VARIABILE COMPLESSA
2006-2007

Soluzioni Esame

3 settembre 2007

3.1. Esercizio. *Determinare* $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ *tale che*

$$f(1) = 0, \quad f(i) = 1, \quad f(-1) = \infty;$$

- *detto* T *il triangolo di vertici* $A = (1,1)$, $B = (2,0)$, $C = (1,-1)$ *determinare e disegnare* $f(T)$,
- *posto* $\Omega := \{|z-1| \le 1\}$ *determinare e disegnare* $f(\Omega)$,
- *calcolare* $\iint_\Omega |f'(z)|^2\, dx\, dy$.

Soluzione

$$\left\{ \begin{array}{lll} f(1) = 0 & \rightarrow & f(z) = \lambda \dfrac{z-1}{cz+d} \\ & & \\ f(-1) = \infty & \rightarrow & f(z) = \lambda \dfrac{z-1}{z+1} \\ & & \\ f(i) = 1 & \rightarrow & \lambda = \dfrac{i+1}{i-1} = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \quad f(z) = i\frac{1-z}{1+z}$$

- $$f(A) = i\frac{-i}{2+i} = \frac{2-i}{5}$$
  $$f(C) = i\frac{i}{2-i} = \frac{-2-i}{5}$$
  $$f(B) = \frac{-i}{3}$$

  I tre lati di T saranno trasformati in tre curve che possono essere segmenti o archi di circonferenze:
  - considerato che il lato AC contiene il punto $z = 1$ che viene trasformato nell'origine, il lato AC é trasformato, quindi, nell'arco di circonferenza $\mathcal{C}_T$ determinata dai tre punti
    $$f(A) = \frac{2-i}{5}, \quad f(1) = 0, \quad f(C) = \frac{-2-i}{5}$$
  - i lati AB e CB sono trasformati due archi $\widehat{f(A)\, f(B)}$ e $\widehat{f(C)\, f(B)}$ che si incrociano in $f(B)$ ad angolo retto e

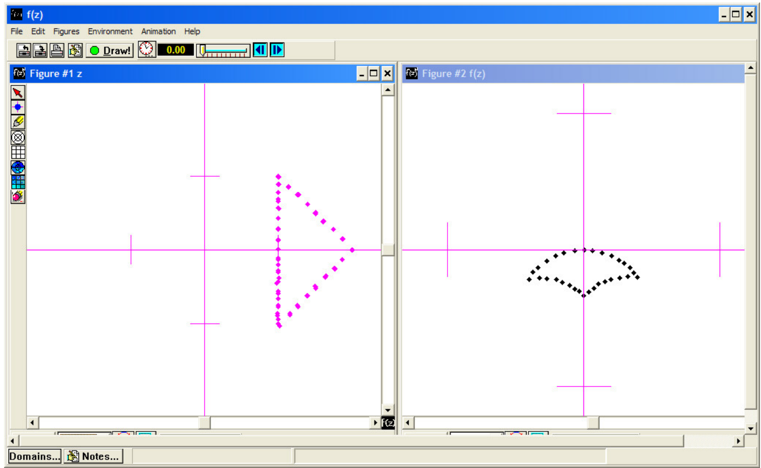

FIGURA 1. $T : A = (1,1),\ B = (2,0),\ C = (1,-1) \quad f(T)$

incrociano $\widehat{f(A)\,f(C)}$ in $f(A)$ ed $f(C)$ a 45^0 (tenuto conto che $f(z)$ rappresenta una trasformazione conforme di T).

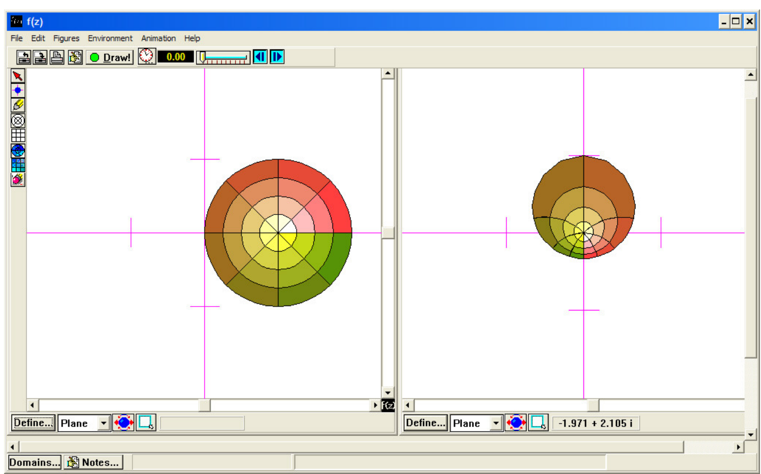

FIGURA 2. $\Omega := \{|z-1| \leq 1\} \quad f(\Omega)$

- La circonferenza $\mathcal{C} :\ |z-1| = 1$ non passa per $z = -1$ e quindi é trasformata da $f(z)$ in un'altra circonferenza, $f(\mathcal{C})$ $f(\Omega)$ é quindi l'interno di $f(\mathcal{C})$.
- Il segmento reale $\mathcal{S} :\ 0 \leq x \leq 2$, diametro di $\mathcal{C}$, é trasformato nel segmento di estremi

$$f(0) = i, \quad f(2) = -\frac{i}{3}$$

La circonferenza $f(\mathcal{C})$ deve intersecare $f(\mathcal{S})$ ortogonalmente: quindi $f(\mathcal{S})$ deve essere un diametro di $f(\mathcal{C})$.

