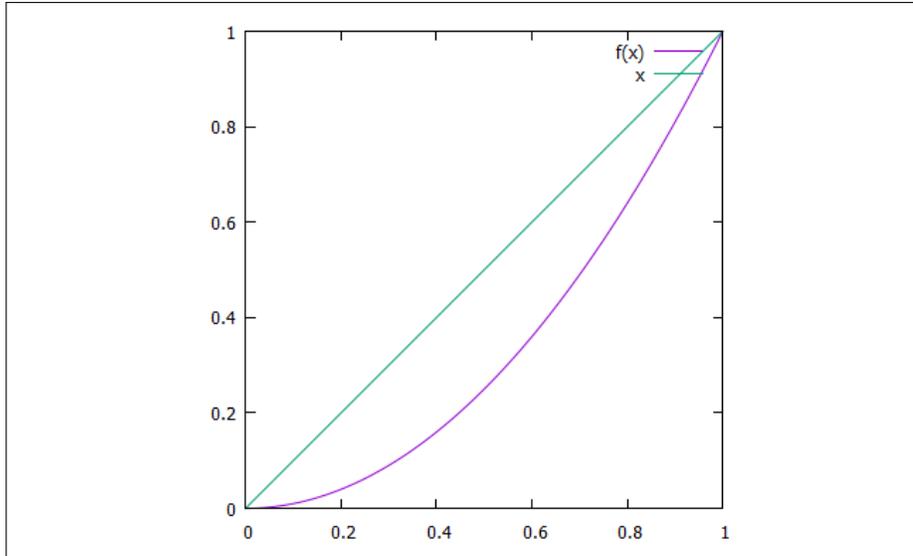
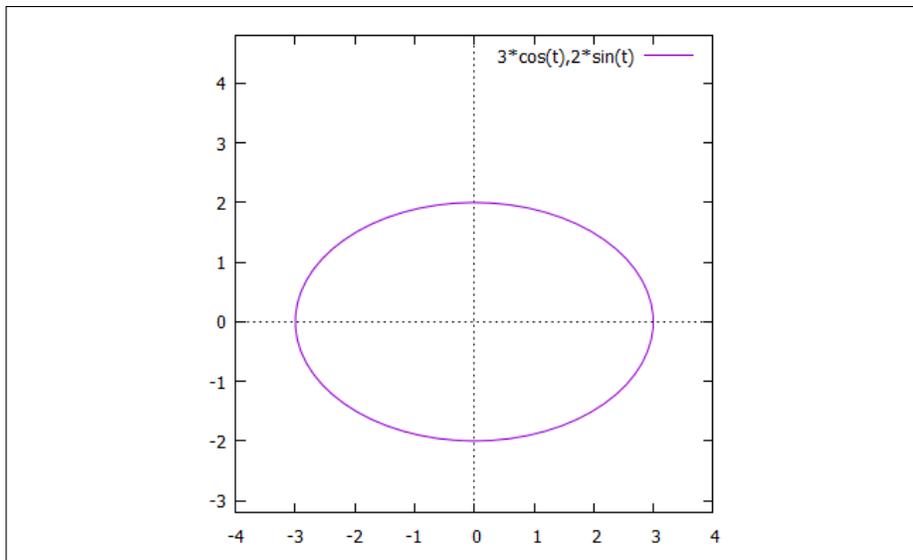
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{5} + \frac{1}{2} \log(2 + \sqrt{5}) \right) \approx 1.47894$$

Si noti, in Figura 1, come la lunghezza dell'arco di parabola, ≈ 1.47894 sia leggermente superiore alla lunghezza $\sqrt{2} \approx 1.414$ del segmento avente gli stessi estremi.

Esercizio 6.2. Sia \mathcal{C} la curva di rappresentazione parametrica $\gamma(t) = \{3 \cos(t), 2 \sin(t)\}$, $t \in [0, 2\pi]$:

- determinare i punti di \mathcal{C} corrispondenti a $t = 0$, $t = \pi/2$, $t = 3\pi/2$,
- determinare le equazioni delle rette tangenti a \mathcal{C} nei tre punti precedenti,
- determinare i vettori ortogonali a \mathcal{C} nei tre punti precedenti.

Soluzione:

FIGURA 1. $y = x^2$, $y = x$ FIGURA 2. $\gamma(t) = \{3 \cos(t), 2 \sin(t)\}, t \in [0, 2\pi]$

Esercizio 6.3. *Esaminare se le funzioni*

$$x(t) = \log(1+t), \quad y(t) = t - t^2, \quad z(t) = e^t$$

costituiscono per $t \in [2, 3]$ la rappresentazione parametrica di una curva regolare.

Soluzione:

Occorre verificare tre proprietà:

- le tre funzioni $x(t), y(t), z(t)$ assegnate siano di classer C^2 in $[2, 3]$. Cosa ovvia per $y(t)$ e $z(t)$ e certamente vera anche per $x(t)$ regolare per $t > -1$ e quindi in $[2, 3]$,
- le tre derivate non si annullino contemporaneamente in alcun punto dell'intervallo $[2, 3]$: cosa ovvia dal momento che $z'(t) \neq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$,
- valori $t_1 \neq t_2$ producano punti diversi: cosa ovvia osservando, ad esempio che $z(t)$ è strettamente crescente e quindi $t_1 \neq t_2 \rightarrow z(t_1) \neq z(t_2)$.

Esercizio 6.4. Scrivere una parametrizzazione dell'arco dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, contenuto nel semipiano $y \geq 0$.

Soluzione:

La parametrizzazione dell'ellisse è:

$$x(t) = a \cos(t), \quad y(t) = b \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

dove t rappresenta l'angolo relativo all'asse x . Quindi la parametrizzazione della porzione di ellisse richiesta è:

$$x(t) = a \cos(t), \quad y(t) = b \sin(t), \quad t \in [0, \pi]$$

Esercizio 6.5. Scrivere una rappresentazione parametrica della circonferenza del piano avente centro nel punto $C = (2, -1)$ e raggio $r = 3$.

Soluzione:

La parametrizzazione della circonferenza di centro l'origine e raggio r è:

$$x = r \cos(t), \quad y = r \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

La parametrizzazione di una circonferenza con centro $C = (a, b)$ sarà per tanto

$$x = a + r \cos(t), \quad y = b + r \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

E pertanto per la circonferenza assegnata si ha

$$x = 2 + 3 \cos(t), \quad y = -1 + 3 \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Esercizio 6.6. Scrivere una parametrizzazione regolare a tratti della poligonale dello spazio costituita dai lati del triangolo di vertici

$$A = (1; 0; 0), \quad B = (0; 2; 0), \quad C = (0; 0; 3),$$

percorsa nel verso ABC .

Soluzione:

La poligonale determinata dai lati del triangolo \triangle_{ABC} non è una curva regolare per via degli angoli in corrispondenza dei vertici.

Si parla pertanto di una parametrizzazione regolare a tratti.

$$\left\{ \begin{array}{l} AB: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in [0, 1] \\ BC: \begin{cases} x = 0 \\ y = -2t \\ z = 3t \end{cases} \quad t \in [0, 1] \\ CA: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 3 - 3t \end{cases} \quad t \in [0, 1] \end{array} \right.$$

Esercizio 6.7. Calcolare la lunghezza della curva

$$\gamma(t) = \left\{ t - 1, 1 - t^2, \frac{2}{3}t^3 \right\}, \quad t \in [0, 1]$$

Soluzione:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = t - 1 \quad \rightarrow \quad x'(t) = 1 \\ y(t) = 1 - t^2 \quad \rightarrow \quad y'(t) = -2t \\ z(t) = \frac{2}{3}t^3 \quad \rightarrow \quad z'(t) = 2t^2 \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 + 4t^2 + 4t^4 = (1 + 2t^2)^2$$

$$\mathcal{L} = \int_0^1 \sqrt{(1 + 2t^2)^2} dt = \int_0^1 (1 + 2t^2) dt = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Esercizio 6.8. Calcolare la lunghezza della curva $\gamma(t) = \{e^t, e^t + 1\}$, $t \in [0, 1]$ e confrontare tale lunghezza con quella del segmento di estremi $A = \gamma(0)$, $B = \gamma(1)$.

Soluzione:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = e^t \quad \rightarrow \quad x' = e^t \\ y = e^t + 1 \quad \rightarrow \quad y' = e^t \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad x'^2 + y'^2 = 2e^{2t}$$

$$\mathcal{L} = \int_0^1 \sqrt{2e^{2t}} dt = \sqrt{2} \int_0^1 e^t dt = \sqrt{2}(e - 1)$$

$$AB = \sqrt{(e - 1)^2 + (e - 1)^2} = \sqrt{2}(e - 1)$$

La curva e il segmento hanno la stessa lunghezza: se ne deduce che la curva è essa stessa il segmento AB !

Infatti la rappresentazione parametrica assegnata implica

$$y = x + 1$$

punti cioè di una retta.

Esercizio 6.9. Calcolare la lunghezza della curva espressa in equazione polare

$$\rho = 1 + \cos(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Soluzione:

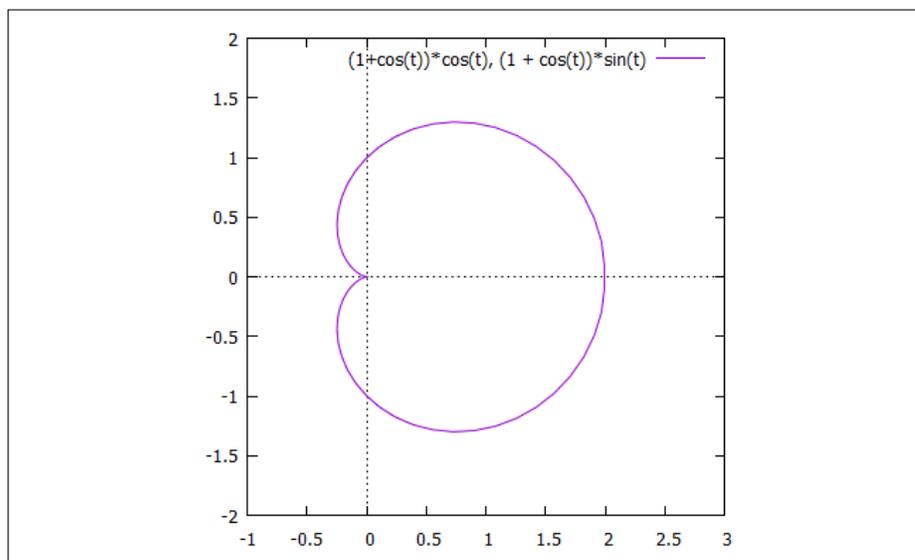


FIGURA 3. $\rho = 1 + \cos(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$

La rappresentazione polare con $\rho = f(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ implica

$$x(\theta) = f(\theta) \cos(\theta), \quad y(\theta) = f(\theta) \sin(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Ne segue

$$\begin{cases} x'(\theta) = f'(\theta) \cos(\theta) - f(\theta) \sin(\theta) \\ y'(\theta) = f'(\theta) \sin(\theta) + f(\theta) \cos(\theta) \end{cases} \rightarrow x'^2 + y'^2 = f'^2(\theta) + f^2(\theta)$$

Nel caso assegnato, $f(\theta) = 1 + \cos(\theta)$, si ha pertanto

$$\mathcal{L} = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\sin^2(\theta) + 1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta))} d\theta = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos(\theta)} d\theta$$

Tenuto conto della relazione goniometrica

$$\left| \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}}$$

riesce

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos(\theta)} d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| d\theta = \\ &= 4 \int_0^{\pi} |\cos(\alpha)| d\alpha = 8 \int_0^{\pi/2} |\cos(\alpha)| d\alpha = 8\end{aligned}$$

Esercizio 6.10. *Calcolare la lunghezza della cicloide*

$$\begin{cases} x = r(t - \sin(t)) \\ y = r(1 - \cos(t)) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Soluzione:

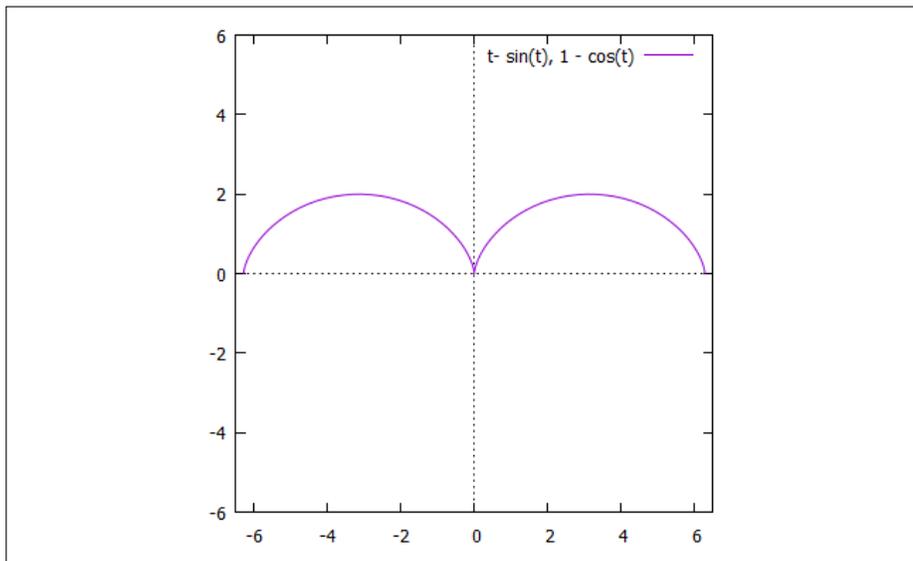


FIGURA 4. $x = 1(t - \sin(t))$, $y = 1(1 - \cos(t))$, $t \in [-2\pi, 2\pi]$

$$\begin{cases} x = r(t - \sin(t)) & \rightarrow & x' = r(1 - \cos(t)) \\ y = r(1 - \cos(t)) & \rightarrow & y' = r \sin(t) \end{cases} \quad \rightarrow \quad x'^2 + y'^2 = r^2 ((1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t))$$

$$\mathcal{L} = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 ((1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t))} dt = r\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos(t)} dt =$$

Tenuta presente la nota relazione trigonometrica

$$\sqrt{\frac{1 - \cos(t)}{2}} = \left| \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right|$$

si ha

$$\mathcal{L} = 2r \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 4r \int_0^{\pi} \sin(\alpha) d\alpha = 8r$$

Esercizio 6.11. Calcolare la lunghezza della curva \mathcal{C} grafico della funzione

$$f(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}, \quad x \in [1, 4]$$

Soluzione:

Il grafico assegnato corrisponde alla rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \rightarrow x^2 + y^2 = 1 + f'^2(t) = 1 + (t-1) = t$$

Da cui

$$\mathcal{L} = \int_1^4 \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} \Big|_1^4 = \frac{14}{3}$$

Esercizio 6.12. Sia \mathcal{C} la curva di rappresentazione parametrica $\gamma(t) = \{e^t \cos(t), e^t \sin(t)\}$, $t \in [-2\pi, 2\pi]$

- dire se si tratta di una curva chiusa,
- determinare la retta tangente a \mathcal{C} nel punto corrispondente a $t_0 = 0$,
- determinare la lunghezza di \mathcal{C} .

Soluzione:

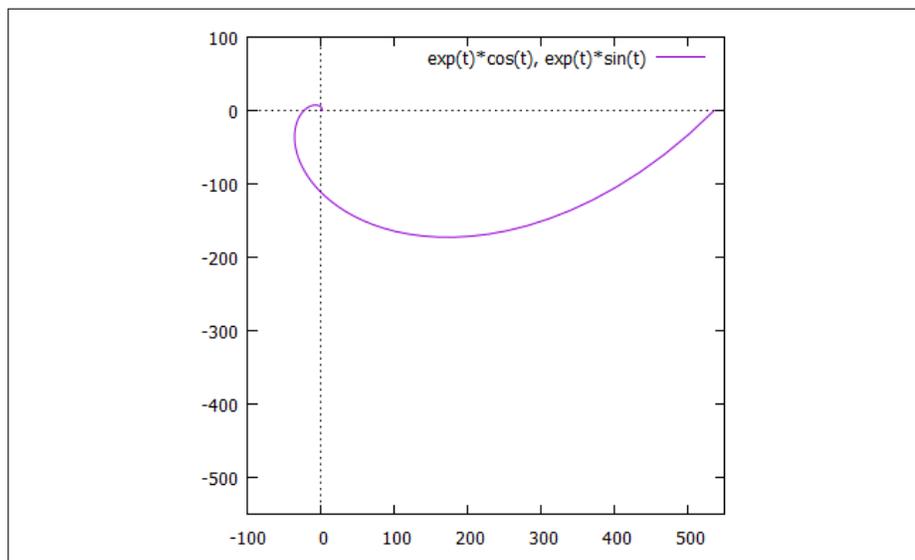


FIGURA 5. $\gamma(t) = \{e^t \cos(t), e^t \sin(t)\}$, $t \in [-2\pi, 2\pi]$

- Si parla di curva chiusa se gli estremi coincidono:

$$\gamma(-2\pi) = (e^{-2\pi}, 0), \quad \gamma(2\pi) = (e^{2\pi}, 0)$$

punti diversi;

- la retta tangente nel punto $\gamma(0) = (1, 0)$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + x'(0)t = 1 + t \\ y = 0 + y'(0)t = t \end{cases}$$

- $x'^2 + y'^2 = 2e^{2t}$ da cui

$$\mathcal{L} = \int_{-2\pi}^{2\pi} \sqrt{2e^{2t}} dt = \sqrt{2} (e^{2\pi} - e^{-2\pi})$$

Esercizio 6.13. Sia \mathcal{C} la curva di rappresentazione parametrica $\gamma(t) = \{\sin(t), \cos(t)\}$ $t \in [0; \pi/4]$, calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\mathcal{C}} \sqrt{1-y^2} ds$$

Soluzione:

