VARIABILE COMPLESSA
2006-2007

Esame 2° Appello

2 luglio 2007

2.1. Esercizio. *Sia*

$$S(z) = \frac{z}{z-2}$$

determinare e disegnare le immagini tramite S dei seguenti insiemi

- $\Phi : Re(z) \leq 0$, *semipiano* $x \leq 0$
- $\Psi : Im(z) \geq 0$, *semipiano* $y \geq 0$
- $\Omega : |z| \leq 1$, *cerchio di centro* $z_0 = 0$ *e raggio 1.*

SOLUZIONE:

La funzione S trasforma com'é noto l'insieme $\mathfrak{C}$ delle rette e circonferenze in sé.

Per determinare l'immagine dei due semipiani Φ, Ψ assegnati e del cerchio Ω assegnati basterá determinare le immagini dei due assi $X : x = 0$, $Y : y = 0$ e della circonferenza $\partial\Omega$.

- $S(X)$: basta cercare le immagini di tre punti per determinare la retta o la circonferenza immagine
  - $S(0) = 0$
  - $S(-1) = \frac{1}{3}$
  - $S(1) = -1$

  $S(X) := \{v = 0\}$, asse reale del piano w.
- $S(Y)$: basta cercare le immagini di tre punti per determinare la retta o la circonferenza immagine
  - $S(0) = 0$
  - $S(i) = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$
  - $S(-i) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$

  $S(Y) :=$ circonferenza del piano w per i tre punti immagine trovati: centro $(\frac{1}{2}, 0)$ passante per l'origine.
- $S(\Omega)$: basta cercare le immagini di tre punti della circonferenza $\partial\Omega$ per determinare la retta o la circonferenza immagine
  - $S(i) = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$
  - $S(-i) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$
  - $S(1) = -1$

  $S(\partial\Omega)$: circonferenza del piano w passante per le tre immagini trovate: centro $(-\frac{1}{3}, 0)$, raggio $\rho = \frac{2}{3}$.

Tenuto conto delle immagini $S(\Phi)$, $S(\Psi)$, $S(\Omega)$ trovate si deduce che

