VARIABILE COMPLESSA
2006-2007

Soluzioni Esame

4 giugno 2007

1.1. Esercizio. *Sia*

$$f(z) = \frac{z+1}{z-1}$$

determinare e disegnare le immagini tramite f *dei seguenti insiemi*

- $X : Im(z) = 0$, *asse* x
- $Y : Re(z) = 0$, *asse* y
- $\Omega : |z-1| > 1$, *complementare di un cerchio.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$\boxed{f(X):}$

$$f(0) = -1, \quad f(-1) = 0, \quad f(1) = w_\infty$$

da cui si ricava che $f(X)$ é l'asse reale del piano w.

$\boxed{f(Y):}$

$$f(i) = -i, \quad f(0) = -1, \quad f(-i) = i$$

da cui si ricava che $f(Y)$ é la circonferenza del piano w passante per $-i$, -1, i cioé la $|w| = 1$.

$\boxed{f(\Omega):}$

Tenuto conto che

$$w = \frac{z+1}{z-1} = 1 + \frac{2}{z-1} \quad \rightarrow \quad w - 1 = \frac{2}{z-1}$$

si riconosce che

$$|w-1| = \frac{2}{|z-1|}$$

da cui

$$|z-1| > 1 \quad \rightarrow \quad |w-1| < 2$$

ovvero $f(\Omega)$ é il cerchio aperto di centro $w = 1$ e raggio $r = 2$.

1.2. Esercizio. *Sia* $f(z) = \sin(z^2)$

- *determinare* $u(x, y)$ *e* $v(x, y)$*, parti reale e imm. di* $f(z)$*,*
- *indicato con* $\mathcal{S}$ *il segmento di estremi* $z_0 = 0$ *e* $z_1 = 1 + i$ *determinare*

$$\min_{z\in\mathcal{S}} |f(z)|, \quad \max_{z\in\mathcal{S}} |f(z)|$$

- *calcolare l'integrale*

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z+1+i}\, dz$$

essendo $\mathcal{C}$ *la circonferenza di centro l'origine e raggio* $r = 2$ *percorsa in senso antiorario,*

SOLUZIONE:

- Da $z = x + iy$, $\quad \sin(x + iy) = \dfrac{1}{2i}\left\{e^{-y+ix} - e^{y-ix}\right\}$ segue

$$\sin(z^2) = \cosh(2\,x\,y)\,\sin(x^2 - y^2) + i\,\cos(x^2 - y^2)\,\sinh(2\,x\,y)$$

$$\begin{cases} u(x, y) = \cosh(2\,x\,y)\,\sin(x^2 - y^2) \\ \\ v(x, y) = \cos(x^2 - y^2)\,\sinh(2\,x\,y) \end{cases}$$

- I punti del segmento hanno coordinate

$$x(t) = t,\ y(t) = t, \quad t \in [0, 1] \quad \to \quad 2x(t)y(t) = 2t^2,\ x^2(t) - y^2(t) = 0$$

Su tali punti riesce

$$\sin(z^2(t)) = i\sinh(2\,t^2) \quad \to \quad |\sin(z^2(t))| = \sinh(2\,t^2)$$

da cui segue

$$\min_{z\in\mathcal{S}} |f(z)| = 0, \quad \max_{z\in\mathcal{S}} |f(z)| = \sinh(2) \approx 3.62686$$

- Tenuto conto che $|1 + i| < 3$, cioé il punto $1 + i$ é interno alla circonferenza su cui si integra, dal teorema di rappresentazione di Cauchy si ha

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-(-1-i)}\, dz = 2\pi i f(-1 - i)$$

da cui si ricava

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z+1+i}\, dz = -2\pi\,\sinh(2) \approx -22.7882$$

1.3. Esercizio. *Sia*

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2-z} + \frac{2}{1-z}$$

- *determinare e classificare i punti singolari,*
- *determinare la serie di Taylor di $f(z)$ di punto iniziale $z_0 = -1$*
- *determinare lo sviluppo di Laurent nella corona $0 < |z| < 1$.*

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

- La funzione assegnata ha i seguenti punti singolari

$$z = 0, \quad z = 1, \quad z = 2$$

  tutti poli di primo ordine.
- Lo sviluppo di punto iniziale $z_0 = -1$, cioé in serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z+1)^k$$

  si ottiene osservando che

$$f(z) = -\frac{1}{1-(z+1)} + \frac{1}{3}\frac{1}{1-\dfrac{z+1}{3}} + \frac{1}{1-\dfrac{z+1}{2}}$$

  da cui

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ -1 + \frac{1}{3^{k+1}} + \frac{1}{2^k} \right\} (z+1)^k \quad \forall |z+1| < 1$$

-

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2-z} + \frac{2}{1-z} =$$

$$= \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z} + \frac{2}{1-z} =$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2^{k+1}} + 2 \right\} z^k$$

  sviluppo di Laurent convergente per $0 < |z| < 1$.