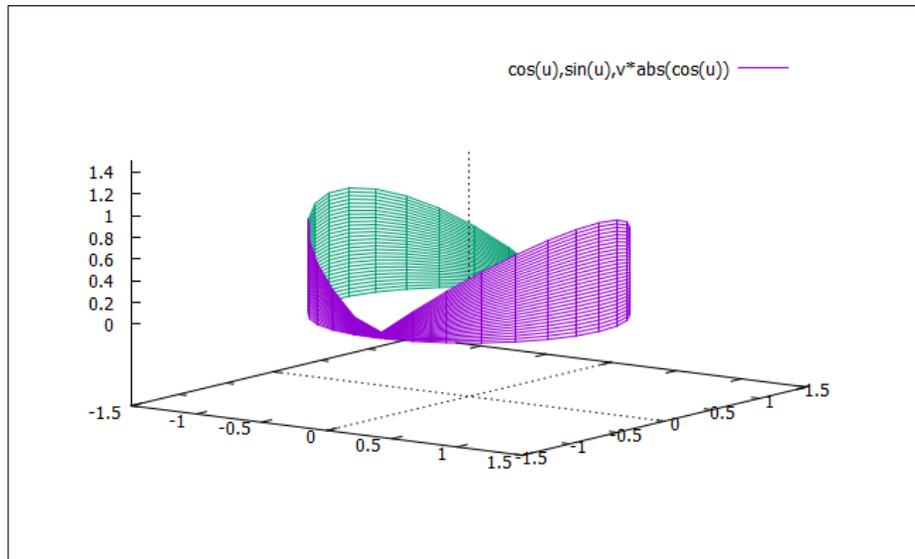


FIGURA 6. $\int_{\mathcal{C}} \sqrt{1-y^2} ds$

Per definizione se la curva è rappresentata con $t \in [a, b]$ si ha

$$\int_{\mathcal{L}} f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$$

pertanto

$$\int_{\mathcal{C}} \sqrt{1-y^2} ds = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1-\sin^2(t)} \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} dt = \int_0^{\pi/4} \cos(t) dt = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Il valore trovato rappresenta l'area del *muro* costruito sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1 e di altezza in ogni punto (x, y) della circonferenza pari a $\sqrt{1-y^2}$

Esercizio 6.14. Sia \mathcal{C} la curva di rappresentazione parametrica $\gamma(t) = \{t, e^t\}$, $t \in [0, \pi/2]$ e sia $f(x, y) = y^2$. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y) ds$$

Soluzione:

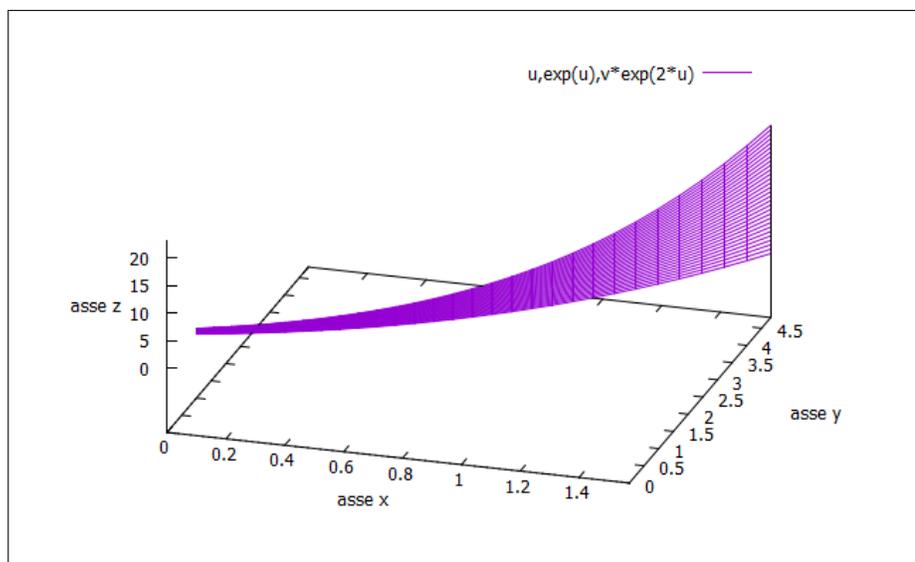


FIGURA 7. $\gamma(t) = \{t, e^t\}$, $t \in [0, \pi/2]$, $\int_{\mathcal{C}} y^2 ds$

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{1 + e^{2t}} dt \quad \rightarrow \quad \int_{\mathcal{C}} e^{2t} ds = \int_{\mathcal{C}} e^{2t} \sqrt{1 + e^{2t}} dt = \\ &= \frac{1}{2} \frac{2}{3} (1 + e^{2t})^{3/2} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{3} \left((1 + e^{2\pi})^{3/2} - 2^{3/2} \right) \end{aligned}$$

Il valore trovato rappresenta l'area del muro curvo e di altezza y^2 in ogni suo punto, colorato in Figura 7.

Esercizio 6.15. Sia \mathcal{C} la curva di rappresentazione parametrica

$$\gamma(t) = \{2(\cos(t) + t \sin(t)); 2(\sin(t) - t \cos(t))\}; t \in [0; 2\pi]$$

Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2 + y^2} ds$$

Soluzione:

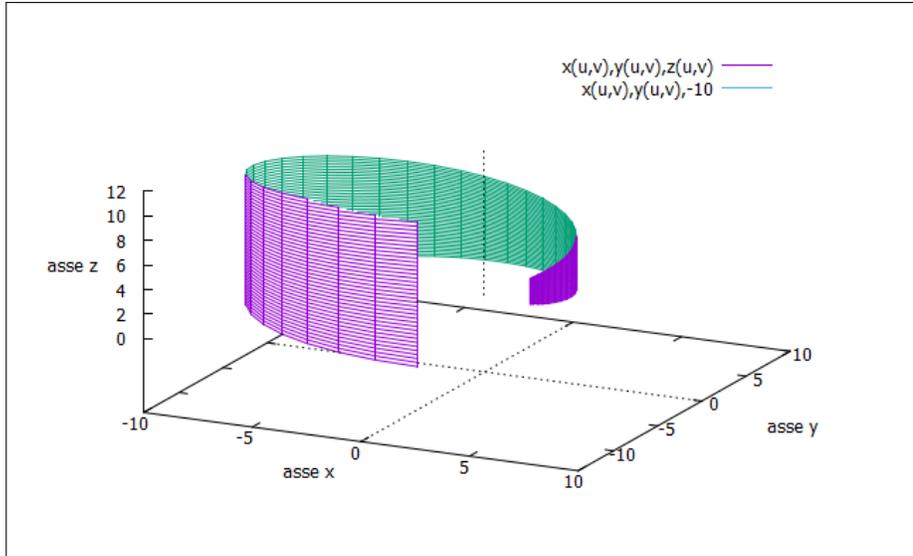


FIGURA 8. $\gamma(t) = \{2(\cos(t) + t \sin(t)); 2(\sin(t) - t \cos(t))\}; t \in [0; 2\pi], \int_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2 + y^2} ds$

$$\begin{cases} x(t) = 2(\cos(t) + t \sin(t)) & \rightarrow & x'(t) = 2t \cos(t) \\ y(t) = 2(\sin(t) - t \cos(t)) & \rightarrow & y'(t) = 2t \sin(t) \end{cases} \quad ds = 2t dt$$

$$\int_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2 + y^2} ds = \int_0^{2\pi} 4(1+t^2) 2t dt = 16\pi^2 (1 + 2\pi^2)$$

Esercizio 6.16. *Calcolare*

$$\int_{\partial T} (x+y) ds$$

essendo T il triangolo di vertici $A(1;0)$, $O(0;0)$, $B(0;1)$.

Soluzione:

$$\begin{aligned} \int_{\partial T} (x+y) ds &= \int_{AO} (x+y) ds + \int_{OB} (x+y) ds + \int_{BA} (x+y) ds \\ \int_{AO} (x+y) ds &= \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \\ \int_{OB} (x+y) ds &= \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \\ \int_{BA} (x+y) ds &= \int_0^1 1 \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \\ \int_{\partial T} (x+y) ds &= 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

Esercizi su campi vettoriali

Esercizio 7.1. Sia $\mathbf{F} = \{x, -y\}$

- disegnare con le "freccette" il campo \mathbf{F} nei quattro punti $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$,
- calcolare il modulo di \mathbf{F} ,
- disegnare con le "freccette" il campo $-2\mathbf{F}$ nei quattro punti $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$.

Soluzione:

$$|\mathbf{F}|^2 = x^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad |\mathbf{F}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

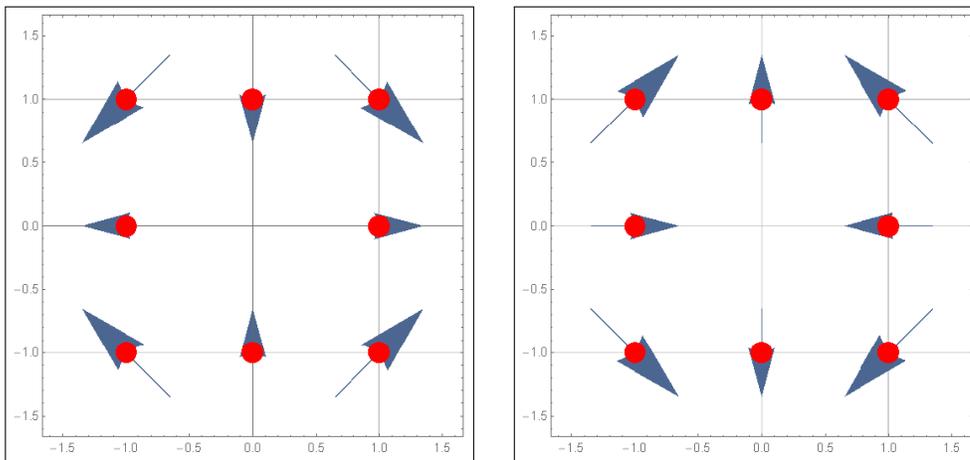


FIGURA 1. $\mathbf{F} = \{x, -y\}$, $-2\mathbf{F}$

Esercizio 7.2. Sia $\mathbf{F} = \{\sin(x), \cos(y)\}$

- disegnare con le "freccette" il campo \mathbf{F} nei quattro punti $(\pi, 0)$, $(0, \pi)$, $(-\pi, 0)$, $(0, -\pi)$,
- calcolare il modulo di \mathbf{F} nell'origine,
- determinare $U(x, y)$ tale che $\mathbf{F} = \nabla U$.

Soluzione:

$$\mathbf{F}(0, 0) = \{0, 1\} \quad \rightarrow \quad |\mathbf{F}| = 1$$

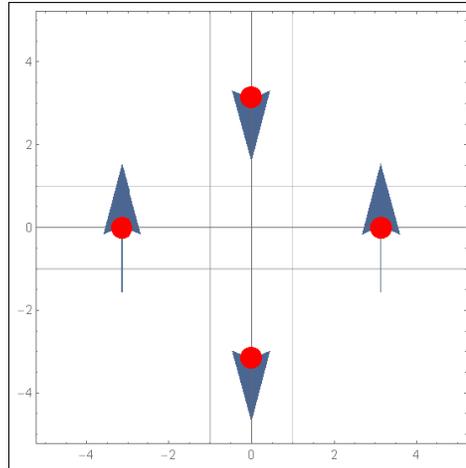


FIGURA 2. $\mathbf{F} = \{\sin(x), \cos(y)\}$ Esercizio 7.2

$$\begin{cases} U_x(x,y) = \sin(x) \\ U_y(x,y) = \cos(y) \end{cases} \rightarrow U(x,y) = -\cos(x) + \sin(y) + k$$

Esercizio 7.3. Sia $\mathbf{F}(x,y) = \{x^2, e^y\}$

- disegnare con le "freccette" il campo \mathbf{F} nei quattro punti $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$,
- determinare un campo $\mathbf{G}(x,y)$ che sia in ogni punto ortogonale ad $\mathbf{F}(x,y)$
- calcolare un potenziale $U(x,y)$ per il campo $\mathbf{F}(x,y)$

Soluzione:

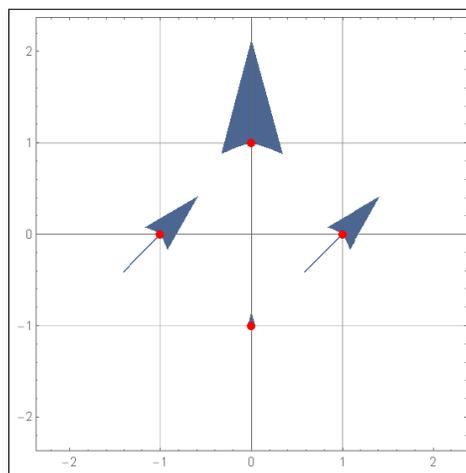


FIGURA 3. $\mathbf{F}(x,y) = \{x^2, e^y\}$

$$G(x,y) = \{A(x,y), B(x,y)\} : x^2 A(x,y) + e^y B(x,y) = 0 \rightarrow \begin{cases} A(x,y) = -e^y \\ B(x,y) = x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_x(x,y) = x^2 \\ U_y(x,y) = e^y \end{cases} \rightarrow U(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + e^y + k$$

Esercizio 7.4. *Assegnato il campo*

$$F(x,y,z) = \{z, -y, 2x\}$$

e la curva \mathcal{C} di rappresentazione parametrica

$$\gamma(t) = \{t, t^2, t^3\}, \quad t \in [0, 1]$$

- calcolare il vettore $\tau(t)$ tangente a \mathcal{C} in ogni suo punto,
- calcolare il prodotto scalare $F \cdot \tau$ in ogni punto di \mathcal{C} ,
- calcolare il lavoro di F lungo \mathcal{C} .

Soluzione:

Il vettore tangente ad una curva $\gamma(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ è, per definizione,

$$\tau(t) = \frac{\{x'(t), y'(t), z'(t)\}}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

pertanto nel caso assegnato si ha

$$\tau(t) = \frac{\{1, 2t, 3t^2\}}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}$$

Il prodotto scalare $F \cdot \tau$ è pertanto

$$\{t^3, -t^2, 2t\} \cdot \frac{\{1, 2t, 3t^2\}}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}} = \frac{5t^3}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}$$

$$\mathcal{W} = \int_{\mathcal{C}} F \cdot \tau ds = \int_0^1 5t^3 dt = \frac{5}{4}$$

Esercizio 7.5. *Determinare un potenziale del campo $F(x,y) = \{x^2y^3, x^3y^2\}$.*

Soluzione:

Le componenti del campo assegnato F soddisfano la condizione necessaria

$$(x^2y^3)_y = (x^3y^2)_x$$

Pertanto può esistere un potenziale $U(x,y)$:

$$U_x(x,y) = x^2y^3 \rightarrow U(x,y) = \int_0^x t^2 y^3 dt + c(y) = \frac{1}{3}x^3y^3 + c(y)$$

$$\left(\frac{1}{3}x^3y^3 + c(y)\right)_y = x^3y^2 + c'(y) = x^3y^2 \rightarrow c'(y) = 0 \rightarrow c(y) = k$$

Le funzioni

$$U(x,y) = \frac{1}{3}x^3y^3 + k$$

sono potenziali del campo \mathbf{F} assegnato.

Esercizio 7.6. *Determinare il lavoro del campo $F(x, y) = \{x^2y^2, x^3y\}$ lungo la poligonale frontiera del quadrato*

$$A = (0, 0), B = (1, 0), C = (1, 1), D = (0, 1)$$

percorsa nel verso antiorario.

Soluzione:

Il lavoro richiesto è la somma dei 4 lavori del campo lungo i 4 segmenti lati del quadrato. È facile parametrizzare i 4 segmenti coordinati

$$\begin{cases} AB & x = t, & y = 0 \\ BC & x = 1, & y = t \\ CD & x = 1 - t, & y = 1 \\ DA & x = 0, & y = 1 - t \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

$$\begin{cases} \int_{AB} 0 dt & = 0 \\ \int_{BC} t dt & = \frac{1}{2} \\ \int_{CD} -(1-t)^2 dt & = -\frac{1}{3} \\ \int_{DA} 0 dt & = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \mathcal{W} = \frac{1}{6}$$

Esercizio 7.7. *Sia $\mathbf{F}(x, y) = \{xy + x^3, \frac{1}{2}x^2 + y\}$*

- *determinare un potenziale $U(x, y)$ di \mathbf{F} ,*
- *determinare il lavoro \mathcal{W} di \mathbf{F} lungo la curva $\gamma(t) = \{t \cos(t), t \sin(t)\}, t \in [0, \pi]$*
- *confrontare il valore \mathcal{W} con $U(\gamma(1)) - U(\gamma(0))$*

Soluzione:

Le componenti di $\mathbf{F}(x, y) = \{xy + x^3, \frac{1}{2}x^2 + y\}$ soddisfano la condizione necessaria

$$(xy + x^3)_y = \left(\frac{1}{2}x^2 + y\right)_x$$

pertanto può esistere un potenziale $U(x, y)$

$$U_x(x, y) = xy + x^3 \quad \rightarrow \quad U(x, y) = \int_0^x (ty + t^3) dt + c(y) = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{4}x^4 + c(y)$$

$$U_y(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + c'(y) = \frac{1}{2}x^2 + y \quad \rightarrow \quad c'(y) = y \quad \rightarrow \quad c(y) = \frac{1}{2}y^2 + k$$

Da cui le funzioni

$$U(x, y) = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}y^2 + k$$

sono potenziali del campo assegnato.

$$\int_0^\pi \left\{ t^2 \cos(t) \sin(t) + t^3 \cos^3(t), \frac{1}{2}t^2 \cos^2(t) + t \sin(t) \right\} \cdot \{ \cos(t) - t \sin(t), \sin(t) + t \cos(t) \} dt$$

Svolgendo i calcoli si ottiene $\mathcal{W} = \frac{\pi^4}{4}$.

Il valore ottenuto coincide con la variazione dei potenziali ottenuti tra il punto $B = (-\pi, 0)$ finale della curva e quello $O = (0, 0)$ iniziale.

A titolo di verifica si può facilmente calcolare il lavoro del campo lungo il segmento OB che ha la ovvia rappresentazione parametrica $x = -t, y = 0, \quad t \in [0, \pi]$

$$\mathcal{W} = \int_0^\pi (-t^3)(-1)dt = \frac{1}{4}\pi^4$$

Esercizio 7.8. Sia $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ e sia $\mathbf{F} = \nabla f$

- calcolare le componenti di \mathbf{F} ,
- calcolare il lavoro di \mathbf{F} lungo la circonferenza di centro l'origine e raggio $r = 1$ percorsa in verso antiorario,
- calcolare il lavoro di \mathbf{F} lungo una curva che vada da $A = (1, 0)$ a $B = (0, 2)$

Soluzione:

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \quad \rightarrow \quad \nabla f(x, y) = \left\{ -\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2}, -\frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} \right\}$$

Il lavoro del campo F , un campo gradiente, lungo qualsiasi curva da A a B coincide con la differenza di potenziale $f(B) - f(A)$

Pertanto essendo la circonferenza assegnata una curva chiusa, $A = B$ il lavoro sarà nullo.

