VARIABILE COMPLESSA
2006-2007

Soluzioni Primo esonero

11 aprile 2007

1.1. Esercizio. *Assegnata*

$$u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$$

- *determinare le* $v(x,y)$ *tali che* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$ *sia analitica in tutto* $\mathcal{C}$
- *calcolare le derivate* f', f'', f''' *nell'origine,*
- *scelta* $v(x,y)$ *nulla nell'origine, determinare le soluzioni dell'equazione*

$$16f(z) + 81 = 0$$

Soluzione:

La funzione assegnata $u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$ é un polinomio armonico

$$u_x = 4x^3 - 12xy^2, \quad u_{xx} = 12x^2 - 12y^2,$$

$$u_y = -12x^2y + 4y^3, \quad u_{yy} = -12x^2 + 12y^2$$

da cui sommando

$$\triangle u(x,y) = 0$$

Le $v(x,y)$ cercate, armoniche coniugate di u, devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} v_x = -u_y \\ v_y = u_x \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} v_x = 12x^2y - 4y^3 \\ v_y = 4x^3 - 12xy^2 \end{cases} \quad \to \quad v(x,y) = 4x^3y - 4y^3x + g(y)$$

Ne segue

$$v_y(x,y) = 4x^3 - 12x^2y + g'(y) = 4x^3 - 12xy^2 \quad \to \quad g'(y) = 0 \quad \to \quad g(y) = c$$

Le funzioni $v(x,y)$ richieste sono pertanto

$$v(x,y) = 4x^3y - 4y^3x + c$$

ovvero

$$(1) \qquad f(x+iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + i\,(4x^3y - 4y^3x + c)$$

Riordinando opportunamente i termini si riconosce che le f trovate sono

$$f(x+iy) = x^4 + 4ix^3y - 6x^2y^2 - 4iy^3x + y^4 + c = (x+iy)^4 + c$$

ovvero

$$f(z) = z^4 + c$$

Ne segue

$$\begin{cases} f'(z) = 4z^3 \\ f''(z) = 12z^2 \\ f'''(z) = 24z \end{cases} \quad \rightarrow \quad f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$$

Le tre derivate richieste sono calcolabili anche dall'espressione originale (1) come derivate parziali prima, seconda e terza rispetto ad x

$$\begin{cases} f'(z) & = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right) f(x+iy) = 4x^3 - 12xy^2 + i(12x^2y - 4y^3) \\ f''(z) & = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^2 f(x+iy) = 12x^2 - 12y^2 + i(24xy) \\ f'''(z) & = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^3 f(x+iy) = 24(x+iy) \end{cases}$$

La scelta di $v(0,0) = 0$ corrisponde a $c = 0$: l'equazione assegnata corrisponde pertanto a

$$16z^4 + 81 = 0 \quad \rightarrow \quad z^4 = -\frac{81}{16} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 e^{i\pi}$$

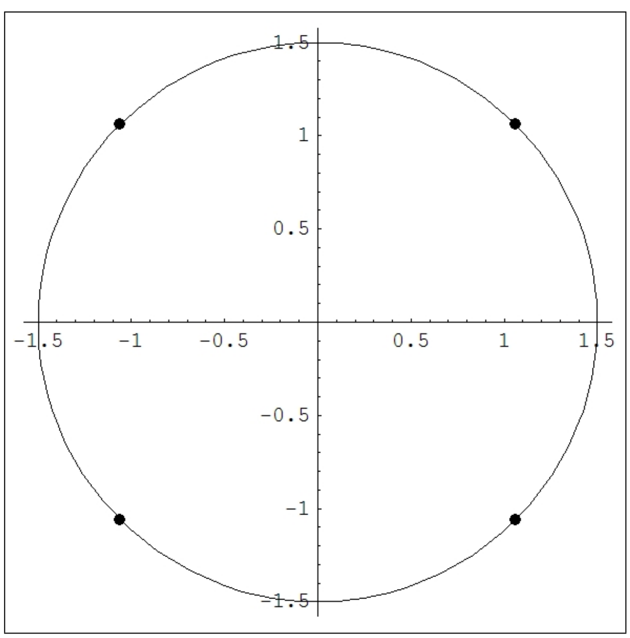

FIGURA 1. Le quattro radici

Ne segue che tali radici sono, vedi Figura 1:

$$z_1 = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi+2\pi}{4}}, \quad z_3 = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi+4\pi}{4}}, \quad z_4 = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi+6\pi}{4}}$$

ovvero anche

$$\pm\frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad \pm\frac{3}{2}e^{i\frac{\pi+2\pi}{4}}$$

1.2. Esercizio. *Sia $\mathfrak{C}$ la circonferenza $|z| = 1$ orientata nel verso antiorario: calcolare i seguenti tre integrali:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{1}{2z+i}dz, \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{2z-i}{2z+i}dz, \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \left(\frac{z+w}{z-w}\right)^2 dz$$

essendo $|w| < 1$.

