VARIABILE COMPLESSA
2006-2007

Soluzioni Secondo esonero

30 maggio 2007

2.1. Esercizio. *Sia* $\Omega: \ \{x^2+y^2<4, \ x>0\}$:

- *determinare le radici dell'equazione*

$$z^8+5=0,$$

  appartenenti all'aperto Ω,
- *determinare per quali* λ *l'equazione*

$$z^8+\lambda z+5=0$$

  ha lo stesso numero di radici in Ω *della precedente.*

SOLUZIONE:

Tutte le radici della prima equazione sono le radici ottave di -5

$$z_1=\sqrt[8]{5}e^{i\pi/8}, \quad z_2=\sqrt[8]{5}e^{3\pi/8}, ..., z_8=\sqrt[8]{5}e^{15\pi/8}$$

Come si vede in Figura 1, quattro delle otto radici cadono in Ω.

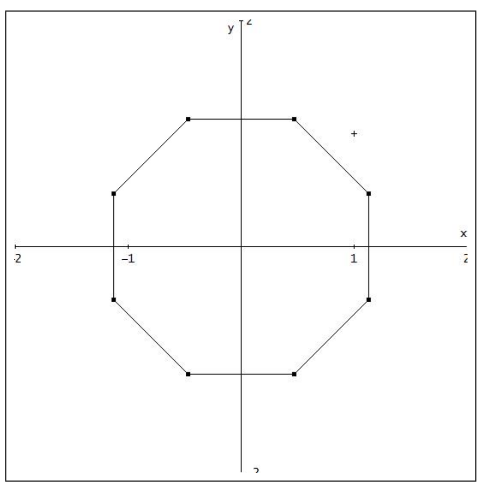

FIGURA 1. $z^8+5=0$

La seconda equazione, relativa al polinomio $g(z)=z^8+\lambda z+5$ differisce dalla prima per il termine λz : dal teorema di Rouché discende che se $\forall z\in\partial\Omega$ riesce soddisfatta la disuguaglianza di Rouché

$$|\lambda z|<|z^8+5|$$

allora anche l'equazione $z^8+\lambda z+5=0$ ha quattro radici in Ω.

La frontiera di $\partial\Omega$ é composta dal segmento

$$x = 0, \quad -2 < y < 2$$

e dalla semicirconferenza

$$z = 2e^{i\theta}, \quad \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Sull'arco di circonferenza si ha

$$|\lambda z| = 2|\lambda|, \quad |z^8 + 5| \geq 2^8 - 5$$

La disuguaglianza di Rouché é quindi soddisfatta non appena

$$|\lambda| < \frac{2^8 - 5}{2}$$

Sul segmento riesce

$$|\lambda z| = |\lambda|\,|y|, \quad |z^8 + 5| = y^8 + 5 \geq 5 \quad \to \quad |\lambda||y| \leq 2|\lambda| < 5$$

e quindi basta che sia $|\lambda| < \frac{5}{2}$

La disuguaglianza di Rouché é quindi soddisfatta non appena $|\lambda| < \dfrac{5}{2}$.
Quindi l'equazione

$$z^8 + \lambda z + 5 = 0$$

ha quattro radici in Ω come l'equazione

$$z^8 + 5 = 0$$

se $|\lambda| < \dfrac{5}{2}$.

Si tratta ovviamente di una stima *sufficiente* : cioé se $|\lambda| < \dfrac{5}{2}$ la seconda equazione ha lo stesso numero di radici della prima ma potrebbe avere lo stesso numero di radici anche per altri valori λ...!

2.2. Esercizio. *Assegnato il prodotto infinito*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\dfrac{z}{n}\right)}{\dfrac{z}{n}}$$

- *provare che é assolutamente convergente in ogni disco* $|z| < R$,
- *indicare l'espressione della derivata logaritmica*

$$\frac{f'(z)}{f(z)},$$

- *calcolare l'integrale*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}}\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

essendo $\mathfrak{C}$ *la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 percorsa nel senso antiorario.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

La convergenza assoluta di un prodotto $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ equivale alla convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|$$

pertanto

$$\frac{\sin\left(\frac{z}{n}\right)}{\frac{z}{n}} = 1+u_n \quad \rightarrow \quad u_n = \frac{\sin\left(\frac{z}{n}\right)-\frac{z}{n}}{\frac{z}{n}}$$