Il lavoro sempre del campo gradiente assegnato lungo una qualsiasi curva da $A = (1, 0)$ a $B = (0, 2)$ vale

$$f(0, 2) - f(1, 0) = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

Esercizio 7.9. Sia $\mathbf{F} = \{3x^2y, x^3 + y^2\}$

- calcolare il lavoro di \mathbf{F} lungo il segmento da $A = (1, 0)$ a $B = (0, 1)$,
- determinare un potenziale per \mathbf{F} ,
- calcolare l'integrale $\int_{\mathcal{C}} (3x^2y)dx + (x^3 + y^2)dy$ essendo \mathcal{C} la circonferenza di centro l'origine e raggio $r = 1$.

Soluzione:

Il segmento AB si parametrizza con

$$x = 1 - t, y = t, \quad t \in [0, 1]$$

pertanto

$$\mathcal{W}_{AB} = \int_0^1 \{3(1-t)^2 t, (1-t)^3 + t^2\} \cdot \{-1, 1\} dt = \int_0^1 (-4t^3 + 10t^2 - 6t + 1) dt = \frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} U_x(x, y) = 3x^2 y \\ U_y(x, y) = x^3 + y^2 \end{cases} \rightarrow U(x, y) = x^3 y + c(y)$$

$$U_y(x, y) = x^3 + c'(y) = x^3 + y^2 \rightarrow c'(y) = y^2 \rightarrow c(y) = \frac{1}{3}y^3 + k$$

I potenziali sono pertanto

$$U(x, y) = x^3 y + \frac{1}{3}y^3 + k$$

Torna anche il calcolo di \mathcal{W} precedente

$$\mathcal{W}_{AB} = \frac{1}{3} = U(0, 1) - U(1, 0)$$

Esercizio 7.10. Assegnato il campo $\mathbf{F}(x, y, z) = \{yz + 3y, xz + 3x, xy - 2\}$

- Si calcoli il lavoro di \mathbf{F} lungo il segmento da $O = (0, 0, 0)$ a $B = (1, 1, 1)$
- Si calcoli il lavoro di \mathbf{F} lungo la poligonale di vertici $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$
- Si determini un potenziale di \mathbf{F} .

Soluzione:

Il segmento OB si parametrizza con $x = t, y = t, z = t, t \in [0, 1]$: pertanto

$$\mathcal{W}_{OB} = \int_0^1 \{t^2 + 3t, t^2 + 3t, t^2 - 2\} \cdot \{1, 1, 1\} dt = 2$$

Il lavoro lungo la poligonale è la somma dei lavori lungo i tre segmenti

$$\int_0^1 0 dt + \int_0^1 3 dt + \int_0^1 \{1 - 2\} dt = 2$$

Esaminiamo prima di tutto se le 3 componenti $\{A, B, C\} = \{yz + 3y, xz + 3x, xy - 2\}$ del campo assegnato verifichino le condizioni necessarie:

$$\begin{cases} A_y = B_x & z + 3 = z + 3 \\ A_z = C_x & y = y \\ B_z = C_y & x = x \end{cases}$$

Superata, positivamente, tale verifica cominciamo la costruzione dei potenziali $U(x, y, z)$:

$$U_x(x, y, z) = yz + 3y \rightarrow U(x, y, z) = yzx + 3yx + c(y, z)$$

$$U_y(x, y, z) = xz + 3x \rightarrow zx + 3x + c_y(y, z) = xz + 3x \rightarrow c_y(y, z) = 0 \rightarrow c(y, z) = k(z)$$

Da cui

$$U(x, y, z) = yzx + 3yx + k(z)$$

La terza condizione

$$U_z(x, y, z) = xy - 2 \rightarrow yx + k'(z) = xy - 2 \rightarrow k'(z) = -2 \rightarrow k(z) = -2z + h$$

Si ottiene quindi, complessivamente,

$$U(x, y, z) = yzx + 3yx - 2z + h$$

Si riconosce che il lavoro $\mathcal{W} = 2$ precedentemente trovato sia lungo il segmento OB sia lungo la poligonale con gli stessi estremi coincide anche con la differenza dei potenziali tra B ed O :

$$U(1, 1, 1) - U(0, 0, 0) = 2$$

Esercizio 7.11. *Assegnato il campo*

$$\mathbf{F} = \left\{ \log(x+y) + \frac{x}{x+y}, \frac{x}{x+y} \right\}$$

- *determinare l'insieme di definizione,*
- *calcolare il lavoro lungo il segmento da $A = (4, 0)$ a $B = (0, 4)$,*
- *determinare un potenziale di \mathbf{F} .*

Soluzione:

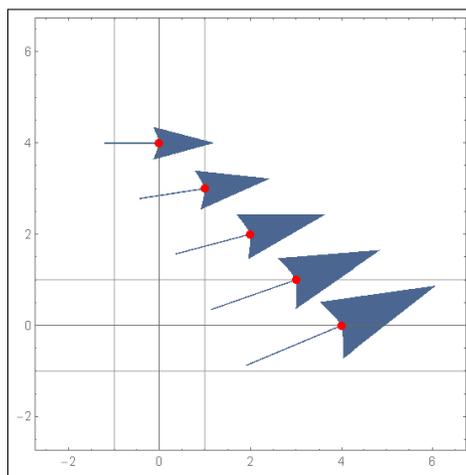


FIGURA 4. $\mathbf{F} = \left\{ \log(x+y) + \frac{x}{x+y}, \frac{x}{x+y} \right\}$

Le componenti del campo $\mathbf{F} = \left\{ \log(x+y) + \frac{x}{x+y}, \frac{x}{x+y} \right\}$ contengono funzioni definite solo su una parte del piano:

$$\left\{ \begin{array}{l} \log(x+y) \\ \frac{x}{x+y} \end{array} \right| \begin{array}{l} x+y > 0 \\ x+y \neq 0 \end{array} \rightarrow x+y > 0$$

L'insieme di definizione del campo \mathbf{F} è pertanto il semipiano $x+y > 0$.

Il segmento da $A = (4, 0)$ a $B = (0, 4)$ ha la parametrizzazione $x = 4 - 4t$, $y = 4t$, $t \in [0, 1]$, pertanto

$$\mathcal{W}_{AB} = \int_0^1 \left\{ \log(4) + \frac{4-4t}{4}, \frac{4-4t}{4} \right\} \cdot \{-4, 4\} dt = -4 \log(4)$$

Verifichiamo per le componenti $\{A, B\} = \left\{ \log(x+y) + \frac{x}{x+y}, \frac{x}{x+y} \right\}$ del campo la condizione necessaria

$$A_y(x, y) = B_x(x, y) \rightarrow \frac{1}{x+y} - \frac{x}{(x+y)^2} = \frac{x+y-x}{(x+y)^2}$$

Superata, positivamente, tale verifica cerchiamo i potenziali $U(x, y)$:

$$U_y(x, y) = \frac{x}{x+y} \rightarrow U(x, y) = x \log(x+y) + c(x)$$

da cui

$$\begin{aligned} U_x(x, y) = \log(x+y) + \frac{x}{x+y} &\rightarrow \log(x+y) + \frac{x}{x+y} + c'(x) = \log(x+y) + \frac{x}{x+y} \rightarrow \\ &\rightarrow c'(x) = 0 \rightarrow c(x) = k \end{aligned}$$

Pertanto i potenziali sono

$$U(x, y) = x \log(x+y) + k$$

Si riconosce il valore $\mathcal{W}_{AB} = -4 \log(4)$ precedentemente trovato

$$U(0, 4) - U(4, 0) = -4 \log(4)$$

Esercizio 7.12. Assegnata la forma differenziale $\omega(x, y) = x^2 dx + y^2 dy$

- esaminare se si tratta di una forma chiusa,
- determinare $U(x, y)$ tale che $\omega = dU$,
- calcolare l'integrale di ω lungo la semicirconferenza di centro l'origine da $A = (1, 0)$ a $B = (-1, 0)$.

Soluzione:

Assegnare la forma differenziale $\omega(x, y) = x^2 dx + y^2 dy$ equivale ad assegnare il campo $\mathbf{F} = \{x^2, y^2\}$.

L'affermazione la forma è chiusa equivale a riconoscere che le componenti $\{A, B\}$ del campo verifichino la condizione necessaria $A_y = B_x$, condizione in questo caso ovviamente soddisfatta.

La semicirconferenza di centro l'origine da $A = (1, 0)$ a $B = (-1, 0)$ ha la rappresentazione parametrica $x = \cos(t), y = \sin(t)$, $t \in [0, \pi]$, pertanto

$$\mathcal{W}_{AB} = \int_0^\pi \{\cos^2(t)(-\sin(t)) + \sin^2(t) \cos(t)\} dt = \frac{2}{3}$$

È evidente che scelto $U(x, y) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + h$ riesce

$$dU = x^2 dx + y^2 dy$$

È anche ovvio che

$$\mathcal{W}_{AB} = \frac{2}{3} = U(-1, 0) - U(1, 0)$$

Esercizio 7.13. Assegnata la forma differenziale $\omega(x, y) = y^2 dx + x^2 dy$

- esaminare se si tratta di una forma chiusa,
- calcolare l'integrale di ω lungo la circonferenza di centro l'origine e raggio $r = 1$ percorsa nel verso antiorario,
- calcolare l'integrale di ω lungo il diametro da $A = (-1, 0)$ a $B = (1, 0)$.

Soluzione:

Riconoscere che $\omega(x, y) = y^2 dx + x^2 dy$ sia chiusa significa vedere se $(y^2)_y = (x^2)_x$: poichè l'uguaglianza non si verifica se ne conclude che la forma differenziale non è chiusa.

Tenuto conto della nota rappresentazione della circonferenza \mathcal{C} si ha

$$\mathcal{W}_{\mathcal{C}} = \int_0^{2\pi} \{\sin^2(t)(-\sin(t)) + \cos^2(t) \cos(t)\} dt = 0$$

Il lavoro lungo il segmento da $A = (-1, 0)$ a $B = (1, 0)$, segmento parametrizzato da $x = -1 + 2t, y = 0, t \in [0, 1]$ vale

$$\mathcal{W}_{AB} = \int_0^1 0 dt = 0$$

Esercizio 7.14. Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il campo vettoriale $F(x, y) = \{2x^2 + y^2, kxy\}$ compie lavoro nullo lungo la circonferenza di centro l'origine e raggio $r = 1$.

Soluzione:

Servendosi dell'usuale parametrizzazione della circonferenza si ha

$$\mathcal{W} = \int_0^{2\pi} \{2\cos^2(t) + \sin^2(t), k \sin(t) \cos(t)\} \cdot \{-\sin(t), \cos(t)\} dt = 0$$

Quindi il lavoro viene nullo qualunque sia k .

Esercizio 7.15. Sia $\mathbf{F}(x, y, z) = \{y + z, z + x, x + y\}$ e sia $\gamma(t) = \{a \cos(t), a \sin(t), bt\}$, $t \in [0, 2\pi]$

- calcolare il lavoro di \mathbf{F} lungo γ
- calcolare il lavoro di \mathbf{F} lungo il segmento da $A = (a, 0, 0)$ a $B = (a, 0, 2\pi b)$
- calcolare un potenziale di \mathbf{F} .

Soluzione:

$$\mathcal{W}_\gamma = \int_0^{2\pi} \{a \sin(t) + bt, bt + a \cos(t), a \cos(t) + a \sin(t)\} \cdot \{-a \sin(t), a \cos(t), b\} dt = 2\pi ab$$

Il segmento AB si parametrizza con $x = a, y = 0, z = 2\pi t$, $t \in [0, 1]$: pertanto

$$\mathcal{W}_{AB} = \int_0^1 (a + 0) 2\pi b dt = 2\pi ab$$

La costruzione del potenziale $U(x, y, z)$, verificato che le tre componenti $\{A, B, C\} = \{y + z, z + x, x + y\}$ soddisfano le condizioni necessarie

$$\begin{aligned} A_y = B_x &\rightarrow (y + z)_y = (z + x)_x \\ A_z = C_x &\rightarrow (y + z)_z = (x + y)_x \\ B_z = C_y &\rightarrow (z + x)_z = (x + y)_y \end{aligned}$$

può cominciare da

$$U(x, y, z) = \int_0^x (y + z) dt + c(y, z) = yx + zx + c(y, z)$$

$$U_y(x, y, z) = x + c_y(y, z) = z + x \rightarrow c(y, z) = zy + k(y) \rightarrow U(x, y, z) = yx + zx + zy + k(y)$$

$$U_z(x, y, z) = x + y + h \rightarrow U(x, y, z) = yx + zx + zy + h$$

L'espressione delle $U(x, y, z)$ trovate concordano con il lavoro calcolato sul segmento AB :

$$\mathcal{W}_{AB} = 2\pi ab = U(a, 0, 2\pi b) - U(a, 0, 0)$$

e su quello calcolato sull'elica γ .

Esercizi su integrali doppi

Esercizio 8.1. Assegnata la funzione $f(x,y) = 1 + x$ e detto E il rettangolo $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 2$ sia V il solido di base E delimitato superiormente dal grafico di $f(x,y)$:

- calcolare le altezze di V in corrispondenza ai quattro spigoli, cioè ai vertici di E ,
- calcolare il volume di V con i mezzi della geometria elementare,
- calcolare l'integrale doppio $\iint_E f(x,y) dx dy$.

Soluzione:

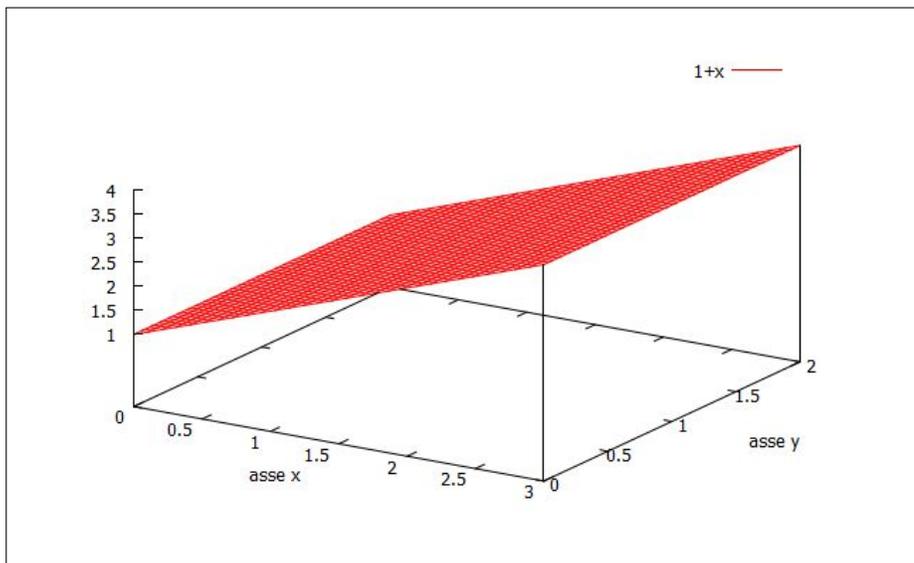


FIGURA 1. $f(x,y) = 1 + x$, $E : 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2$

$$f(0,0) = 1, \quad f(3,0) = 4, \quad f(0,2) = 1, \quad f(3,2) = 4$$

Si tratta del volume di un prisma costruito su un trapezio di area $15/2$ (la faccia verticale che si vede sul piano xz) e di altezza 2: volume = base \times altezza = 15.

$$\iint_E (1+x) dx dy = \int_0^2 \left[\int_0^3 (1+x) dx \right] dy = \int_0^2 (3+9/2) dy = 15$$

Esercizio 8.2. Sia $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ e sia Q il quadrato di estremi $(-1, -1)$ e $(1, 1)$: detto V il solido di base Q delimitato superiormente dal grafico di $f(x,y)$:

- determinare le altezze di V relative agli spigoli, cioè ai vertici del quadrato e rispetto al centro,
- stimare il volume di V per difetto e per eccesso servendosi dei volumi di parallelepipedi completamente contenuti in V e di parallelepipedi che contengano V ,
- calcolare l'integrale doppio $\iint_Q f(x,y) dx dy$.

Soluzione:

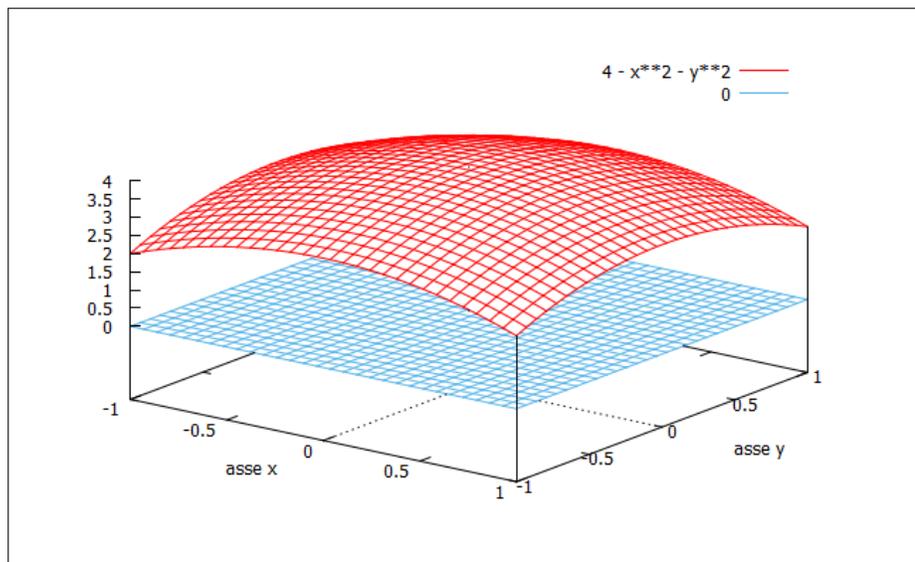


FIGURA 2. $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ $Q: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$

Le altezze richieste in corrispondenza ai quattro vertici sono tutte uguali

$$h = f(1, 1) = f(-1, 1) = f(-1, -1) = f(1, -1) = 2$$

L'altezza nel centro è maggiore e vale $f(0,0) = 4$.

È evidente che il volume di V sarà:

- maggiore di quello del parallelepipedo costruito su Q e di altezza $h = 2$, volume = 8,
- minore di quello del parallelepipedo costruito su Q e di altezza $h = 4$, volume = 16.

$$\begin{aligned} \iint_Q (4 - x^2 - y^2) dx dy &= \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 (4 - x^2 - y^2) dx \right] dy = \\ &= \int_{-1}^1 \left(8 - \frac{2}{3} - 2y^2 \right) dy = \frac{40}{3} \approx 13.333 \end{aligned}$$

volume certamente compreso tra 8 e 16 come previsto.