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{1}{2z+i}dz = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{2}\int_{\mathfrak{C}} \frac{1}{z-(i/2)}dz = \frac{1}{2}$$

avendo tenuto conto che $-i/2$ cade dentro il cerchio delimitato da $\mathfrak{C}$.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{2z-i}{2z+i}dz = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{2z-i}{z+(i/2)}dz = -i$$

avendo tenuto conto che, a meno del fattore 1/2 l'integrale rappresenta il valore della funzione analitica

$$f(\zeta) = 2\zeta - i$$

nel punto

$$\zeta = -\frac{1}{2}i$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \left(\frac{z+w}{z-w}\right)^2 dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{(z+w)^2}{(z-w)^2}dz = \left.\frac{d}{dz}(z+w)^2\right|_{z=w} = 4w$$

avendo tenuto conto del teorema di rappresentazione di Cauchy per le derivate

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{f(z)}{(z-w)^2}dz$$

applicato alla funzione $f(z) = (z-w)^2$.

1.3. Esercizio. *Assegnata la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{iz}\right)^k$$

- *determinare per quali $z \in \mathcal{C}$ é convergente,*
- *detta $f(z)$ la somma determinare la parte reale e la parte immaginaria di $f(z)$,*
- *determinare i coefficienti a, b, c dei primi tre addendi*

$$a + b(z-i) + c(z-i)^2$$

della serie di Taylor di $f(z)$ di punto iniziale $z_0 = i$.

Soluzione:

I termini della serie assegnata

$$\left(e^{iz}\right)^k = e^{ikz} \quad \to \quad \left|e^{ikz}\right| = |e^{ix}||e^{-y}| = e^{-y}$$

sono infinitesimi se e solo se $y > 0$.
Pertanto la serie non puó convergere se $y \leq 0$.
Tenuto conto del resto che per $y > 0$ la serie é assolutamente convergente si riconosce che la serie assegnata converge, con convergenza assoluta, nel semipiano aperto

$$y > 0$$

La serie assegnata é una serie geometrica: la sua somma, per $y > 0$ é pertanto

$$f(z) = \frac{1}{1 - e^{iz}}$$

La determinazione della parte reale e di quella immaginaria deriva da

$$\frac{1}{1-e^{iz}} = \frac{1 - e^{-ix}\, e^{-y}}{(1 - e^{ix}\, e^{-y})(1 - e^{-ix}\, e^{-y})} = \frac{1 - e^{-y}\cos(x) + i\, e^{-y}\sin(x)}{1 - 2\cos(x)\, e^{-y} + e^{-2y}}$$

da cui:

$$u(x,y) = \frac{1 - e^{-y}\cos(x)}{1 - 2\cos(x)\, e^{-y} + e^{-2y}}$$

$$v(x,y) = \frac{e^{-y}\sin(x)}{1 - 2\cos(x)\, e^{-y} + e^{-2y}}$$

$$f(z) = \frac{1}{1 - e^{i\,z}} \quad \to \quad f(i) = \frac{e}{e-1}$$

$$f'(z) = \frac{i\ e^{i\,z}}{\left(1 - e^{i\,z}\right)^2} \quad \to \quad f'(i) = \frac{e\, i}{(e-1)^2}$$

$$f''(z) = \frac{-2\, e^{2\,i\,z}}{(1-e^{i\,z})^3} - \frac{e^{i\,z}}{(1-e^{i\,z})^2} \qquad \to \qquad f''(i) = -\frac{e^2+e}{(e-1)^3}$$

Si ha pertanto

$$\begin{cases} a = \dfrac{e}{e-1} \\ \\ b = \dfrac{i\, e}{(e-1)^2} \\ \\ c = -\dfrac{1}{2}\, \dfrac{e^2+e}{(e-1)^3} \end{cases}$$

1.4. Esercizio. *Assegnata la funzione*

$$\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$$

determinare i suoi sviluppi di Laurent

- *in* $\Omega_0 :\ 0 < |z| < 1$
- *in* $\Omega_1 :\ 1 < |z|$
- *in* $\Omega_3 : 0 < |z-1| < 1$

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

$$\Omega_0 :\ 0 < |z| < 1, \quad \to \quad \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-z)^k + \frac{1}{z} - \sum_{k=0}^{\infty} z^k =$$

$$= -2 \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k+1} + \frac{1}{z}$$

$$\Omega_1 :\ 1 < |z| \quad \to \quad \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} =$$

$$= \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{z}\right)^k + \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k = \frac{3}{z} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{2k+1}$$

$$\Omega_3 : 0 < |z-1| < 1 \quad \to \quad \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{1}{1+\dfrac{z-1}{2}} + \frac{1}{1+(z-1)} + \frac{1}{z-1} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{z-1}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-1)^k + \frac{1}{z-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(1+\frac{1}{2^{k+1}})(z-1)^k + \frac{1}{z-1}$$