Tenuto conto che

$$\sin\left(\frac{z}{n}\right)-\frac{z}{n} = -\frac{1}{3!}(\frac{z}{n})^3+....$$

segue, per $|z|<R$

$$\left|\sin(\frac{z}{n})-\frac{z}{n}\right| \leq M\frac{1}{3!}\left|\frac{z}{n}\right|^3$$

da cui

$$|u_n| \leq \frac{M}{3!}\left|\frac{z}{n}\right|^2$$

La maggiorazione

$$|u_n| \leq \frac{MR^2}{3!}\frac{1}{n^2}$$

garantisce la convergenza assoluta della serie degli u_n e quindi la convergenza assoluta del prodotto infinito.
Essendo R arbitrario se ne conclude anzi che il prodotto é assolutamente convergente in tutto il piano complesso.

La derivata logaritmica del prodotto si riduce alla somma delle derivate logaritmiche dei fattori

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\sin\left(\frac{z}{n}\right)}{\frac{z}{n}}\right)'}{\frac{\sin\left(\frac{z}{n}\right)}{\frac{z}{n}}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \frac{\cos(\frac{z}{n})}{\sin(\frac{z}{n})} - \frac{1}{z} \right\}$$

Per quanto concerne l'integrale riesce

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathfrak{C}} \left\{ \frac{1}{n} \frac{\cos(\frac{z}{n})}{\sin(\frac{z}{n})} - \frac{1}{z} \right\} dz = 0$$

Infatti, integrando, come lecito, termine a termine

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{1}{n} \frac{\cos(\frac{z}{n})}{\sin(\frac{z}{n})} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}_n} \frac{\cos(\zeta)}{\sin(\zeta)} d\zeta - 1$$

essendo $\mathfrak{C}_n$ la circonferenza di centro l'origine e raggio $1/n$: é evidente che l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}_n} \frac{\cos(\zeta)}{\sin(\zeta)} d\zeta = 1$$

perché rappresenta il numero di zeri di $\sin(\zeta)$ interni a $\mathfrak{C}_n$, cioé uno solo, quello nell'origine. Quindi riesce

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{n=0}^{\infty} (1-1) = 0$$

Il risultato era direttamente prevedibile dal momento che il prodotto infinito assolutamente convergente $f(z)$ si annulla se e solo se si annulla almeno uno dei fattori: ma

$$\frac{\sin\left(\frac{z}{n}\right)}{\frac{z}{n}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{z}{n} = k\pi \quad k = \pm 1, \pm 2, ...$$

ovvero

$$z = \pm m\pi \quad |m| \geq 1$$

e quindi

$$|z| > 1$$

In altri termini dentro il cerchio $|z| < 1$ il prodotto infinito $f(z)$ non si annulla mai e quindi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

2.3. Esercizio. *Determinare e disegnare le immagini secondo la trasformazione $w = e^z$*

- *del quadrato $Q : -\pi/4 < x < \pi/4,\ -\pi/4 < y < \pi/4$*
- *delle due diagonali di Q,*
- *calcolare l'area dell'immagine del triangolo*

$$T:\ \{(-\pi/4, \pi/4),\ (0,0),\ (\pi/4, \pi/4)\}$$

$\boxed{\text{SOLUZIONE:}}$

La funzione $w = e^z$ trasforma le rette verticali $x = h$ in circonferenze di raggio e^h: quindi le immagini dei due lati verticali del quadrato sono contenute nelle due circonferenze

$$|w| = e^{-\pi/4}, \quad |w| = e^{\pi/4}$$

Le rette orizzontali $y = k$ vengono invece trasformate in rette per l'origine $v = \tan(k)u$, quindi i due lati orizzontali del quadrato sono trasformati in segmenti delle due rette

$$v = u, \quad v = -u$$

L'immagine del quadrato é pertanto il quarto della corona circolare

$$e^{-\pi/2} < u^2 + v^2 < e^{\pi/2}, \quad -u < v < u$$

Le diagonali del quadrato, due rette ortogonali per l'origine, sono trasformate in due curve che si incrociano ad angolo retto nel punto $w = 1$, vedi Figura 2,

$$y = \pm x \quad \to \quad \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \pm t \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} u(t) = e^t \cos(t) \\ v(t) = \pm e^t \sin(t) \end{cases},$$