Esercizio 8.3. Sia $f(x,y) = |y|$ e sia Q il quadrato di estremi $(-1, -1)$ e $(1, 1)$: detto V il solido di base Q delimitato superiormente dal grafico di $f(x,y)$:

- determinare i punti $(x,y,z) \in V$ che hanno la coordinata z rispettivamente più bassa e più alta,
- calcolare il volume di V con i mezzi della geometria elementare,
- calcolare l'integrale doppio $\iint_E f(x,y) dx dy$.

Soluzione:

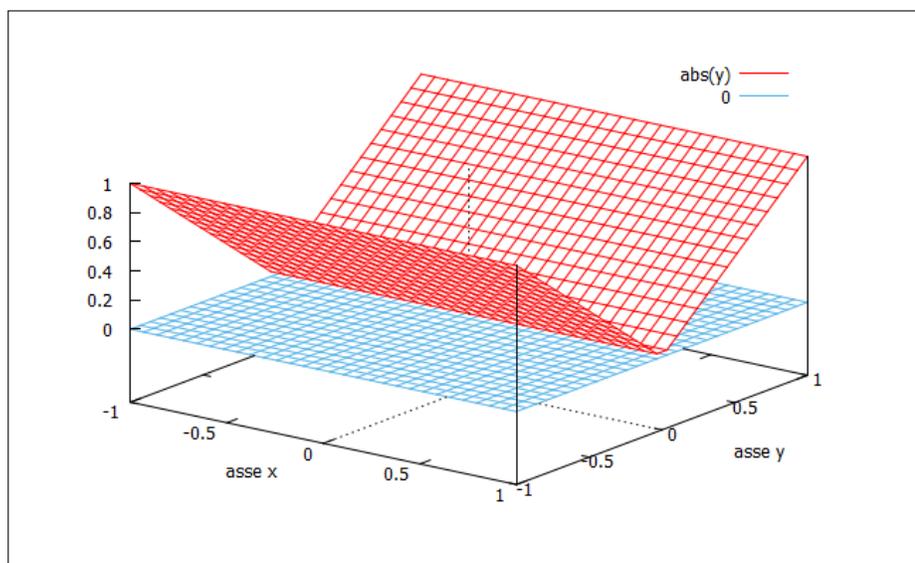


FIGURA 3. $f(x,y) = |y|$ $Q: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$

La figura 3 mostra chiaramente che le quote z massime si ottengono sui due lati $y = -1$ e $y = 1$: massimo = 1.

Le quote minime si ottengono sul segmento $y = 0$: minimo = 0.

V è composto da due prismi uguali di base triangoli di area $1/2$ e altezza 2: il volume complessivo è pertanto $2 \times (1/2 \times 2) = 2$.

$$\iint_Q |y| dx dy = \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 |y| dy \right] dx = \int_{-1}^1 \left[2 \int_0^1 y dy \right] dx = 2$$

Esercizio 8.4. Sia $f(x,y) = (x+1)(x-1)(y+2)(y-3)$ e sia E il rettangolo $-1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 3$

- calcolare il minimo e il massimo di $f(x,y)$ in E ,
- calcolare il volume della piramide \mathcal{P} di base E e di vertice $(0,0,f(0,0))$

- calcolare l'integrale doppio $\iint_E f(x,y) dx dy$.

Soluzione:

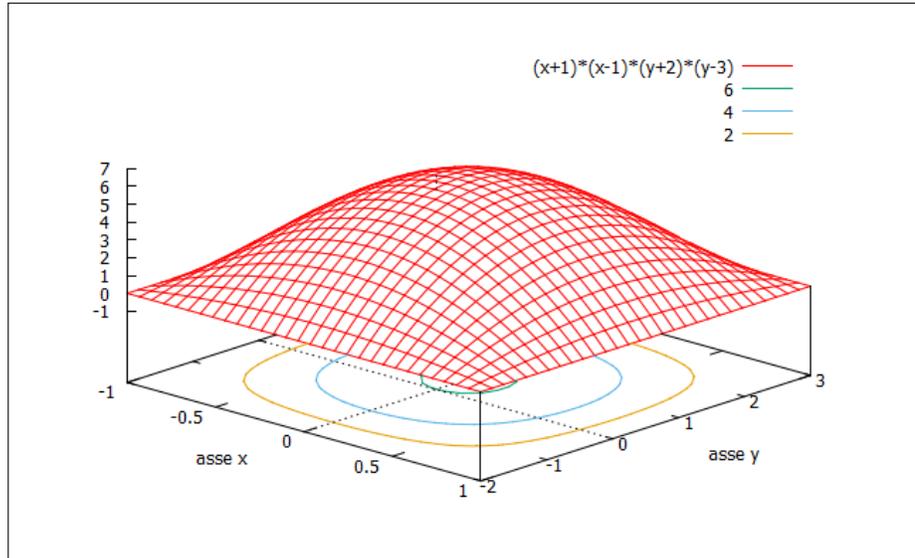


FIGURA 4. $f(x,y) = (x+1)(x-1)(y+2)(y-3)$, $-1 \leq x \leq 1$, $-2 \leq y \leq 3$

I due prodotti $(x+1)(x-1)$ e $(y+2)(y-3)$, trinomi di secondo grado, sono entrambi

- non positivi nei rispettivi intervalli $-1 \leq x \leq 1$ e $-2 \leq y \leq 3$,
- nulli agli estremi,
- minimi nei punti medi $x_0 = 0$, minimo = -1 e $y_0 = 1/2$, minimo = $-25/4$.

Pertanto il minimo di $f(x,y)$ per $(x,y) \in E$, vedi Figura 4, è 0, il massimo è $25/4$.

La quota $f(0,0) = 6$ pertanto il volume \mathcal{V} della piramide \mathcal{P} è:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{A}(E) f(0,0) = 20$$

$$\begin{aligned} \iint_E f(x,y) dx dy &= \int_{-2}^3 \left[\int_{-1}^1 (x+1)(x-1)(y+2)(y-3) dx \right] dy = \\ &= \int_{-2}^3 (y+2)(y-3) \left[\int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx \right] dy = -\frac{4}{3} \int_{-2}^3 (y+2)(y-3) dy = \frac{250}{9} \approx 27.778 \end{aligned}$$

volume giustamente maggiore di quello della \mathcal{P} .

Esercizio 8.5. Sia E il dominio normale rispetto all'asse x definito dalle limitazioni $-1 \leq x \leq 1$, $x^2 \leq y \leq 2x^2 + 1$

- disegnare E e determinare l'area $\mathcal{A}(E)$,

- calcolare l'integrale doppio $\iint_E (x+y) dx dy$
- verificare il teorema della media, cioè trovare $(\xi, \eta) \in E$ tale che

$$\iint_E (x+y) dx dy = (\xi + \eta) \mathcal{A}(E)$$

Soluzione:

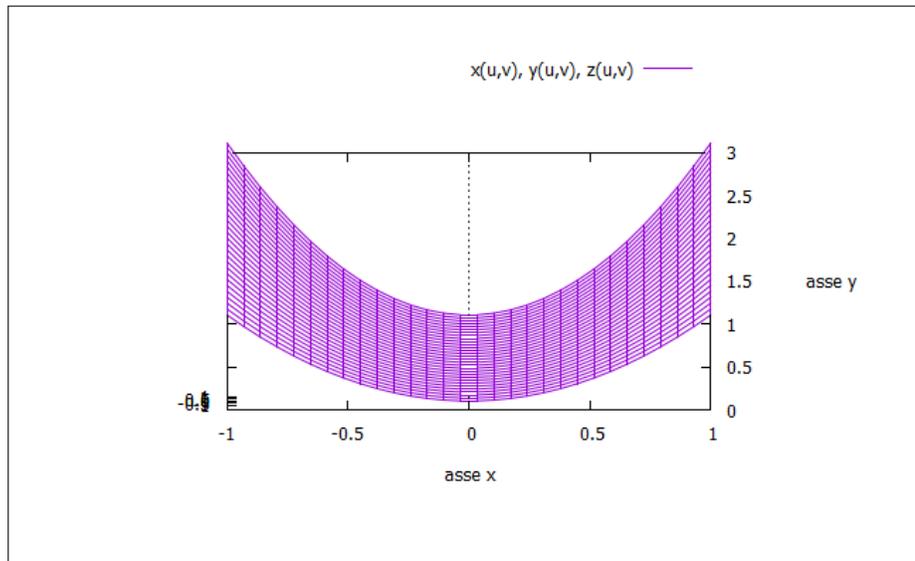


FIGURA 5. $E : -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2x^2 + 1$

L'area di E si ottiene per differenza:

$$\mathcal{A}(E) = \int_{-1}^1 (2x^2 + 1) dx - \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{8}{3}$$

Tenuto conto che E è un dominio normale rispetto all'asse x si ha

$$\begin{aligned} \iint_E (x+y) dx dy &= \int_{-1}^1 \left[\int_{x^2}^{2x^2+1} (x+y) dy \right] dx = \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{2}x^4 + x^3 + 2x^2 + x + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{44}{15} \end{aligned}$$

Verificare il teorema della media vuol dire riconoscere che

$$\exists(\xi, \eta) \in E : \iint_E (x+y) dx dy = (\xi + \eta) \mathcal{A}(E)$$

ovvero

$$\exists(\xi, \eta) \in E : \frac{44}{15} = (\xi + \eta) \frac{8}{3}$$

ovvero ancora

$$\xi + \eta = \frac{11}{10}$$

Risultato evidente osservando che la retta $x + y = 11/10$ taglia sicuramente l'insieme E .

Il punto, ad esempio $\xi = \frac{6}{10}$, $\eta = \frac{5}{10}$ è buono: infatti

$$\left(\frac{6}{10}\right)^2 \leq \frac{5}{10} \leq 2\left(\frac{6}{10}\right)^2 + 1$$

Esercizio 8.6. Siano $A: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$ e $B: 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1$:

- disegnare i due insiemi e riconoscere che coincidono,
- calcolare $\iint_A x^2 y^2 dx dy$ tenuto conto che A è un dominio normale rispetto all'asse x ,
- calcolare $\iint_B x^2 y^2 dx dy$ tenuto conto che B è un dominio normale rispetto all'asse y

Soluzione:

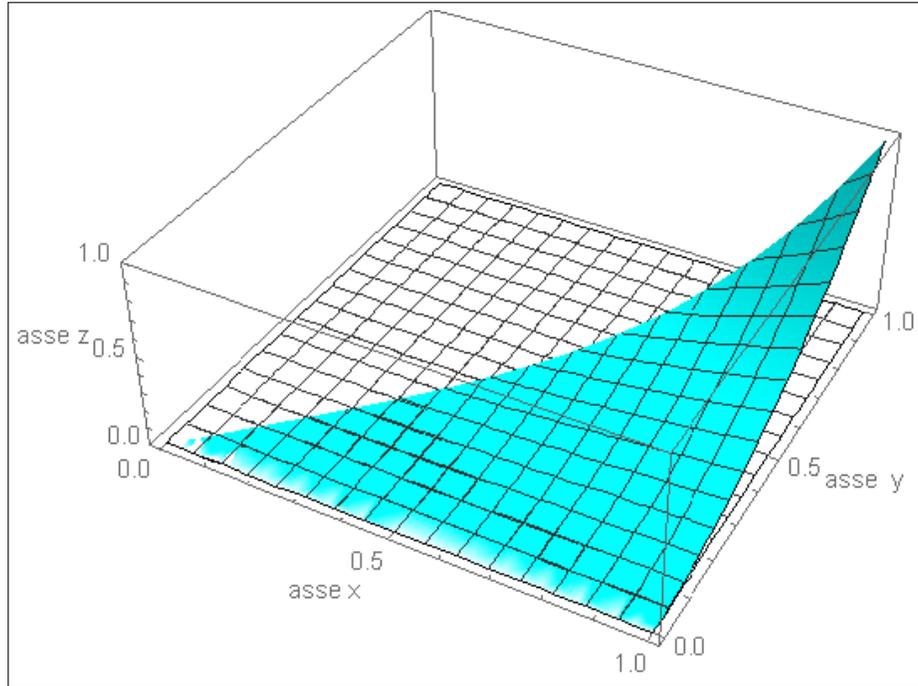


FIGURA 6. $f(x,y) = x^2 y^2 : D : \{1 \leq x \leq 2, \frac{1}{2}x^2 - y \leq 0, y - x^2 \leq 0\}$

$$\iint_A x^2 y^2 dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^x x^2 y^2 dy \right] dx = \int_0^1 x^2 \left[\int_0^x y^2 dy \right] dx = \frac{1}{18}$$

$$\iint_B x^2 y^2 dx dy = \int_0^1 \left[\int_y^1 x^2 y^2 dx \right] dy = \int_0^1 y^2 \left[\int_y^1 x^2 dx \right] dy = \frac{1}{18}$$

Il comune valore dei due integrali doppi rappresenta il volume del solido di Figura 6 sotto la superficie azzurra.

Esercizio 8.7. Sia $D : \{1 \leq x \leq 2, \frac{1}{2}x^2 - y \leq 0, y - x^2 \leq 0\}$

- riconoscere che D è un dominio normale rispetto all'asse x ,
- calcolare l'area di D ,
- calcolare l'integrale doppio $\iint \frac{x}{y^2} dx dy$.

Soluzione:

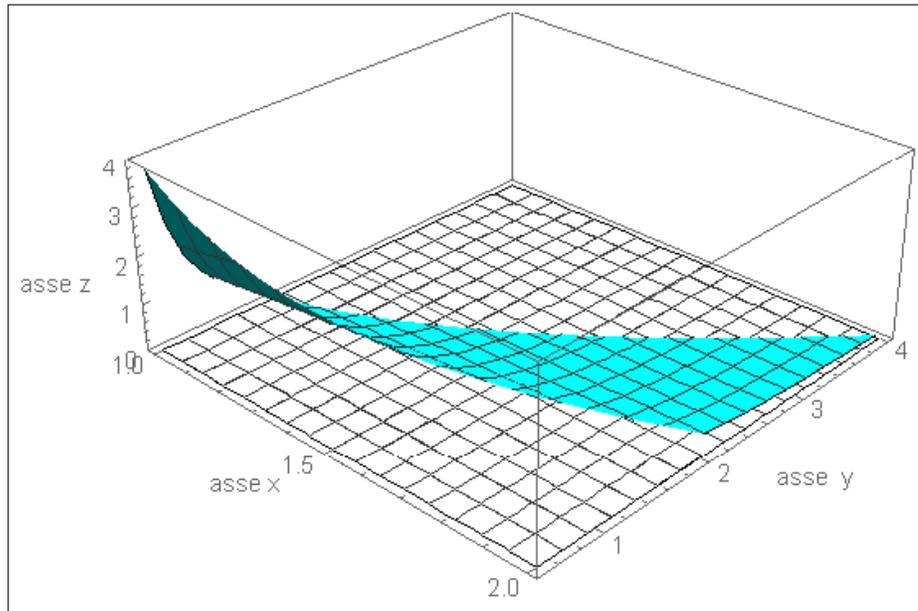


FIGURA 7. $\frac{x}{y^2} : D : \{1 \leq x \leq 2, \frac{1}{2}x^2 - y \leq 0, y - x^2 \leq 0\}$

Le disuguaglianze che determinano D sono anche

$$1 \leq x \leq 2, \quad \frac{1}{2}x^2 \leq y \leq x^2$$

nelle quali si riconosce un dominio normale rispetto all'asse x .

L'area di D si calcola naturalmente con

$$\mathcal{A}(D) = \int_1^2 \left\{ x^2 - \frac{1}{2}x^2 \right\} dx = \frac{7}{6}$$

$$\iint \frac{x}{y^2} dx dy = \int_1^2 \left[\int_{x^2/2}^{x^2} \frac{x}{y^2} dy \right] dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \log(2) \approx 0.69314$$

Il valore dell'integrale doppio rappresenta il volume del solido di Figura 7 sotto la superficie azzurra.

Esercizio 8.8. Assegnato il rettangolo $D = [3, 4] \times [1, 2]$ e la funzione $f(x, y) = \frac{1}{(x+y)^2}$

- calcolare l'integrale doppio $\mathcal{V} = \iint_D f(x, y) dx dy$,
- calcolare ed il minimo m e il massimo v della funzione $f(x, y)$ in D ,
- detta $\mathcal{A}(D)$ l'area di D verificare che

$$m \mathcal{A}(D) \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq M \mathcal{A}(D)$$

Soluzione:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{(x+y)^2} dx dy &= \int_3^4 \left[\int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} dy \right] dx = \int_3^4 \left\{ -\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1} \right\} dx = \\ &= \{ \log(x+1) - \log(x+2) \} \Big|_3^4 = \log \left(\frac{25}{24} \right) \end{aligned}$$

Il valore dell'integrale doppio rappresenta il volume del solido di Figura sotto la superficie rossa.

Il minimo e il massimo di $f(x, y) = \frac{1}{(x+y)^2}$ nel quadrato D corrispondono rispettivamente al massimo e al minimo di $(x+y)^2$ sempre in D :

$$\min_{(x,y) \in D} f(x, y) = f(4, 2) = \frac{1}{36}, \quad \max_{(x,y) \in D} f(x, y) = f(3, 1) = \frac{1}{16}$$

Tenuto conto che l'area di D vale 1 basta verificare che

$$\frac{1}{36} \leq \log \left(\frac{25}{24} \right) \leq \frac{1}{16}$$

Approssimazioni numeriche ottenibili con qualunque calcolatrice producono

$$\frac{1}{36} \approx 0.0277778, \quad \log \left(\frac{25}{24} \right) \approx 0.040822, \quad \frac{1}{16} \approx 0.0625$$

stime che confermano quanto atteso.

Esercizio 8.9. Assegnato il quadrato T di vertici $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$ e detta $f(x, y) = x^2 e^y$

- riconoscere che T è un dominio normale rispetto all'asse x e calcolare $\iint_T f(x, y) dx dy$ secondo la formula di riduzione valida su tali domini,
- riconoscere che T è un dominio normale anche rispetto all'asse y e calcolare lo stesso integrale doppio secondo l'altra formula di riduzione valida su tali domini.