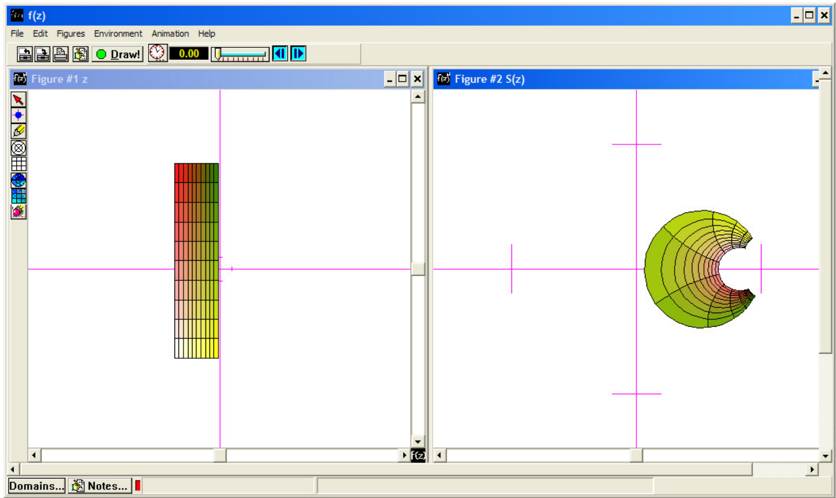

FIGURA 1. $\Phi : Re(z) \leq 0, ,\quad S(\Phi)$

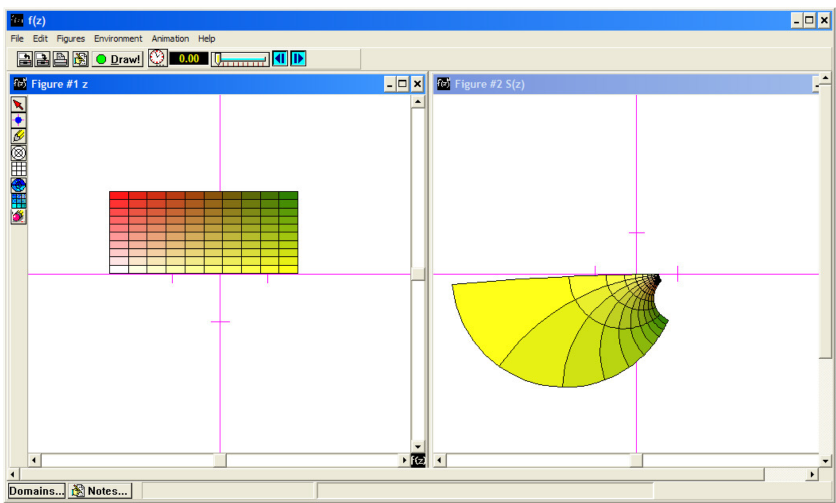

FIGURA 2. $\Psi : Im(z) \geq 0,\quad S(\Psi)$

- $S(\Phi)$: cerchio di centro $(\frac{1}{2}, 0)$ passante per l'origine, vedi Figura 1
- $S(\Psi)$: semipiano $v \leq 0$, vedi Figura 2,
- $S(\Omega)$: cerchio di centro $(-\frac{1}{3}, 0)$, raggio $\rho = \frac{2}{3}$, vedi Figura 3.

2.2. Esercizio. *Assegnato il prodotto infinito*

$$e^z \prod_{k=1}^{k=\infty} \left(1 + \frac{e^{2z}}{\pi^2 k^2}\right)$$

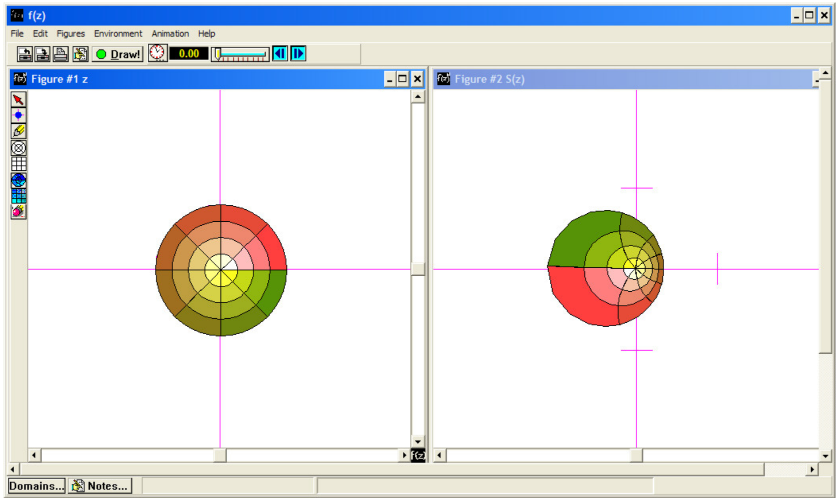

FIGURA 3. $\Omega : |z| \leq 1, \quad S(\Omega)$

- *determinare per quali z é assolutamente convergente,*
- *detto $G(z)$ il prodotto cui converge determinare le soluzioni dell'equazione $G(z) = 0$,*
- *determinare il valore di tale prodotto nei punti*

$$z_1 = -\pi i, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = \pi i$$

.

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

- L'assoluta convergenza del prodotto equivale alla assoluta convergenza della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{2z}}{\pi^2 k^2}$$

cosa che si ottiene in ogni punto z in quanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{e^{2z}}{\pi^2 k^2} \right| = \left| e^{2z} \right| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

- $$g(z) = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = -k^2 \pi^2$$

ovvero

$$e^z = \pm k\pi i \quad \rightarrow \quad z = \log(k\pi) \pm i \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right), \quad n \in \mathbb{N}$$

- Il calcolo nei tre punti assegnati é il seguente
  - $z_1 = -\pi i \quad \rightarrow \quad e^{z_1} = e^{-pii} = -1, \quad e^{2z_1} = e^{-2\pi i} = 1$