- $f(\mathcal{C})$ é quindi la circonferenza di centro z_C il punto medio di $f(\mathcal{S})$
$$z_C = \frac{i}{3}$$
e raggio $\rho = \dfrac{2}{3}$.
- L'integrale richiesto rappresenta l'area del cerchio $f(\Omega)$:
$$\iint_\Omega |f'(z)|^2 \, dx\, dy = Area(f(\Omega)) = \pi \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

3.2. Esercizio. *Assegnata* $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$

- *determinare* f *analitica tale che* $Re(f) = u, \quad f(0) = 0,$
- *detta* $\mathcal{C}$ *una circonferenza di centro l'origine calcolare*
$$\int_C \frac{e^{f(z)}}{z} \, dz$$
- *detta* $\mathcal{C}_+$ *la semicirconferenza di* $\mathcal{C}$ *contenuta nel semipiano* $y \geq 0$ *calcolare il modulo* $\left| \int_{\mathcal{C}_+} f(z)\, dz \right|$

$\boxed{\text{Soluzione}}$

- $u(x,y)$ é armonica in $\mathbb{R}^2$ e quindi é la parte reale di infinite funzioni armoniche in $\mathbb{R}^2$
$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$
con
$$\begin{cases} v_x = & -u_y & = 6xy \\ v_y = & u_x & = 3x^2 - 3y^2 \end{cases} \quad \to \quad v = 3x^2y - y^3 + c$$
Ne segue
$$f(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3 + c)$$
La condizione $f(0) = 0$ implica $c = 0$, quindi
$$f(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) =$$
$$= x^3 + 3i\, x^2\, y - 3\, x\, y^2 - i\, y^3 = (x+iy)^3 = z^3$$
- L'integrale assegnato rappresenta, a meno del fattore $1/2\pi i$, per il teorema di Cauchy il valore della funzione analitica a numeratore nell'origine, pertanto
$$\int_C \frac{e^{f(z)}}{z} \, dz = 2\pi i e^{f(0)} = 2\pi i$$

- Indicati con A e B gli estremi di $\mathcal{C}_+$ il modulo richiesto é
$$|F(B) - F(A)|$$
essendo F una qualsiasi funzione analitica primitiva di $f(z)$.
Osservato che le primitive sono
$$F(z) = \frac{1}{4}z^4 + c$$
funzioni pari, ed essendo A e B simmetrici rispetto all'origine riesce
$$F(B) = F(A).$$
Quindi il modulo richiesto vale 0.

3.3. Esercizio. *Assegnata* $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3z + 2}$ *determinare*

- *la serie di Taylor relativa a* $z_0 = 0$*,*
- *la serie di Laurent relativa alla corona* $1 < |z| < 2$*,*
- *la serie di Laurent relativa a* $|z| > 2$.

Soluzione

La funzione assegnata si rappresenta anche come
$$\frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

- serie di Taylor in $z \approx 0$:
$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{z-2} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-z/2} = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k \\ -\dfrac{1}{z-1} = \dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^k \end{array}\right. \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) z^k$$
serie di potenze convergente per $|z| < 1$.
- per $1 < |z| < 2$ si ha
$$\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k - \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^k =$$
$$= -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}\, z^k - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}}$$

- per $|z| > 2$ si ha

$$\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-2/z} - \frac{1}{1-1/z}\right) =$$

$$= \frac{1}{z}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^k - \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k-1}{z^{k+1}}$$

3.4. Esercizio. *Assegnata* $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)(z^2+9)}$

- *determinare i punti singolari e i residui di* f *in essi,*
- *dette* γ_ρ *le curve composte dai segmenti* $[-\rho, \rho]$ *e dalle semicirconferenze* $|z| = \rho$, $\Im(z) \geq 0$, *orientate nel verso antiorario, calcolare*

$$I(\rho) = \int_{\gamma_\rho} f(z)\,dz, \quad \rho > 0$$

- *calcolare l'integrale reale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+4)(x^2+9)}\,dx$$

$\boxed{\text{Soluzione}}$

- La funzione f ha come punti singolari gli zeri del denominatore

$$(z^2+4)(z^2+9) = 0 \quad \to \quad \begin{cases} z_1 = 2i, & z_2 = -2i \\ z_3 = 3i, & z_4 = -3i \end{cases}$$

Essi sono tutti poli semplici per f: i residui si calcolano pertanto con la formula

$$\mathcal{R}(z_k) = \lim_{z \to z_k}(z - z_k)f(z) = \lim_{z \to z_k}\frac{z - z_k}{(z^2+4)(z^2+9)}$$

Si ha pertanto:

$z_1 = 2i$		$\mathcal{R}(z_1) = \dfrac{1}{20i}$
$z_2 = -2i$		$\mathcal{R}(z_2) = \dfrac{-1}{20i}$
$z_3 = 3i$		$\mathcal{R}(z_3) = \dfrac{-1}{30i}$
$z_4 = -3i$		$\mathcal{R}(z_4) = \dfrac{1}{30i}$

- Gli integrali $I(\rho)$ richiesti dipendono dalla somma dei residui relativi ai punti singolari che cadono all'interno di γ_ρ: pertanto considerato che
  - γ_ρ racchiude zone del semipiano $\Im(z) > 0$,
  - solo $z_1 = 2\,i$ e $z_3 = 3\,i$ appartengono a $\Im(z) > 0$,

  riuscirá:

$$I(\rho) = 0 \qquad \rho \in (0, 2)$$
$$I(\rho) = 2\pi\,\frac{1}{20} = \frac{\pi}{10} \qquad \rho \in (2, 3)$$
$$I(\rho) = 2\pi\left(\frac{1}{20} - \frac{1}{30}\right) = \frac{\pi}{30} \qquad \rho \in (3, +\infty)$$

- Riesce

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 4\pi)(x^2 + 9\pi)}\,dx = \lim_{\rho\to+\infty} I(\rho) = \frac{\pi}{30}$$