Soluzione:

Il dominio quadrato T è delimitato anche dalle condizioni

$$-1 \leq x \leq 1, \quad |x| - 1 \leq y \leq 1 - |x|$$

dalle quali si riconosce che T è un dominio normale rispetto all'asse x .

$$\begin{aligned} \iint_T x^2 e^y dx dy &= \int_{-1}^1 \left[\int_{|x|-1}^{1-|x|} x^2 e^y dy \right] dx = \int_{-1}^1 x^2 \left[\int_{|x|-1}^{1-|x|} e^y dy \right] dx = \\ &= \int_{-1}^1 x^2 \left(e^{1-|x|} - e^{|x|-1} \right) dx \end{aligned}$$

Tenuto conto che la funzione integranda è pari l'integrale si riduce a

$$2 \int_0^1 x^2 (e^{1-x} - e^{x-1}) dx = 2e \int_0^1 x^2 e^{-x} dx - 2/e \int_0^1 x^2 e^x dx = 4 \left(-3 + \frac{1}{e} + e \right)$$

Il dominio quadrato T è delimitato del resto anche dalle condizioni

$$-1 \leq y \leq 1, \quad |y| - 1 \leq x \leq 1 - |y|$$

dalle quali si riconosce che T è un dominio normale anche rispetto all'asse y .

Pertanto l'integrale doppio può essere calcolato anche con la formula di riduzione seguente

$$\begin{aligned} \iint_T x^2 e^y dx dy &= \int_{-1}^1 \left[\int_{|y|-1}^{1-|y|} x^2 e^y dx \right] dy = \int_{-1}^1 e^y \left[\int_{|y|-1}^{1-|y|} x^2 dx \right] dy = \\ &= \frac{2}{3} \int_{-1}^1 (1 - |y|)^3 e^y dy = \frac{2}{3} \int_{-1}^0 (1 + y)^3 e^y dy + \frac{2}{3} \int_0^1 (1 - y)^3 e^y dy = \\ &= \frac{2}{3} \left(-2 + \frac{6}{e} \right) + \frac{2}{3} (-16 + 6e) = 4 \left(-3 + \frac{1}{e} + e \right) \end{aligned}$$

I valori calcolati con i due algoritmi naturalmente concordano.

Esercizio 8.10. Sia $[t]$ la funzione parte intera e sia $f(x, y) = 3 + [x] + [y]$

- calcolare, direttamente dalle somme integrali, l'integrale doppio di $f(x, y)$ esteso al cerchio di centro l'origine e raggio 1,
- calcolare l'integrale doppio di $f(x, y)$ esteso al dominio $E : 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \frac{1}{x^2}$.

Soluzione:

Diviso il cerchio D nei quattro quarti appartenenti ai quattro quadranti è facile riconoscere che

- nel quarto appartenente al primo quadrante riesce $f(x, y) \equiv 3$,
- nel quarto appartenente al secondo riesce $f(x, y) \equiv 2$,
- nel quarto appartenente al terzo riesce $f(x, y) \equiv 1$,
- nel quarto appartenente al quarto quadrante riesce $f(x, y) \equiv 2$

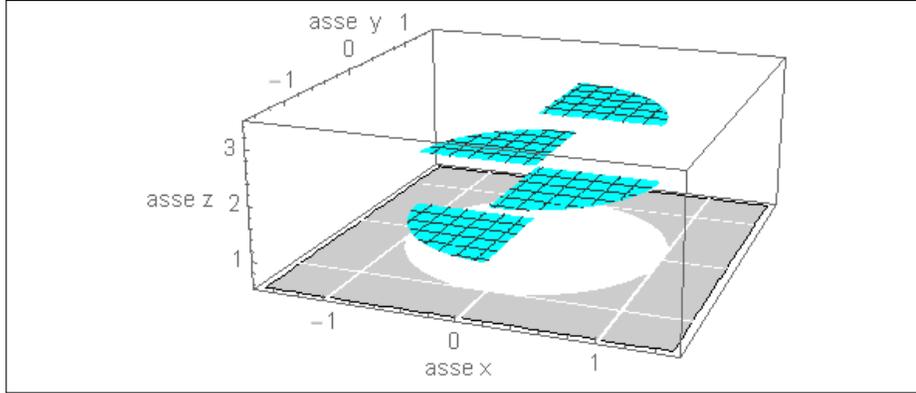


FIGURA 8. $3 + [x] + [y] : D : x^2 + y^2 \leq 1$

La somma integrale relativa a tale suddivisione produce

$$3 \frac{\pi}{4} + 2 \frac{\pi}{4} + 1 \frac{\pi}{4} + 2 \frac{\pi}{4} = 2\pi$$

Le somme relative a decomposizioni più fini non possono che produrre lo stesso valore: pertanto riesce

$$\iint_D (3 + [x] + [y]) dx dy = 2\pi$$

Per quanto riguarda il secondo integrale doppio richiesto si osservi che

$$1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \frac{1}{x^2} \rightarrow [y] = 0, \rightarrow f(x, y) = 3 + [x]$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \iint_E f(x, y) dx dy &= \iint_E (3 + [x]) dx dy = \sum_{k=1}^3 \int_k^{k+1} \left[\int_0^{1/x^2} (3 + [x]) dy \right] dx = \\ &= \sum_{k=1}^3 \int_k^{k+1} \frac{3+k}{x^2} dx = \sum_{k=1}^3 \int_k^{k+1} \frac{3+k}{k(k+1)} = \frac{4}{2} + \frac{5}{6} + \frac{6}{12} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

Esercizio 8.11. Sia E il cerchio di centro l'origine e raggio $r = 3$ e sia $f(x, y) = x^2 + y^2$:

- riconoscere che E è un dominio normale rispetto all'asse x ,
- riconoscere che E è un dominio normale anche rispetto all'asse y ,
- calcolare $\iint_E f(x, y) dx dy$.

Soluzione:

Il cerchio E è un dominio normale sia rispetto all'asse x che rispetto all'asse y : infatti E è determinato dalle seguenti possibili disuguaglianze

$$-1 \leq x \leq 1 \quad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$$

$$-1 \leq y \leq 1 \quad -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$$

$$\begin{aligned}\iint_E (x^2 + y^2) dx dy &= \int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy \right] dx = \\ &= \int_{-1}^1 \left\{ \frac{4}{3} \sqrt{1-x^2} x^2 + \frac{2\sqrt{1-x^2}}{3} \right\} dx = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Esercizio 8.12. Sia E l'insieme delimitato dall'ellisse $4x^2 + 9y^2 = 36$

- riconoscere che E è un dominio normale rispetto all'asse x ,
- riconoscere che E è un dominio normale anche rispetto all'asse y ,
- calcolare $\iint_E xy dx dy$.

Soluzione:

Il dominio E

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} \leq 1$$

è un dominio normale sia rispetto all'asse x che rispetto all'asse y : infatti E è determinato dalle seguenti possibili disuguaglianze

$$-3 \leq x \leq 3 \quad -2\sqrt{1-x^2/9} \leq y \leq 2\sqrt{1-x^2/9}$$

$$-2 \leq y \leq 2 \quad -3\sqrt{1-y^2/4} \leq x \leq 3\sqrt{1-y^2/4}$$

Diviso E nelle quattro parti E_1, E_2, E_3, E_4 relative ai quattro quadranti si ha

$$\iint_E xy dx dy = \iint_{E_1} xy dx dy + \iint_{E_2} xy dx dy + \iint_{E_3} xy dx dy + \iint_{E_4} xy dx dy$$

La simmetria delle quattro parti e il carattere dispari della funzione xy permette di riconoscere che

$$\iint_{E_1} xy dx dy = - \iint_{E_2} xy dx dy$$

$$\iint_{E_3} xy dx dy = - \iint_{E_4} xy dx dy$$

da cui

$$\iint_E xy dx dy = 0$$

Esercizi su cambio di coordinate

Esercizio 9.1. Sia $\Omega : (x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, y \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$ e sia $f(x, y) = x + y$

- disegnare Ω e determinarne l'area $\mathcal{A}(\Omega)$,
- determinare il minimo m e il massimo M di $f(x, y)$ in Ω ,
- determinare il dominio del piano (ρ, θ) corrispondente ad Ω nelle coordinate polari,
- calcolare $V = \iint_{\Omega} (x+y) dx dy$ servendosi delle coordinate polari,
- verificare che $m \mathcal{A}(\Omega) \leq V \leq M \mathcal{A}(\Omega)$.

Soluzione:

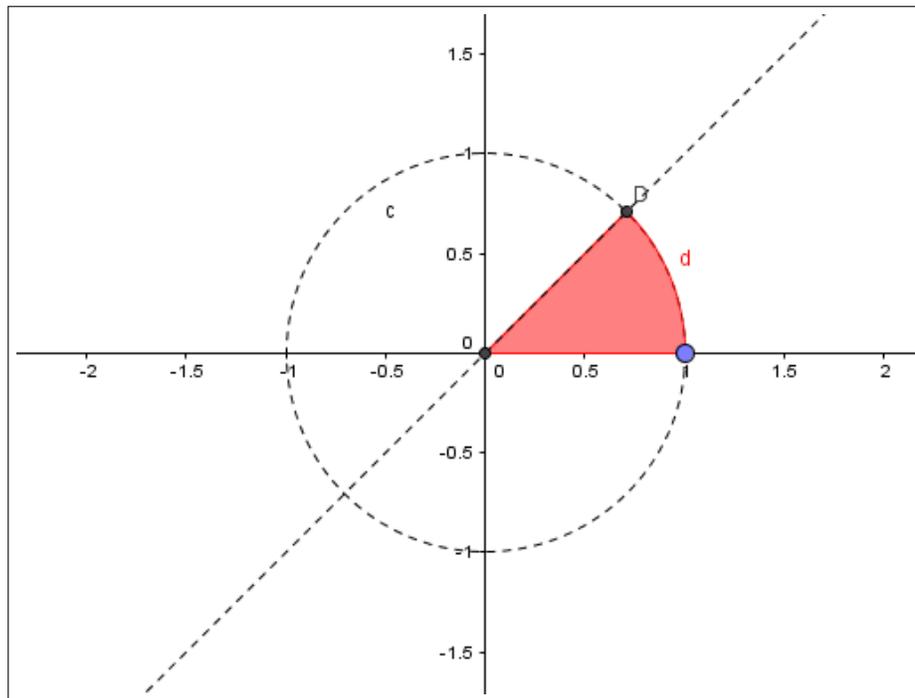


FIGURA 1. $\Omega : (x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, y \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$

Si tratta di un settore circolare relativo al cerchio di centro l'origine e raggio $r = 1$ e ampiezza $\pi/4$: pertanto $\mathcal{A}(\Omega) = \pi/8$.

La funzione $f(x, y) = x + y$ è non negativa in tutto Ω , vale zero nell'origine, valore che è pertanto il minimo e prende il valore maggiore in corrispondenza del punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ in cui prende il valore $\sqrt{2}$ che è quindi il massimo.

Il dominio Ω corrisponde al dominio $D : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/4$ del piano (ρ, θ) .

$$\iint_{\Omega} (x+y) dx dy = \int_D (\rho \cos(\theta) + \rho \sin(\theta)) \rho d\rho d\theta = \int_0^{\pi/4} (\cos(\theta) + \sin(\theta)) d\theta \int_0^1 \rho^2 d\rho = \frac{1}{3}$$

Esercizio 9.2. Sia $\Omega : \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ e sia $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

- disegnare Ω e calcolarne l'area $\mathcal{A}(\Omega)$,
- determinare il dominio del piano (ρ, θ) corrispondente ad Ω nelle coordinate polari,
- calcolare $V = \iint_{\Omega} \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy$ servendosi delle coordinate polari,
- verificare il teorema della media $V = \mathcal{A}(\Omega) f(\xi, \eta)$.

Soluzione:

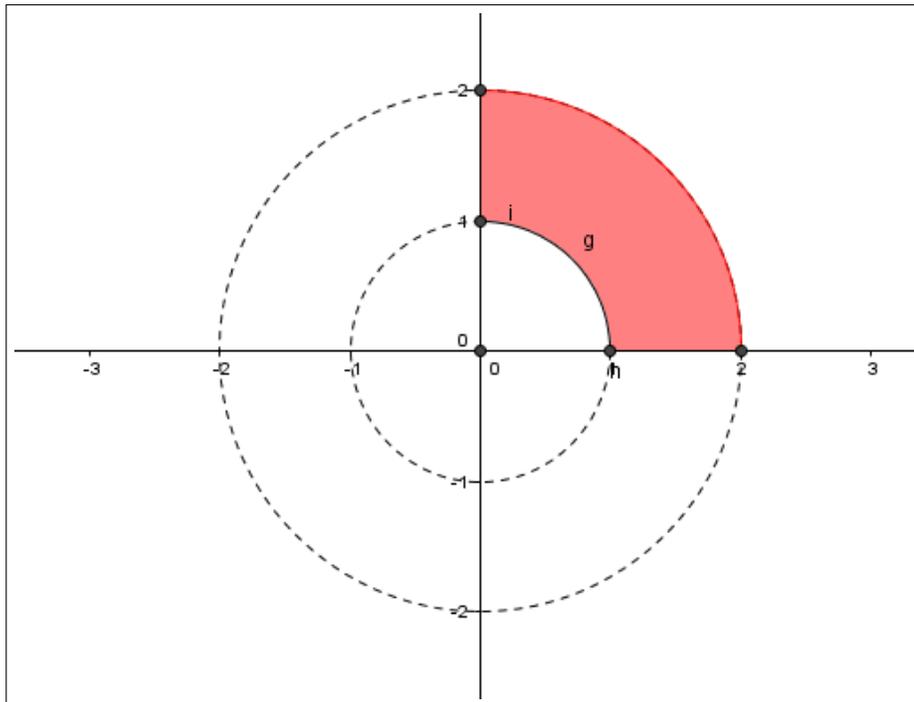


FIGURA 2. $\Omega : \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

Ω è un quarto di corona, quindi la sua area è $\frac{1}{4} \pi(4 - 1) = \frac{3}{4} \pi$.

Nel piano (ρ, θ) Ω corrisponde a $D : 0 \leq \theta \leq \pi/2, 1 \leq \rho \leq 2$.

$$V = \iint_{\Omega} \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{\pi/2} \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta \int_1^2 \rho d\rho = \frac{3}{4}$$

Verificare il teorema della media vuol dire mostrare che esistono punti $(\xi, \eta) \in \Omega$ tali che

$$\iint_{\Omega} \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy = (\xi^2 + \eta^2) \mathcal{A}(\Omega)$$

ovvero tali che

$$\frac{3}{4} = \frac{\xi\eta}{\xi^2 + \eta^2} \frac{3}{4} \pi \Leftrightarrow \frac{\xi\eta}{\xi^2 + \eta^2} = \frac{1}{\pi}$$

Tenuto conto che la funzione continua $\frac{xy}{x^2 + y^2}$ prende in Ω sia il valore 0, per $x = 0$, che il valore $1/2$, per $x = y$, allora prenderà per il teorema dei valori intermedi anche tutti i valori compresi tra 0 e $1/2$: il valore $1/\pi$ è uno di essi. Quindi esisteranno certamente $(\xi, \eta) \in \Omega$ tali che $\frac{\xi\eta}{\xi^2 + \eta^2} = \frac{1}{\pi}$.

Esercizio 9.3. Sia $\Omega : \{x^2 + 2y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ e sia $f(x, y) = xy$

- disegnare Ω ,
- scelto il cambio di coordinate $x = \rho \cos(\theta)$, $y = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \sin(\theta)$ determinare il dominio del piano (ρ, θ) corrispondente ad Ω ,
- calcolare $V = \iint_{\Omega} xy dx dy$ servendosi delle coordinate scelte,
- calcolare $\mathcal{A}(\Omega)$ servendosi delle coordinate scelte.

Soluzione:

Nel piano (ρ, θ) Ω corrisponde a $D : 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \rho \leq 1$.

$$V = \iint_{\Omega} xy dx dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}} \rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta) |J(\rho, \theta)| d\rho$$

Il determinante jacobiano è

$$|J(\rho, \theta)| = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta) \\ -\rho \sin(\theta) & \frac{1}{\sqrt{2}} \rho \cos(\theta) \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rho$$

Pertanto si ha

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho = \frac{1}{16}$$

Esercizio 9.4. Sia $\Omega : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 - 4x \leq 0\}$ e sia $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$:

- disegnare Ω ,
- esprimere la condizione $x^2 + y^2 - 4x \leq 0$ in termini di coordinate polari ρ, θ ,
- determinare il dominio del piano (ρ, θ) corrispondente ad Ω nelle coordinate polari,

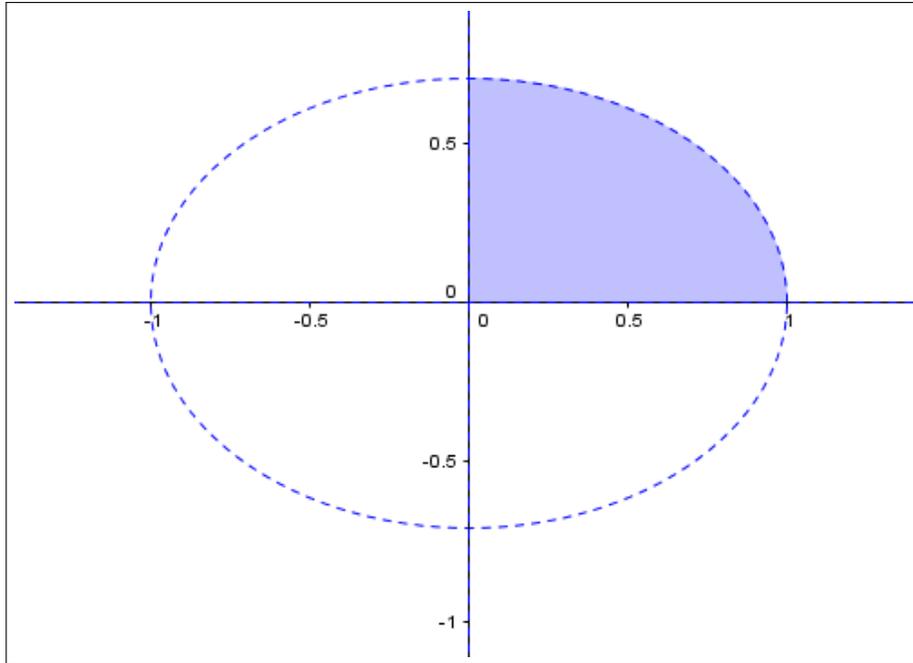


FIGURA 3. $\Omega : \{x^2 + 2y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$

- calcolare $V = \iint_{\Omega} xy \, dx \, dy$ servendosi delle coordinate polari.

Soluzione:

La condizione $x^2 + y^2 - 4x \leq 0$ equivale a $(x-2)^2 + y^2 \leq 4$ che definisce il cerchio di centro $C = (2,0)$ e raggio $r = 2$.