$- \; z_2 = 0 \quad \to \quad e^{z_2} = e^{2z_2} = e^0 = 1$
$- \; z_3 = e^{z_3} = e^{pii} = -1, \quad \pi i \quad \to \quad e^{2z_3} = e^{2\pi i} = 1$

I fattori del prodotto sono gli stessi in tutti e tre i punti assegnati: tenuto conto che

$$\sin(\zeta) = \zeta \prod_{k=1}^{k=\infty} \left(1 - \frac{\zeta^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

ovvero

$$\frac{\sin(i\zeta)}{i\zeta} = \prod_{k=1}^{k=\infty} \left(1 + \frac{\zeta^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

ne segue

$$z_1 : \quad \to \quad - \prod_{k=1}^{k=\infty} \left(1 + \frac{1}{\pi^2 k^2}\right) = -\frac{\sin(i)}{i}$$

$$z_2 : \quad \to \quad \prod_{k=1}^{k=\infty} \left(1 + \frac{1}{\pi^2 k^2}\right) = \frac{\sin(i)}{i}$$

$$z_3 : \quad \to \quad - \prod_{k=1}^{k=\infty} \left(1 + \frac{1}{\pi^2 k^2}\right) = -\frac{\sin(i)}{i}$$

2.3. Esercizio. *Assegnata la funzione*

$$f(z) = \frac{1 + z + z^2}{z^4 + 4}$$

- *determinare e classificare i punti singolari,*
- *determinare i primi 6 addendi della serie di Taylor di $f(z)$ di punto iniziale $z_0 = 0$,*
- *calcolare servendosi dell'algoritmo dei residui, l'integrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + x + x^2}{x^4 + 4}\, dx$$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

- I punti singolari della funzione razionale $f(z)$ sono tutti e soli gli zeri del denominatore

$$z^4 + 4 = 0 \quad \to \quad (z^2 - 2i)(z^2 + 2i) = 0 \quad \to \quad \begin{cases} z_k = \pm\sqrt{2i} & k = 1, 2 \\ \\ z_k = \pm\sqrt{-2i} & k = 3, 4 \end{cases}$$

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = -1 - i, \quad z_3 = 1 - i, \quad z_4 = -1 + i$$

Si tratta di 4 poli di primo ordine

$$f(z) = \frac{1+z+z^2}{\prod_{k=1}^{4}(z-z_k)}$$

- Osservato che per $|z| < 1$ si ha

$$f(z) = \frac{1}{4}\,(1+z+z^2)\frac{1}{1+\dfrac{z^4}{4}} = \frac{1}{4}\,(1+z+z^2)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{4k}}{4^k}$$

se ne deduce

$$f(z) = \frac{1}{4}\,(1+z+z^2)(1-\frac{z^4}{4}+\frac{z^8}{16}+....) \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\,z+\frac{1}{4}\,z^2-\frac{z^4}{16}-\frac{z^5}{16}-\frac{z^6}{16}+....$$

- Indicati con S_R e C_R il segmento $x \in [-R, R]$ e la semicirconferenza $x^2+y^2 = R^2$, $y \geq 0$ riesce, per $R > \sqrt{2}$,

$$\int_{S_R} f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i\,(Res(f, z_1) + Res(f, z_2))$$

Tenuto conto che

$$Res(f, z_1) = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\,f(z) = \frac{1}{16}(1-5i)$$

$$Res(f, z_2) = \lim_{z\to z_2}(z-z_2)\,f(z) = \frac{1}{16}(-1-i)$$

riesce

$$\int_{S_R} f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz = \frac{3}{4}\pi$$

Tenuto conto che

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{S_R} f(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x+x^2}{x^4+4}\,dx$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} f(z)dz = \lim_{R\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{1+R\,e^{i\theta}+R^2\,e^{2i\theta}}{R^4\,e^{4i\theta}}iR\,e^{i\theta}d\,\theta = 0$$

risultato quest'ultimo ottenuto passando al limite sotto il segno di integrale servendosi del teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata, ne segue