1.4. Esercizio. *Calcolare gli integrali*

$$\int_{\mathcal{C}_k} \frac{e^{z^2}}{z^2(z^2-4)}\,dz, \qquad k=1,2,3$$

- *essendo* $\mathcal{C}_1$ *la circonferenza di centro l'origine e raggio* $r=1$,
- *essendo* $\mathcal{C}_2$ *la circonferenza di centro l'origine e raggio* $r=3$,
- *essendo* $\mathcal{C}_3$ *la poligonale di vertici*

$$A=(3,0), \quad B=(0,3), \quad C=(-3,0), \quad D=(0,-3), \quad A=(3,0)$$

tutte percorse nel verso antiorario.

Soluzione:

- Tenuto conto nel cerchio che $\mathcal{C}_1$ cade la sola singolaritá polare di secondo ordine $z=0$ si ricava, dalla formula dei residui,

$$\int_{\mathcal{C}_k} \frac{e^{z^2}}{z^2(z^2-4)}\,dz = 2\pi i \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{z^2}}{z^2-4}\right) =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left\{\frac{-2\,e^{z^2}\,z}{(-4+z^2)^2} + \frac{2\,e^{z^2}\,z}{-4+z^2}\right\} = 0$$

- Tenuto conto nel cerchio che $\mathcal{C}_2$ cadono tre singolaritá polari: $z=0$ di secondo ordine, $z=\pm 2$ di primo ordine, si ricava, dalla formula dei residui,

$$\int_{\mathcal{C}_k} \frac{e^{z^2}}{z^2(z^2-4)}\,dz =$$

$$= 2\pi i\left\{\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{z^2}}{z^2-4}\right) + \lim_{z\to 2}\frac{e^{z^2}}{z^2(z+2)} + \lim_{z\to -2}\frac{e^{z^2}}{z^2(z-2)}\right\} = 0$$

- L'integrale sulla poligonale $\mathcal{C}_3$ é uguale, vedi Figura 1, a quello sulla circonferenza $\mathcal{C}_2$ essendo la funzione integranda analitica in tutta la regione contornata da $\mathcal{C}_3 \cup \mathcal{C}_2$ da cui

$$\int_{\mathcal{C}_3} \frac{e^{z^2}}{z^2(z^2-4)}\,dz = 0$$

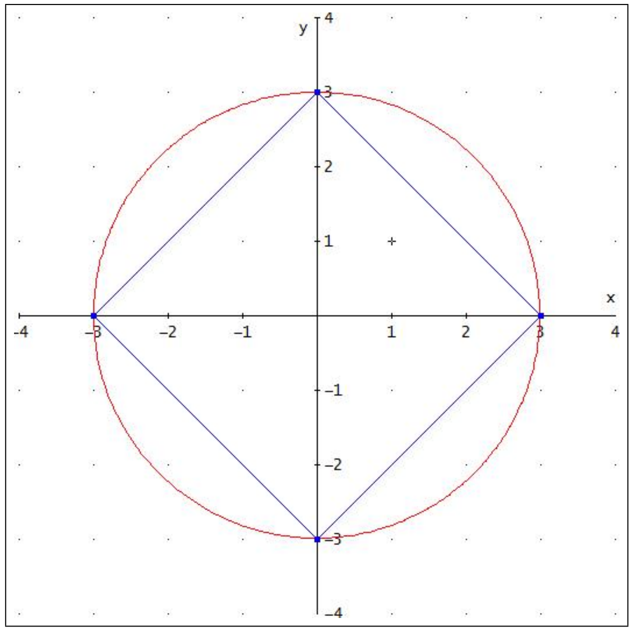

FIGURA 1. $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_2$