Espressa in coordinate polari

$$x^2 + y^2 - 4x \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho\{\rho - 4\cos(\theta)\} \leq 0$$

Il dominio B del piano (ρ, θ) corrispondente a Ω è pertanto il dominio normale

$$B : \{\rho \leq 4 \cos(\theta), \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2\}$$

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{4\cos(\theta)} \rho \rho \, d\rho = \\ &= \frac{4^3}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3(\theta) \, d\theta = \frac{256}{9} \end{aligned}$$

Esercizio 9.5. Sia $\Omega : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2x^2 + 3y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ e sia $f(x,y) = x + y$:

- disegnare Ω ,
- scelto il cambio di coordinate $x = \sqrt{2}\rho \cos(\theta)$, $y = \frac{2}{\sqrt{3}}\rho \sin(\theta)$ determinare il dominio del piano (ρ, θ) corrispondente ad Ω ,

- calcolare $V = \iint_{\Omega} f(x,y) dx dy$ servendosi delle coordinate scelte.

Soluzione:

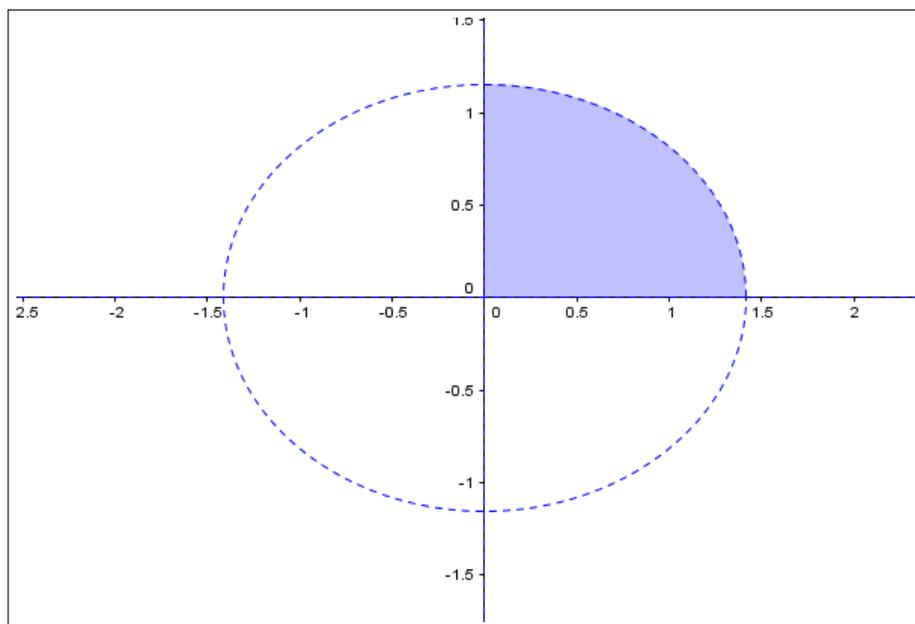


FIGURA 4. $\Omega : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 2x^2 + 3y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

Il dominio B del piano (ρ, θ) corrispondente ad Ω è $B : \{0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$

$$V = \iint_{\Omega} f(x,y) dx dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \left(\sqrt{2}\rho \cos(\theta) + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\theta) \right) |J(\rho, \theta)| d\rho$$

Calcoliamo l'espressione del determinante jacobiano relativo a trasformazioni generali del tipo in oggetto:

$$\begin{cases} x = a\rho \cos(\theta), \\ y = b\rho \sin(\theta) \end{cases} \rightarrow J(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} a \cos(\theta) & b \sin(\theta) \\ -a\rho \sin(\theta) & b\rho \cos(\theta) \end{vmatrix} = ab\rho$$

da cui, nel caso in oggetto

$$J(\rho, \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \rho$$

Si ha pertanto

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\Omega} f(x,y) dx dy = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{2} \cos(\theta) + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\theta) \right) d\theta \int_0^1 \rho^2 d\rho = \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{2} \cos(\theta) + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\theta) \right) d\theta = \frac{4(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{9} \end{aligned}$$

Esercizio 9.6. Sia D il dominio del piano (x, y) determinato dalle disuguaglianze $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$, $y \leq \sqrt{3}x$

- determinare il dominio B del piano (ρ, θ) corrispondente a D nelle coordinate polari,
- calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy$$

Soluzione:

Il dominio del piano (ρ, θ) corrispondente a D è $1 \leq \rho \leq 2$, $\rho \sin(\theta) \leq \sqrt{3}\rho \cos(\theta)$, si tratta cioè del rettangolo

$$B: 1 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{1}{3}\pi$$

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy &= \iint_B \frac{1}{1+\rho^2} \rho d\rho d\theta = \\ &= \int_0^{\frac{1}{3}\pi} d\theta \int_1^2 \frac{\rho}{1+\rho^2} d\rho = \frac{1}{3}\pi \left\{ \log(\sqrt{5}) - \log(\sqrt{2}) \right\} \end{aligned}$$

Esercizio 9.7. Detto D_r il cerchio di centro l'origine e raggio r

- determinare il dominio B del piano (ρ, θ) corrispondente a D nelle coordinate polari,
- calcolare l'integrale doppio

$$V_r = \iint_{D_r} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

- calcolare il $\lim_{r \rightarrow +\infty} V_r$.

Soluzione:

Il dominio B del piano (ρ, θ) corrispondente a D nelle coordinate polari è il rettangolo $B: 0 \leq \rho \leq r$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$V_r = \iint_{D_r} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r e^{-\rho^2} \rho d\rho = \pi \left\{ 1 - e^{-r^2} \right\}$$

Esercizio 9.8. Sia D il dominio del piano (x, y) determinato dalle disuguaglianze $1 \leq xe^y \leq 2$, $2 \leq xe^{-y} \leq 3$. Posto $u = xe^y$, $v = xe^{-y}$

- determinare il dominio B del piano (u, v) corrispondente a D nelle nuove coordinate,
- calcolare l'integrale doppio

$$V = \iint_D x^4 dx dy$$

nelle nuove coordinate.

Soluzione:

Ovviamente

$$\begin{cases} 1 \leq x e^y \leq 2 \\ 2 \leq x e^{-y} \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq u \leq 2 \\ 2 \leq v \leq 3 \end{cases}$$

Dividendo membro a membro si ottiene

$$\left\{ \frac{u}{v} = e^{2y}, u = x e^y \right\} \Leftrightarrow \left\{ y = \log \left(\sqrt{\frac{u}{v}} \right), x = \sqrt{uv} \right\}$$

Il determinante jacobiano vale

$$J = \begin{vmatrix} \frac{v}{2\sqrt{uv}} & \frac{1}{2u} \\ \frac{u}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2v} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2\sqrt{uv}}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} V &= \iint_D x^4 dx dy = \iint_B (\sqrt{uv})^4 \frac{1}{2\sqrt{uv}} du dv = \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 u^{3/2} du \int_2^3 v^{3/2} dv = 2 \frac{4\sqrt{2}-1}{5} \frac{9\sqrt{3}-4\sqrt{2}}{5} \end{aligned}$$

Esercizio 9.9. Sia $\mathbf{F} = \{x^3 - xy^3, y^2 - 2xy\}$

- Calcolare l'integrale curvilineo

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \times \boldsymbol{\tau} ds$$

essendo Γ il bordo del quadrato di estremi $(0,0)$ e $(2,2)$,

- calcolare lo stesso integrale servendosi del rotore di \mathbf{F} e della formula di Stokes.

Soluzione:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \times \boldsymbol{\tau} ds = \int_0^2 (x^3) dx + \int_0^2 (y^2 - 4y) dy + \int_2^0 (x^3 - 8x) dx + \int_2^0 y^2 dy = 8$$

La formula di Stokes è

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \times \boldsymbol{\tau} ds = \iint_Q \text{rot}_z(\mathbf{F}) dx dy$$

da cui

$$\text{rot}_z(\mathbf{F}) = \partial_x(y^2 - 2xy) - \partial_y(x^3 - xy^3) = -2y + 3xy^2$$

implica

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \times \boldsymbol{\tau} ds = \int_0^2 dx \int_0^2 (-2y + 3xy^2) dy = 8$$

Esercizio 9.10. Calcolare l'area del dominio E delimitato dalle disuguaglianze

$$-1 \leq x \leq 1, \quad x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2$$

Confrontare l'area ottenuta con l'integrale curvilineo

$$\oint_{\partial E} \{-y, x\} \times \tau ds$$

esteso al bordo di E .

Soluzione:

L'area di E è

$$\mathcal{A}(E) = \int_{-1}^1 [(1-x^2) - (x^2-1)] dx = \int_{-1}^1 (2-2x^2) dx = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\begin{aligned} \oint_{\partial E} \{-y, x\} \times \tau ds &= \oint_{\partial E} (-y dx + x dy) = \\ &= \int_{-1}^{-1} ((-1+x^2) + x(-2x)) dx + \int_{-1}^1 (-x^2 + 1 + x(2x)) dx = \\ &= \int_{-1}^1 (2+2x^2) dx = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Il risultato ottenuto è il doppio dell'area trovata precedentemente: *congettura*

$$\mathcal{A}(E) = \frac{1}{2} \oint_{\partial E} \{-y, x\} \times \tau ds$$

Esercizio 9.11. Usando la formula di Stokes calcolare l'integrale curvilineo

$$I = \oint_{\Gamma} \{x^3 y dx + (x^2 - y^2) dy\}$$

ove Γ è il bordo del triangolo di vertici $O = (0,0)$, $A = (1,1)$, $C = (2,0)$ percorso in verso orario.

Soluzione:

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\Gamma} \{x^3 y dx + (x^2 - y^2) dy\} = \iint_{\Delta_{OAC}} \text{rot}_z \{x^3 y, (x^2 - y^2)\} dx dy = \\ &= \iint_{\Delta_{OAC}} (2x - x^3) dx dy \end{aligned}$$

Detto $H = (1,0)$ il triangolo Δ_{OAC} è unione dei due triangoli disgiunti Δ_{OAH} e Δ_{HAC} entrambi domini normali rispetto all'asse x

$$\begin{cases} \Delta_{OAH} & 0 \leq x \leq 1, & 0 \leq y \leq x \\ \Delta_{HAC} & 1 \leq x \leq 2, & 0 \leq y \leq 2-x \end{cases}$$

Si ha pertanto

$$\iint_{\Delta_{OAC}} (2x - x^3) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x (2x - x^3) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} (2x - x^3) dy = \frac{1}{2}$$

Esercizio 9.12. Usando la formula di Stokes calcolare l'integrale curvilineo

$$I = \oint_{\Gamma} \{\arctan(y) dx - xy dy\}$$

ove Γ è il bordo del triangolo di vertici $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (0, -1)$ percorso in verso orario.

Soluzione:

$$\operatorname{rot}_z \{\arctan(y), -xy\} = -y - \frac{1}{1+y^2}$$

Si ha pertanto, tenuto conto del verso orario di percorrenza assegnato,

$$I = \oint_{\Gamma} \{\arctan(y) dx - xy dy\} = \iint_{\Delta_{ABC}} \left(y + \frac{1}{1+y^2} \right) dx dy$$

Tenuto conto che il triangolo Δ_{ABC} è il dominio normale rispetto all'asse y

$$0 \leq y \leq 1, \quad -1+y \leq x \leq 1-y$$

si ha

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta_{ABC}} \left(y + \frac{1}{1+y^2} \right) dx dy &= \int_0^1 \left(y + \frac{1}{1+y^2} \right) dy \int_{-1+y}^{1-y} dx = \\ &= \int_0^1 \left(y + \frac{1}{1+y^2} \right) (2-2y) dy = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{2} - \log(2) \approx 1.211 \end{aligned}$$

Esercizi su integrali superficiali

Esercizio 10.1. Sia Σ la superficie cartesiana grafico di $f(x,y) = 7 + 2x + 3y$ per $(x,y) \in \Omega : x^2 + y^2 \leq 4$

- determinare il bordo di Σ e fornirne una rappresentazione parametrica,
- determinare in ogni punto di Σ i due versori normali,
- determinare l'area di Σ .

Soluzione:

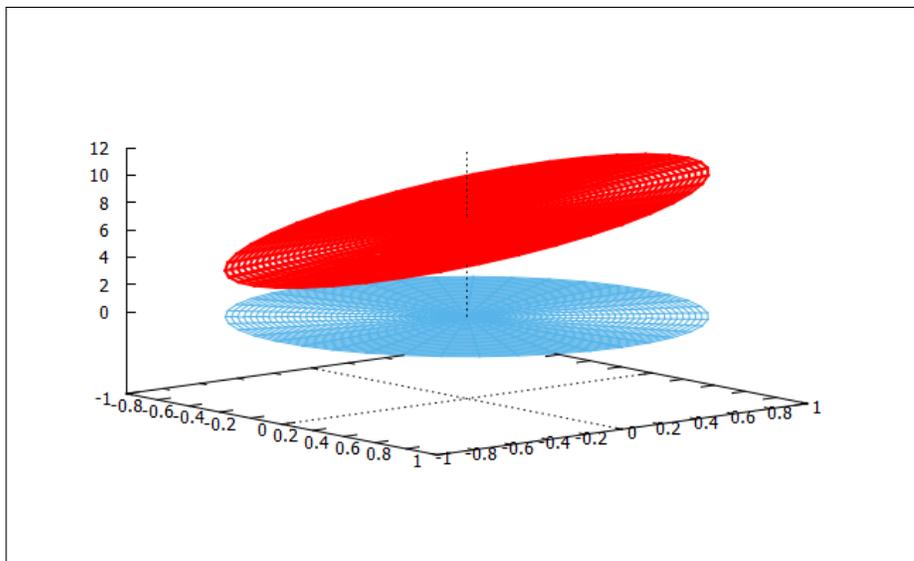


FIGURA 1. $z = 7 + 2x + 3y$, $(x,y) \in \Omega : x^2 + y^2 \leq 4$

Il bordo di Σ è il profilo altimetrico di $f(x,y)$ relativo alla circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ che delimita Ω : la sua rappresentazione parametrica è pertanto

$$x = 2 \cos(\theta), \quad y = 2 \sin(\theta), \quad z = 7 + 4 \cos(\theta) + 6 \sin(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

La superficie Σ è un'ellisse contenuta nel piano $z = 7 + 2x + 3y$: i vettori

$$\{2, 3, -1\}, \quad \{-2, -3, 1\}$$

sono entrambi normali al piano e quindi normali a Σ .

I versori associati sono

$$\frac{1}{\sqrt{14}} \{2, 3, -1\}, \quad \frac{1}{\sqrt{14}} \{-2, -3, 1\}$$

L'area di Σ è data dall'integrale doppio

$$\iint_{\Omega} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = \sqrt{14} \iint_{\Omega} dx dy = 4\pi \sqrt{14}$$

OSSERVAZIONE 10.1. Σ si proietta su Ω ma, dal momento che sta su un piano obliquo l'area di Σ è maggiore di quella di Ω .

Esercizio 10.2. Sia $f(x, y) = 1 + 3x + 2y$ e sia $\Omega: |x| + |y| \leq 1$

- calcolare l'area della superficie grafico di $f(x, y)$ per $(x, y) \in \Omega$
- calcolare l'integrale superficiale $\iint_{\Sigma} y^2 d\sigma$
- verificare il teorema della media relativamente all'integrale calcolato sopra.

Soluzione:

Ω è il quadrato del piano (x, y) di vertici

$$(1, 0), \quad (0, 1), \quad (-1, 0), \quad (0, -1)$$

Σ è il parallelogramma del piano $z = 1 + 3x + 2y$ che si proietta su Ω .

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + 3^2 + 2^2} dx dy = \sqrt{14} \iint_{\Omega} dx dy = 2\sqrt{14}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} y^2 d\sigma &= \iint_{\Omega} y^2 \sqrt{1 + 2^2 + 3^2} dx dy = \\ &= 4 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} y^2 dy = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Il calcolo dell'integrale su Ω è stato ridotto a fare quattro volte l'integrale sulla porzione di Ω appartenente al primo quadrante per ovvie ragioni di simmetria.

Il teorema della media afferma che

$$\iint_{\Sigma} y^2 d\sigma = \mathcal{A}(\Sigma) \eta^2$$

essendo η l'ordinata di un punto di Σ .

Tenuto conto dei valori dell'integrale e dell'area già calcolati, la relazione precedente si riduce a

$$\frac{1}{3} = 2\sqrt{14} \eta^2 \quad \rightarrow \quad \eta^2 = \frac{1}{6\sqrt{14}} \approx 0,044$$

Considerato che ci sono punti di Σ con ordinata 0 e punti con ordinata 1 ce ne saranno, per il teorema dei valori intermedi delle funzioni continue, anche alcuni per i quali l'ordinata soddisfi l'uguaglianza richiesta.

Esercizio 10.3. Sia Σ la superficie grafico di $f(x,y) = 3x + 4y + 1$, $(x,y) \in \Omega: x^2 + y^2 \leq 1$

- calcolare l'area di Σ ,
- calcolare l'integrale superficiale $\iint_{\Sigma} z^2 d\sigma$
- verificare il teorema della media relativamente all'integrale calcolato sopra.

Soluzione:

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \iint_{\Omega} \sqrt{1+3^2+4^2} dx dy = \sqrt{26} \iint_{\Omega} dx dy = \pi\sqrt{26}$$

$$\iint_{\Sigma} z^2 d\sigma = \iint_{\Omega} (3x+4y+1)^2 \sqrt{26} dx dy = \frac{29\sqrt{26}}{4} \pi$$

$$\frac{29\sqrt{26}}{4} \pi = \pi\sqrt{26}\zeta^2 \rightarrow \zeta^2 = \frac{29}{4} = 7.25 \rightarrow \eta = \sqrt{7.25} \approx 2.7$$

Tenuto conto che ci sono punti di Σ con quota 1 e con quota 5 ce ne saranno sicuramente con quota 2.7.

Esercizio 10.4. Sia Σ la superficie ottenuta ruotando il grafico di $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$, $0 \leq x \leq 1$ intorno all'asse delle ordinate

- disegnare il grafico di $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$, $0 \leq x \leq 1$,
- fornire una rappresentazione parametrica di Σ ,
- calcolare l'area di Σ .