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x+x^2}{x^4+4}\,dx = \frac{3}{4}\pi$$

2.4. Esercizio. *Sia*

$$f(z) = \frac{z}{z-1}$$

- *calcolare l'integrale di* $f(z)$ *lungo il segmento* $\mathcal{S}$ *di estremi* $A = (-1, 0)$ *e* $B = (1 + \sqrt{2}, \sqrt{2})$ *percorso da* A *a* B*,*
- *calcolare l'integrale di* $f(z)$ *lungo la circonferenza* $\mathcal{C}$ *di centro* $z_0 = 1$ *e raggio* $\rho = 2$ *percorsa in senso antiorario,*
- *calcolare i due integrali di* $f(z)$ *lungo i due archi della* $\mathcal{C}$ *di estremi i punti* A *e* B *percorsi nel verso da* A *a* B*.*

SOLUZIONE:

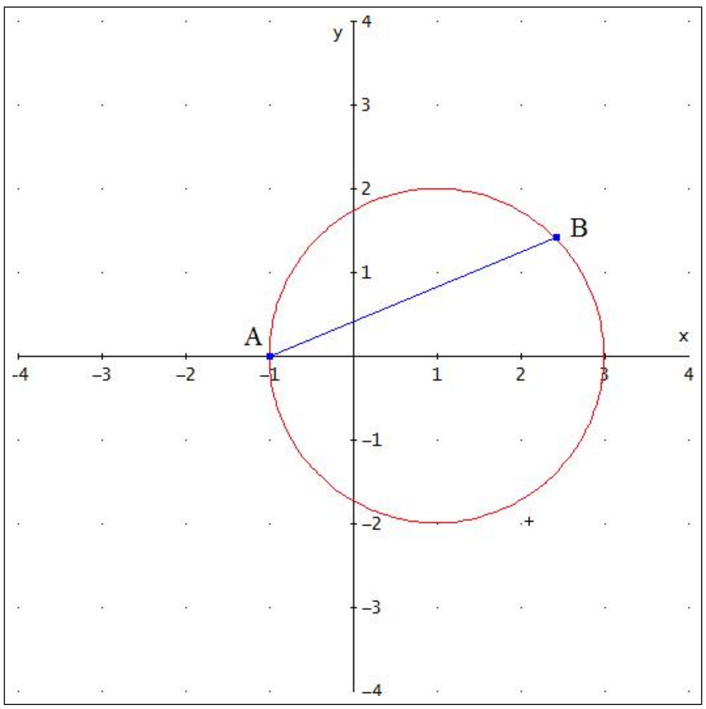

FIGURA 4. $\mathcal{S}$, $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$

La funzione $f(z)$ si esprime, dividendo, anche come

$$\frac{z}{z-1} = 1 + \frac{1}{z-1}$$

- $$\int_{\mathcal{S}} f(z)dz = \int_{\mathcal{S}} dz + \int_{\mathcal{S}} \frac{1}{z-1} dz =$$
  $$= \{z + \log(z-1)\}\Big|_A^B = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2} + i(\frac{1}{4}\pi + \pi)$$

- $$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \int_{\mathcal{C}} dz + \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-1}dz = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-1}dz = 2\pi i$$
- Detto $\mathcal{Q}_1$ l'arco superiore (quello piú breve tra A e B) riesce
  $$\int_{\mathcal{Q}_1} f(z)dz = \int_{\mathcal{S}} f(z)dz = 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2} + i(\frac{1}{4}\pi + \pi)$$
  mentre per il secondo $\mathcal{Q}_2$ riesce
  $$-\int_{\mathcal{Q}_1} f(z)dz + \int_{\mathcal{Q}_2} f(z)dz = \int_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2\pi i$$
  da cui
  $$\int_{\mathcal{Q}_2} f(z)dz = 2\pi i + 2 + \sqrt{2} + i\sqrt{2} + i(\frac{1}{4}\pi + \pi)$$