$t \in (-\pi/4,\ \pi/4)$.
L' area dell'immagine $f(T)$ del triangolo si calcola con l'integrale doppio

$$Area(f(T)) = \iint_{f(T)} du\, dv = \iint_T |f'(z)|^2\, dx\, dy$$

da cui, tenuto conto che

$$f'(z) = e^z \quad \to \quad |f'(z)| = e^x \quad \to \quad |f'(z)|^2 = e^{2x}$$

Ne segue

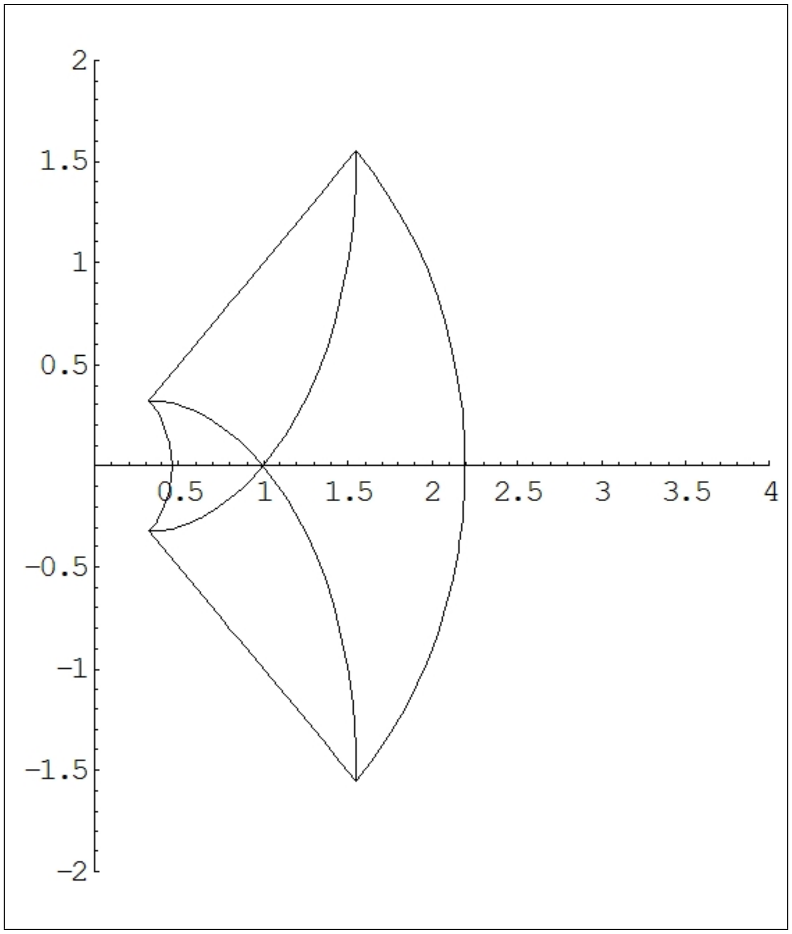

FIGURA 2. Il quadrato e le sue diagonali

$$Area(f(T)) = \iint_T e^{2x}\,dx\,dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} e^{2x}\,dx \int_{|x|}^{\pi/4} dy =$$

$$= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\pi/4 - |x|)\,e^{2x}\,dx \;=\; \frac{1}{2}\,[\cosh(\pi/2) - 1] \approx 0.754589$$

2.4. Esercizio. *Assegnata l'equazione differenziale lineare*

$$w'' + z^2 w = 0$$

- *determinare un elemento analitico* (f, B) *con* B *cerchio di centro l'origine soluzione dell'equazione, indicando esplicitamente i primi quattro termini della serie,*

- *determinare un secondo elemento analitico (f_1, B_1) ancora soluzione dell'equazione con B_1 di centro in $z_1 = 1$, indicando esplicitamente i primi quattro termini della serie.*

$\boxed{\text{Soluzione:}}$

L'equazione assegnata é di forma normale in tutto $\mathcal{C}$:

- (f, B) , $B: \ |z| < \rho$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k z^k$$