Soluzione:

La superficie di rotazione si rappresenta parametricamente con

$$\begin{cases} x = u \cdot \cos(v) \\ y = u \cdot \sin(v) \\ z = \sqrt{1-(u-1)^2} \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi$$

Tenuto presente che l'elemento d'area per le superfici di rotazione di una $f(x)$ è

$$d\sigma = u \sqrt{1+f'^2(u)} du dv \rightarrow d\sigma = u \sqrt{1 + \frac{(u-1)^2}{1+(u-1)^2}} du dv$$

Da cui

$$\mathcal{A}(\Sigma) = 2\pi \int_0^1 u \sqrt{1 + \frac{(u-1)^2}{1+(u-1)^2}} du$$

Esercizio 10.5. Sia Σ la superficie grafico di $z = 7 + 2x + 3y$, $(x,y) \in \Omega: x^2 + y^2 \leq 1$:

- calcolare l'area di Σ ,
- determinare il versore \mathbf{v} normale a Σ con $v_z \geq 0$,

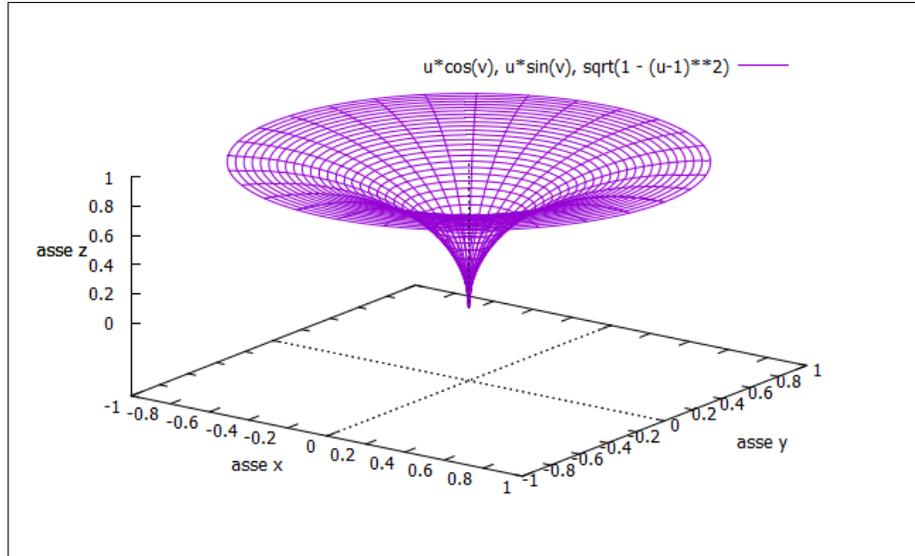


FIGURA 2. rotazione di $f(x) = \sqrt{1 - (x-1)^2}$, $0 \leq x \leq 1$

- posto $F = \{1, 2, 3\}$ determinare il flusso di F traverso Σ , $\iint_{\Sigma} F \cdot \nu \, d\sigma$,
- detta $\partial\Sigma$ la curva bordo di Σ calcolare il lavoro di F lungo $\partial\Sigma$.

Soluzione:

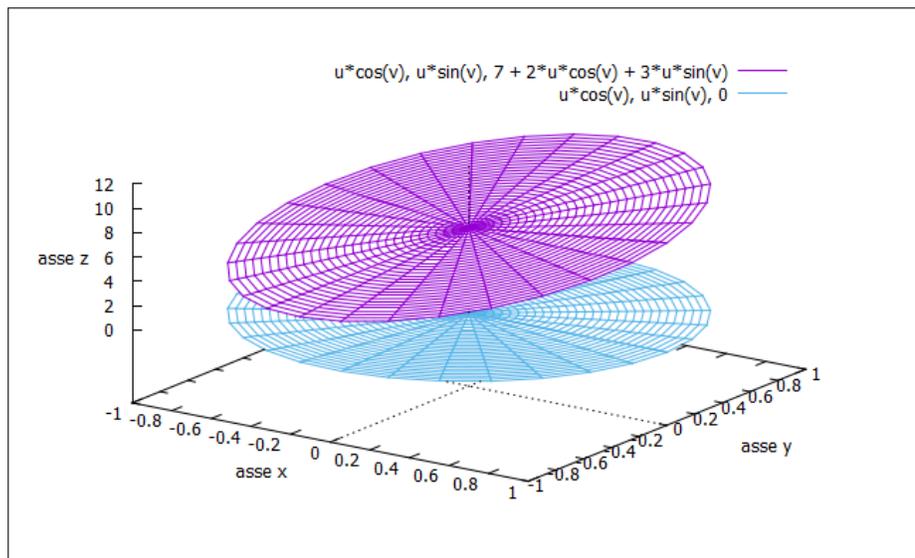


FIGURA 3. $z = 7 + 2x + 3y$, $(x, y) \in \Omega : x^2 + y^2 \leq 1$

La superficie Σ sta sul piano $2x + 3y - z + 7 = 0$ che ha normale $= \pm\{2, 3, -1\}$

Il versore richiesto è pertanto

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{14}}\{-2, -3, 1\}$$

Per quanto riguarda il flusso

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma = \frac{1}{\sqrt{14}} \iint_{\Omega} (-3) \sqrt{14} \, dx \, dy = -3\pi$$

Si noti che Σ non racchiude alcun solido: quindi il flusso richiesto non può essere espresso dall'integrale della divergenza del campo \mathbf{F} .

Per quanto riguarda il lavoro lungo il bordo di Σ :

- $F = \nabla(x + 2y + 3z)$ quindi il lavoro lungo una curva chiusa è nullo;
- il bordo $\mathcal{B}(\Sigma)$ è la circonferenza del piano $2x + 3y - z + 7 = 0$ che si proietta sulla circonferenza $x^2 + y^2 = 1, z = 0$:

$$x = \cos(t), \quad y = \sin(t), \quad z = 7 + 2\cos(t) + 3\sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\oint_{\mathcal{B}(\Sigma)} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} \, ds = \int_0^{2\pi} \{1, (-\sin(t) + 2 \cdot \cos(t) + 3 \cdot (-2\sin(t) + 3\cos(t))\} dt = 0$$

- la formula di Stokes

$$\oint_{\mathcal{B}(\Sigma)} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} \, ds = \iint_{\Sigma} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{v} \, d\sigma = 0$$

avendo naturalmente riconosciuto che $\text{rot}(\mathbf{F}) = 0$.

Esercizio 10.6. Sia Σ la porzione di superficie sferica centrata in $(0,0,0)$ e raggio 2 che si trova al di sopra del piano $z = 1$:

- scrivere una parametrizzazione per Σ
- calcolare l'area di Σ
- determinare il bordo di Σ e fornirne una rappresentazione parametrica.

Soluzione:

L'elemento d'area per la sfera di raggio r è

$$d\sigma = r^2 \sin(v) \, du \, dv \quad \rightarrow \quad d\sigma = 4 \sin(v) \, du \, dv$$

La porzione assegnata, al di sopra del piano $z = 1$, corrisponde a $0 \leq v \leq \pi/3$: pertanto

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi/3} v \sin(v) \, dv = 8\pi \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 4\pi$$

Si osservi che la semisfera di raggio 2 ha area 8π e il calcolo fatto mostra che la calotta superiore, $z \geq 1$ ha area metà dell'intera semisfera.

Il bordo di Σ è una circonferenza del piano $z = 1$, di centro $(0,0,1)$ e raggio $r = \sqrt{3}/2$.

Una rappresentazione parametrica si ricava direttamente da quanto osservato:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(t), \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(t), \quad z = 1, \quad t \in [0, 2\pi]$$

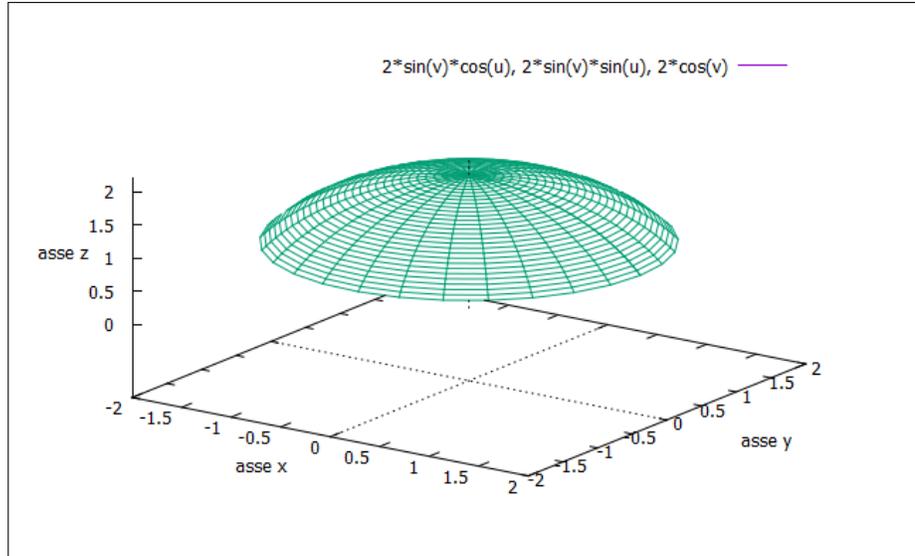


FIGURA 4. La porzione sferica centrata in $(0,0,0)$ e raggio 2 al di sopra del piano $z = 1$

La rappresentazione si ricava del resto dalle coordinate polari sferiche mettendo $v = \pi/3$.

Esercizio 10.7. Sia Σ la superficie grafico della funzione $f(x,y) = xy$, $x^2 + y^2 \leq 1$:

- calcolare l'area di Σ ,
- calcolare il vettore normale alla superficie in ogni suo punto,
- determinare il bordo di Σ e fornirne una rappresentazione parametrica.

Soluzione:

L'area delle superfici Σ cartesiane $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \Omega$

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1 + \rho^2} \rho d\rho = 2\pi(\sqrt{2} - 1)$$

Un vettore normale a Σ in ogni suo punto è

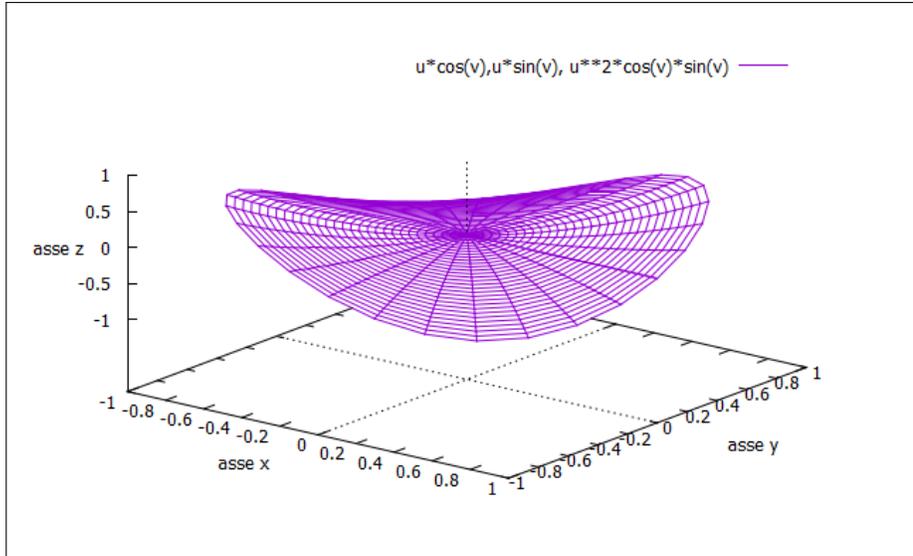
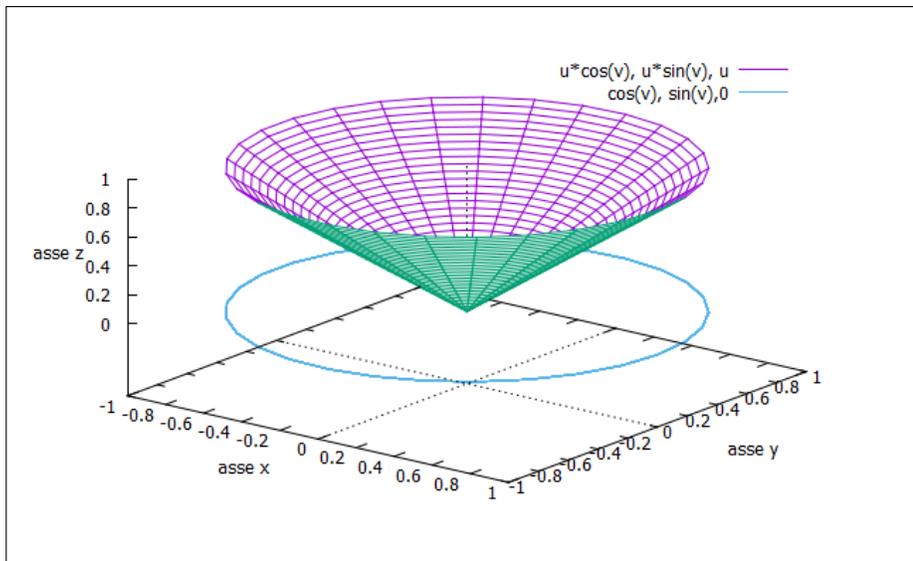
$$n = \pm\{f_x, f_y, -1\} \rightarrow v = \pm\{y, x, -1\}$$

Il bordo di $\mathcal{B}(\Sigma)$ è l'immagine del bordo di Ω tramite la $z = xy$: pertanto si rappresenta parametricamente con

$$x = \cos(t), y = \sin(t), z = \cos(t) \cdot \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Esercizio 10.8. Calcolare l'area della porzione di superficie conica di equazione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

Soluzione:

FIGURA 5. $f(x,y) = xy$, $x^2 + y^2 \leq 1$ FIGURA 6. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ interna al cilindro $x^2 + y^2 = 1$

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \sqrt{2}\pi$$

Esercizio 10.9. Sia Σ la superficie rappresentata parametricamente da

$$x = u^2, \quad y = \sqrt{2}uv, \quad z = v^2, \quad (u,v) \in \Omega : u^2 + v^2 \leq 4$$

- scrivere la matrice jacobiana e determinare L, M, N
- determinare un vettore \mathbf{v} normale a Σ ,

- calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = \{1, 0, 1\}$ attraverso Σ nella direzione del vettore \mathbf{v} scelto,

Soluzione:

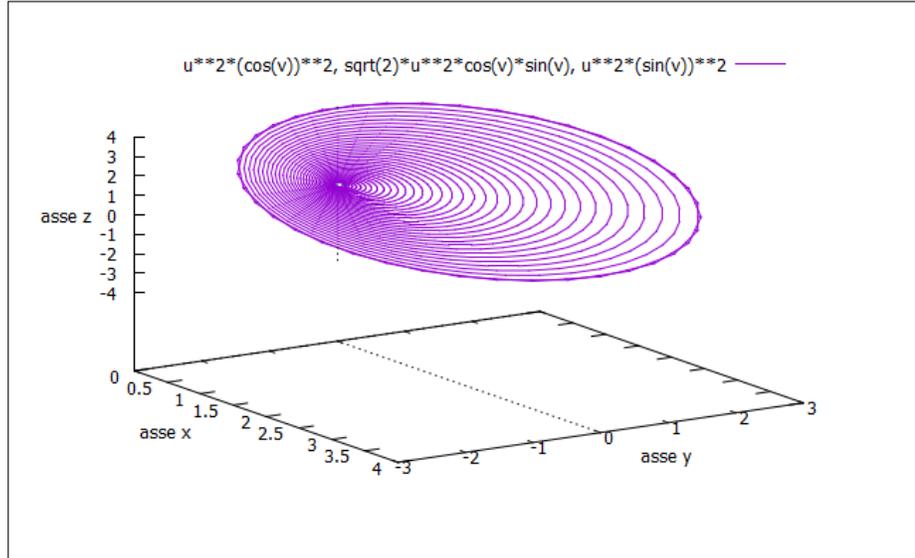


FIGURA 7. $x = u^2$, $y = \sqrt{2}uv$, $z = v^2$, $(u, v) \in \Omega : u^2 + v^2 \leq 4$

$$J = \begin{vmatrix} 2u & \sqrt{2}v & 0 \\ 0 & \sqrt{2}u & 2v \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} L = 2\sqrt{2}v^2 \\ M = -4uv \\ N = 2\sqrt{2}u^2 \end{cases}$$

$$\mathbf{v} = \pm \frac{1}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}} \{L, M, N\} = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}(u^2 + v^2)} \{2\sqrt{2}v^2, -4uv, 2\sqrt{2}u^2\}$$

Il flusso di $\mathbf{F} = \{1, 0, 1\}$:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} d\sigma = \iint_{\Omega} 2\sqrt{2}(u^2 + v^2) dudv = \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$$

Esercizio 10.10. Dato il campo $\mathbf{F}(x, y, z) = \{xy, x^2, yz\}$

- calcolare il $\text{rot}(\mathbf{F})$
- detta Σ la semisfera di centro l'origine, raggio 1 contenuta in $z \geq 0$ orientata in modo che il vettore normale \mathbf{v} abbia la terza componente non negativa calcolare l'integrale superficiale $\iint_{\Sigma} \text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{v} d\sigma$.

Soluzione:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xy & x^2 & 6yz \end{vmatrix} = \{z, 0, x\}$$

Il flusso richiesto, tenuto conto che $d\sigma = \sin(\psi) d\psi d\theta$ è

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{v} d\sigma &= \iint_{\Sigma} \{z, 0, x\} \cdot \{x, y, z\} d\sigma = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\theta \int_0^{\pi/2} \sin^2(\psi) \cos(\psi) d\psi = 0 \end{aligned}$$

Il valore del flusso coincide anche, per il teorema di Stokes, con la circuitazione

$$\oint_{\mathcal{B}(\Sigma)} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = \int_0^{2\pi} (-\cos^2(t) \sin(t) + \cos^3(t)) dt = 0$$

Esercizio 10.11. Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F}(x, y, z) = \{z, x^2y, y^2z\}$ uscente dalla superficie del solido

$$\Omega : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 + x^2 + y^2$$

Soluzione:

Il flusso di un campo uscente da un solido si calcola con il teorema della divergenza

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{F}) dx dy dz$$

da cui, tenuto conto che $\operatorname{div}(\mathbf{F}) = x^2 + y^2$ e che il solido Ω è normale rispetto al piano xy

$$\Omega : x^2 + y^2 \leq 1, \quad 2\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 + x^2 + y^2$$

si ha

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} d\sigma = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy \int_{2\sqrt{x^2 + y^2}}^{1 + x^2 + y^2} dz = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2)(1 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 dx dy$$

Servendosi delle coordinate polari si ha

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} d\sigma = 2\pi \int_0^1 \rho^2 (1 - \rho)^2 \rho d\rho = \frac{4\pi}{60}$$

Esercizio 10.12. Sia Σ la superficie cartesiana grafico della funzione $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $(x, y) \in$

$$\Omega : \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1$$

- riconoscere che Σ è una superficie di rotazione,
- calcolare l'area di Σ ,

- calcolare l'integrale superficiale $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z^4} d\sigma$.