Sostituendo si perviene alle condizioni sui coefficienti w_k seguenti

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) w_k z^{k-2} + z^2 \sum_{k=0}^{\infty} w_k z^k = 0 \quad \rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ k(k-1) w_k z^{k-2} + w_k z^{k+2} \right\} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \begin{cases} w_2 = 0 \\ w_3 = 0 \\ (k+4)(k+3) w_{k+4} + w_k = 0 \end{cases}$$

Scelti ad esempio $w_0 = 1, \ w_1 = 0$ si ottiene

$$f(z) = 1 - \frac{1}{4 \times 3} z^4 + \frac{1}{8 \times 7 \times 4 \times 3} z^8 - \frac{1}{12 \times 11 \times 8 \times 7 \times 4 \times 3} z^{12} + \ldots$$

Scelti invece $w_0 = 0, \ w_1 = 1$ si ottiene

$$g(z) = z - \frac{1}{5 \times 4} z^5 + \frac{1}{9 \times 8 \times 5 \times 4} z^9 - \frac{1}{13 \times 12 \times 9 \times 8 \times 5 \times 4} z^{13} + \ldots$$

Si tratta di due serie di potenze evidentemente convergenti in tutto il piano.

- (f_1, B_1) $B_1: \ |z - 1| < \rho$

Il procedimento é, teoricamente lo stesso,

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k (z-1)^k$$

scrivendo

$$z = 1 + (z-1) \quad \rightarrow \quad z^2 = 1 + 2(z-1) + (z-1)^2$$

si riscrive l'equazione differenziale nella forma piú comoda

$$w'' + w + 2(z-1)w + (z-1)^2 w = 0$$

Sostituendo si perviene alle condizioni sui coefficienti w_k seguenti

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{k(k-1)w_k z^{k-2} + w_k(z-1)^k + 2w_k(z-1)^{k+1} + w_k(z-1)^{k+2}\right\} = 0$$

ovvero, scrivendo tutto relativamente alla potenza $(z-1)^{k+2}$ si ha

$$(k+4)(k+3)w_{k+4} + w_{k+2} + 2w_{k+1} + w_k = 0$$

da cui

$$\begin{cases} w_0, \\ w_1, \\ 2w_2 + w_0 = 0 \\ 6w_3 + w_1 + 2w_0 = 0 \\ w_{k+4} = -\dfrac{1}{(k+4)(k+3)}\left\{w_{k+2} + 2w_{k+1} + w_k\right\} \end{cases}$$

w_0 e w_1 liberi, gli altri coefficienti determinati di conseguenza.

Scelti ad esempio $w_0 = 1,\ w_1 = 0$ si ottiene

$$f_1(z) = 1 - \frac{1}{2}(z-1)^2 - \frac{1}{3}(z-1)^3 - \frac{1}{12}(z-1)^4 + \ldots.$$

Scelti invece $w_0 = 0,\ w_1 = 1$ si ottiene

$$g_1(z) = (z-1) - (z-1)^3 - \frac{1}{6}(z-1)^4 + \ldots$$

Osservazione 2.1. *Le serie di potenze che rappresentano soluzioni dell'equazione in un intorno di $z_0 = 0$ o di $z_1 = 1$ potevano essere determinate anche direttamente dall'equazione derivando.... e riderivando:*

$$w'' + z^2 w = 0 \quad w''' + 2zw + z^2 w' = 0, \quad w^{iv} + 2w + 4zw' + z^2 w'' = 0$$

$$w_2 = -\frac{1}{2}z^2 w, \quad w_3 = -\frac{1}{6}(2zw + z^2 w'), \quad w_4 = -\frac{1}{4!}(2w + 4zw' + z^2 w'')$$

ecc.

Le relazioni valgono sia in $z_0 = 0$ che in $z_1 = 1$: nell'origine si riconosce, ad esempio che i coefficienti di z^2 e di z^3 sono nulli, qualunque siano w_0 o w_1. Scelto adesempio

$$w(0) = w_0 = 1, \quad w'(0) = w_1 = 0$$

se ne ricava, di conseguenza,

$$w_2 = w_3 = 0 \quad w_4 = -\frac{1}{4!}2 = -\frac{1}{12}, \ldots$$

gli stessi valori ricavati precedentemente.