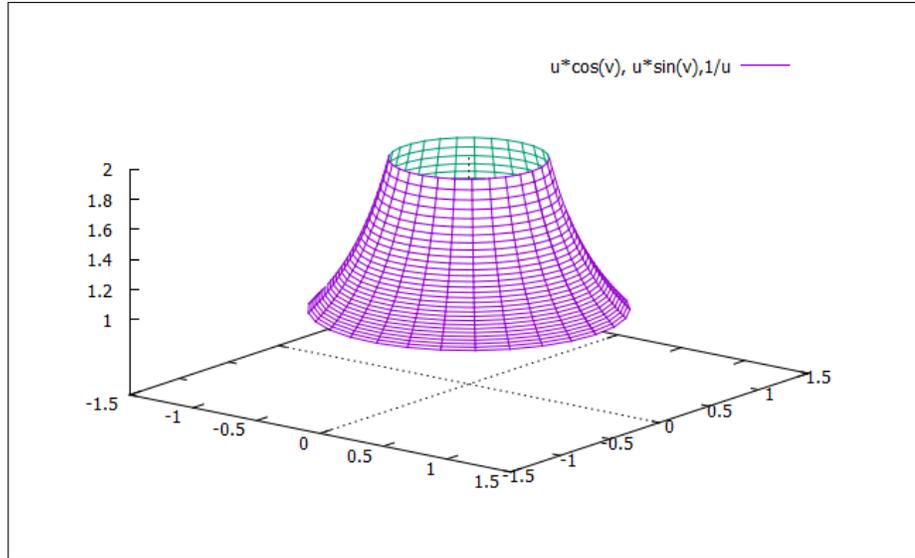


FIGURA 8. $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $(x,y) \in \Omega : \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1$

Soluzione:

La funzione $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ è radiale, quindi la superficie cartesiana Σ suo grafico è di rotazione.

Area:

$$\mathcal{A}(\Sigma) = 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^1 x \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx \approx 7.08$$

Integrale superficiale:

$$\iint_{\Sigma} \frac{1}{z^4} d\sigma = 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^1 x^4 x \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx = 2\pi \int_{\frac{1}{2}}^1 x^3 \sqrt{x^4 + 1} dx = \frac{\pi}{3} \left\{ 2\sqrt{2} - \left(\frac{1}{16} + 1\right) \sqrt{\frac{1}{16} + 1} \right\}$$

Esercizio 10.13. Sia Σ la superficie grafico della funzione $z = x^2$, $(x,y) \in \Omega : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$

- calcolare l'area di Σ ,
- calcolare l'integrale superficiale $\iint_{\Sigma} x d\sigma$,
- calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = \{0, 0, z\}$ attraverso Σ avendo scelto come versore Σ normale quello con $v_z \geq 0$.

Soluzione:

$$d\sigma = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \cdot dx dy \quad \rightarrow \quad d\sigma = \sqrt{1 + 4x^2} dx dy$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\Sigma) &= \iint_{\Omega} \sqrt{1+4x^2} \, dx \, dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-1}^1 \sqrt{1+4x^2} \, dx = \\ &= 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1+4x^2} \, dx = 4 \int_0^1 \sqrt{1+4x^2} \, dx \end{aligned}$$

La sostituzione $2x = \sinh(t)$ porta all'integrale

$$= 4 \int_0^{\alpha} \sqrt{1+\sinh^2(t)} \frac{1}{2} \cosh(t) \, dt = 2 \int_0^{\alpha} \cosh^2(t) \, dt$$

essendo $\sinh(\alpha) = 2 \rightarrow e^{\alpha} = 2 + \sqrt{5} \rightarrow \alpha = \log(2 + \sqrt{5})$.

Si ha pertanto

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \frac{1}{2} \sqrt{4x^2+1} + \frac{1}{4} \sinh^{-1}(2x) \Big|_0^{\alpha} \approx 5.92$$

Integrale superficiale:

$$\iint_{\Sigma} x \, d\sigma = \iint_{\Omega} x \sqrt{1+4x^2} \, dx \, dy = 2 \int_{-1}^1 x \sqrt{1+4x^2} \, dx = 0$$

Flusso del campo:

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \, d\sigma = \iint_{\Omega} x^2 \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} \sqrt{1+4x^2} \, dx \, dy = 2 \int_{-1}^1 x^2 \, dx = \frac{4}{3}$$

Indice analitico

- connesso per poligonali , 64
- divergenza, Teorema della , 149
- Esercizi
 - integrali curvilinei, aree, 262
 - Stokes, formula, 262, 263
- flusso del vettore , 150
- flusso uscente , 157
- formula di Stokes , 154
- funzioni ondose , 61
- Gauss, campana di , 61
- Lagrange, teorema di, 75
- massimo e minimo , 63
- rotore , 156
- Teorema
 - continuità e limite, 68

- Additività, 135
- alternate, multilineari, 26
- analisi globale, 96
- analisi locale, 96
- area, 129
- area della frontiera, 130
- area esterna, 130
- Area interna, 130
- area superfici parametriche, 169
- Aree di intersezioni, 131
- aree di poligoni, 130
- Aree di unioni, 131
- autovalori, 41, 42
- autovalori, equazione caratteristica, 42
- autovettori, 41, 42

- Baricentro, 112
- baricentro , 112
- basi di spazi vettoriali, 5
- Basi, coordinate, 16
- Binet, teorema, 27

- Calcolo integrali curvilinei , 110
- calcolo ricorsivo, 25
- Cambiamenti di base, 16
- cambiamento variabili , 142
- campana di Gauss , 61
- Campi conservativi, 120
- Campi irrotazionali, 122
- Campi irrotazionali , 125
- Campi vettoriali, 113
- Campi vettoriali , 113
- campo del gradiente, 114
- campo elettrico, 114
- Cauchy-Schwartz, 7
- cavatappi, 24
- circuitazione, 118, 156, 157
- circuitazione , 155, 157
- circuitazione di un campo, 175
- coefficiente angolare, 72
- combinazioni lineari, matrici, 14
- complemento algebrico, 25
- connesso, 64
- connesso per poligonali, 63
- continuità, 58
- convergente, 52
- coordinate ortogonali, 160
- coordinate polari, 145
- Coordinate polari sferiche , 158
- Cramer, formule, 33, 35, 36, 41, 45

- Da un parallelogramma a un quadrato , 142
- decomposizioni di curve , 107
- derivata di un determinante, 45
- derivate, 71, 74
- derivate
 - prime, 74
 - seconde, 74

- terze, 74
- Derivate parziali, 71
- derivazione delle funzioni composte, 78
- determinante, 21
- area del parallelogramma, 22
 - caso generale, 26
 - complementi algebrici, 25
 - fattore aree, 27
 - proprietá, 22
 - proprietá generali, 26
 - significato geometrico, 22
 - teorema di Binet, 27
 - volume del parallelepipedo, 22
- determinante jacobiano, 145, 158
- determinante, Cramer, 33
- determinante, derivata, 45
- diagonalizzabile, matrice, 43
- differenziali, forme, 119
- dimensione spazio, 7
- dimensione, spazi vettoriali, 6
- direzione, 71
- direzione dell'angolo, 73
- dischi, 51
- distanza, 58
- distanza punto piano, 10
- disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, 7
- diverge, 69
- divergenza, 47, 157
- divergenza di un campo, 176
- domini normali, 139
- domini rettangolari, 53
- dominio, 57
- dominio normale, 139
- elica, 109
- ellissoide, equazione del, 10
- ellissoidi, 163
- equazione caratteristica, 42
- equazione del piano, 9
- equazione dell'ellissoide, 10
- equazione della retta, 9
- equazione della sfera, 10
- Esercizi
- $f(x, y)$ modulo, ecc., 202
 - $f(x, y)$, definizione, ecc., 198
 - area del parallelogramma, 183
 - Area superfici, 265, 266
 - Area superfici cartesiane, 270
 - aree e volumi, 190
 - autovalori, autovettori, 193
 - Binet, teorema, 189
 - cambi di base, 185
 - campi vettoriali, 233–235
 - combinazioni lineari, 181
 - curve cartesiane, lunghezza, 229
 - curve cicloide, lunghezza, 228
 - curve polari, lunghezza, 227
 - curve, circonferenza, 225
 - curve, ellisse, 225
 - curve, integrali curvilinei, 230, 231
 - curve, lunghezza, 223, 226, 229
 - curve, poligonali, 225
 - curve, tangenti, ortogonali, 223
 - derivata funzioni composte, 220
 - derivate direzionali, 209
 - derivate direzionali, 213
 - derivate funzioni composte, 206, 207
 - determinanti, 189
 - distanza punto piano, 184
 - equazione della sfera, 184
 - equazione di un piano, 191
 - Flusso attraverso una superficie, 267, 271–274
 - forma quadratica, 188
 - forme differenziali, 240, 241
 - formula di Taylor, 217
 - formule di Cramer, 192
 - gradiente, 205
 - gradiente, laplaciano, 205
 - immagine di una matrice, 192
 - insieme di definizione, 196
 - insiemi convessi, frontiere, 199
 - insiemi del piano, 195
 - integrali curvilinei, 232
 - integrali doppi, 243, 245, 246, 248, 250, 252, 253
 - integrali doppi, aree, 249
 - integrali doppi, cambio coordinate, 260
 - integrali doppi, coord.polari, 255–257, 260
 - Integrali superficiali, 267

- la funzione parte intera, 200
 Lagrange $f(x,y)$, 214
 Lagrange,teorema di $f(x,y)$, 212
 lavoro, campi, 241
 lavoro, campi vettoriali, 236
 lavoro, formula Stokes, 261
 lavoro, potenziale, 239, 242
 limite $f(x,y)$, 209, 210
 linee di livello, 213
 lunghezza curve, 223
 matrice hessiana, 208
 matrice inversa, 190
 matrice trasposta, 183
 matrice trasposta, simmetrica, 187
 matrici, 183
 matrici prodotto, 189
 minimo e massimo dentro ellisse, 220
 minimo e massimo in un quadrato, 219
 minimo o massimo di $f(x,y)$, 197
 modulo di un vettore, 181
 nucleo di una matrice, 186
 piani e rette nello spazio, 188
 piano per tre punti, 184
 piano tangente, 215
 piano tangente $f(x,y)$, 210
 potenziale, campi vettoriali, 235, 236
 potenziale, lavoro, 237, 238
 prodotti scalari, 188
 prodotto di matrici, 183
 prodotto matrice vettore, 187
 prodotto vettoriale, 183
 profilo altimetrico, 212
 punti critici, classificazione, 218
 punti stazionari, 216
 rette incidenti, 191
 Stokes formula, 261
 successioni di numeri complessi, 200
 successioni nel piano, 196
 Superfici di rotazione, 267
 Superficie conica, 270
 Superficie sferica, 269
 Taylor, sviluppi di, 217
 teorema di Lagrange $f(x,y)$, 207
 teorema valori intermedi, 200
 trasformazione matrice vettore, 185
 vettori funzioni di un parametro, 182
 vettori ortogonali, 181
 esistenza degli zeri, 63
 filo materiale, 111
 flusso, 149, 157
 flusso del rotore, 175
 flusso uscente, 176
 forme differenziali, 119
 formula di Stokes, 157
 formula di Stokes, 157
 formule di Green, 156
 Formule di Taylor gratuite, 89
 forza gravitazionale, 114
 funzione caratteristica, 58
 funzioni continue, 58
 funzioni radiali, 60, 70
 Geometria analitica, 9
 goccia d'acqua, 74
 gradiente, 72
 gradiente, 115
 gradiente, vettore, 47
 Green, formule di, 156
 immagine, 18, 62
 immagine di funzioni continue, 64
 informazione sui valori, 69
 iniettive, rappresentazioni, 105
 Insieme di definizione, 57
 insieme immagine, 62
 insiemi chiusi, 56
 insiemi chiusi e limitati, 96
 insiemi connessi, 56
 insiemi convessi, 56
 insiemi non misurabili, 131
 Integrabilità funzioni continue, 133
 Integrale curvilineo, 110
 Integrali curvilinei, 105
 Integrali curvilinei, 109, 117
 Integrali doppi
 cambiamento variabili, 142
 Integrali multipli, 133
 integrali superficiali, 171
 integrali tripli, 157
 Interpretazione geometrica, 82

- intersezione due rette, 32
- intervallo chiuso e limitato, 64
- inversa, matrice, 35
- involuppo lineare, 6
- jacobiana di superfici, 159
- jacobiano, determinante , 145
- Ker, 18, 19
- Lavoro gradienti , 119
- limitata, 51
- limite, 52, 67, 68
 - definizione , 68
 - esempio , 67
- Limite infinito, 69
- Limiti all'infinito, 70
- Linearità, 18
- linearità, 134
- Linearità dell'integrale, 135
- linearmente indipendenti, 4
- linee coordinate, 160
- linee di flusso , 124
- linee di livello, 60, 115
- linee di livello , 115
- Lipschitziana, 76
- lunghezza curve , 105
- Maggiorazione lunghezze , 107
- Massimi e minimi relativi, 93
- massimo, 63
- matrice a scalini, 29
- matrice inversa, 35
- matrice jacobiana , 145
- matrice trasposta, 15
- matrici, 3
 - colonne , 14
 - combinazioni lineari , 14
 - elementi delle , 13
 - immagine, Range , 18
 - nucleo, Ker , 18
 - prodotto , 14, 17
 - prodotto matrice vettore , 15
 - rango , 18
 - rotazioni , 15
 - simmetriche , 13
 - spazi vettoriali delle , 14
 - teorema di Rouchè-Capelli, 19
 - trasposta , 15
 - trasposta del prodotto , 18
 - trasposte, prodotti , 15
- matrici , 13
- Matrici di funzioni, 45
- matrici diagonali, 13
- matrici, funzioni, 45
- matrici, stime numeriche, 46
- Metodo freccette , 113
- minimo, 63
- Misura di Peano-Jordan, 129
- misura di Peano-Jordan, 130
- misurabile, 130
- modulo di un vettore, 3
- multilineari alternate, 26
- nabla, 72
- nucleo, 18
- onda , 62
- operazioni con vettori, 3
- ortogonali, vettori, 7
- ortogonalità, indipendenza, 7
- paraboloidi, 164
- partizione dell'intervallo, 110
- Peano-Jordan, 129
- pendenza, 71, 72
- pendenza maggiore, 73
- piani, 161
- piano tangente, 76
- piano, equazione del, 9
- poligonali, 56
- Poligonali inscritte , 106
- potenziale, 120
- Potenziali , 120
- prodotti di funzioni integrabili, 134
- prodotto fra matrici, 17
- prodotto matrice vettore, 18
- prodotto scalare, 7, 117
- prodotto vettoriale, 23
 - proprietà, 23
- Prolungamento per continuità, 69
- proprietà triangolare, 51
- Proprietà dell'area, 129

- punti critici, 94
- Punti di frontiera, 55
- punti esterni, 55
- Punti interni, 55
- punti medi, 75

- quadrettature, 129
- quadriche, 11

- Range, 18
- rango di una matrice, 28
- rapporto incrementale, 71
- rappresentazioni parametriche , 105
- regola di Sarrus, 21
- retta tangente, 72
- retta, equazione della, 9
- ricoprire, 131
- ricorsivo, 25
- riduzione degli integrali doppi, 137
- rotore, 47, 156, 157, 175
- rotore , 122
- rotore, ruotare , 124
- ruotare , 124

- Sarrus, 21
- semipiani, 52
- sfera, 78
- sfera, equazione della, 10
- sfere, 162
- sferiche, coordinate , 158
- simmetriche, matrici, 13
- sistemi, 3
- Sistemi lineari, 31, 32
- sistemi lineari, 31
- Sistemi non-Cramer, 38
- sistemi, calcolo numerico, 46
- sistemi, determinante nullo, 34
- somme integrali, 133
- sottografici, 53
- spazi vettoriali, 4
- stabilizzarsi, 67
- stabilizzazione , 68
- Stime integrali, 135
- Stokes, teorema di , 153
- superfici orientabili, 173
- superfici parametriche, 159
- superfici quadriche, 11

- Taylor, 83
- Teorema
 - Weierstrass, 63
- Teorema
 - cambio coordinate integrali doppi, 144
 - condizione necessaria di campi conservativi, 123
 - condizione sufficiente per campi conservativi, 125
 - continuità e derivate limitate, 76
 - convergenza di una successione, 52
 - della divergenza , 157
 - della divergenza nello spazio, 176
 - divergenza nel piano, 150
 - esistenza degli zeri, 63
 - fondamentale del calcolo, 119
 - formula di Taylor, 86
 - formule riduzione integrali, 138
 - integrabilità funzioni continue, 133
 - integrali curvilinei, 110
 - integrazione domini normali, 139
 - invertibilità derivate miste, 74
 - misurabilità e frontiere, 131
 - misurabilità intersezioni, 131
 - Stokes , 153
 - Stokes nello spazio, 173, 174
 - valor medio, 81
 - valori intermedi, 64
- teorema
 - di Lagrange, 75
 - di Weierstrass, 62
 - esistenza degli zeri, 63
- teorema del valor medio, 80
- Teorema della divergenza, 157
- Teorema di Binet, 189
- teorema di Binet, 27
- Teorema di Rouchè Capelli, 39
- Teorema di Weierstrass, 96
- Teorema fondamentale del calcolo, 119
- Teorema
 - della divergenza , 149
- terna destrorsa, 24
- Topologia, 54

trasformazione affine , 144
trasformazione composta, 17
Trasformazioni affini, 141
trasformazioni affini, 141
Trasformazioni elementari, 141
trasposta, matrice, 15
triangoli, 161

unicità, sistemi, 19
Uso numerico, 90
Uso qualitativo, 90

valor medio, 81
versore normale, 149
vettore
 modulo, 3
 nullo, 3
vettore gradiente, 47
vettori, 3

base , 5
bidimensionali , 3
combinazione lineare , 4
combinazioni lineari , 4
indipendenza lineare, 4
involuppo lineare , 6
n-dimensionali , 3
operazioni con , 3
ortogonali , 7
paralleli , 3
polinomi di grado ≤ 2 , 4
prodotto scalare , 7
tridimensionali , 3
versore , 10
 dimensione dello spazio , 5
vettori colonna, 14

Weierstrass, teorema, 62
Weierstrass, teorema di , 63