4.1. Esercizio. *Assegnata la funzione* $S: z \in \mathbb{C} \to w = S(z) \in \mathbb{C}$

$$S(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

determinare le immagini tramite S *dei seguenti insiemi*

- $E \subset \mathbb{C}$ *il semipiano* $x + y \le 1$
- $T: x > -1, \quad y > 0$
- $U: |z| > 1$

SOLUZIONE:

(1) La funzione S trasforma *rette e circonferenze* in *rette e circonferenze*, quindi per riconoscere l'immagine di un semipiano basta riconoscere l'immagine della retta che lo determina.

Il semipiano $x + y \le 1$ é determinato dalla retta

$$r: \ x + y = 1$$

Per riconoscere l'immagine $S(r)$ basta individuare le immagini di 3 suoi punti

$$\begin{cases} S(i) & = i \\ \\ S(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) & = \frac{1}{5}(-1 + 2i) \\ \\ S(1) & = 0 \end{cases}$$

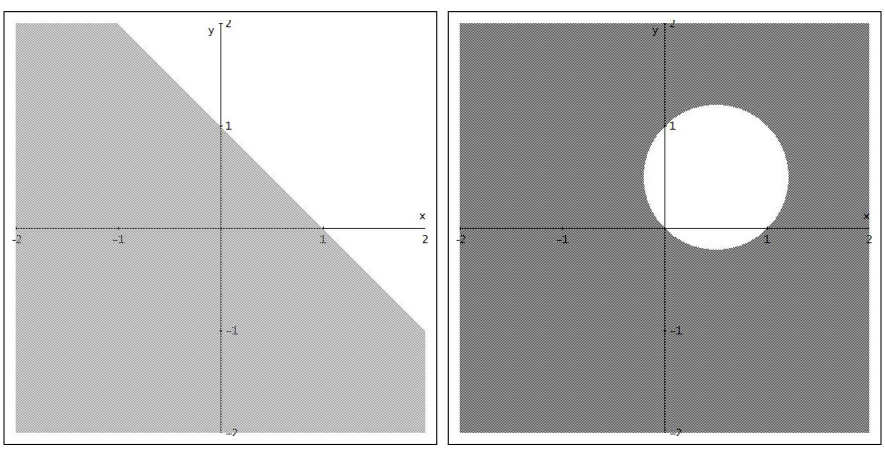

FIGURA 1. $E \subset \mathbb{C}$ il semipiano $x + y \le 1$, $\quad S(H)$

I tre punti trovati non sono allineati: quindi $S(r)$ é, necessariamente, la circonferenza del piano (u, v) passante per essi

$$u^2 + v^2 - u - v = 0$$

Tenuto conto che

$$0 \in E, \quad S(0) = -1$$

si riconosce che

$$S(E) := \{u^2 + v^2 - u - v \geq 0\}$$

(2) Per determinare l'immagine di T basta determinare le immagini dei due semipiani

$$x > -1, \quad y > 0$$

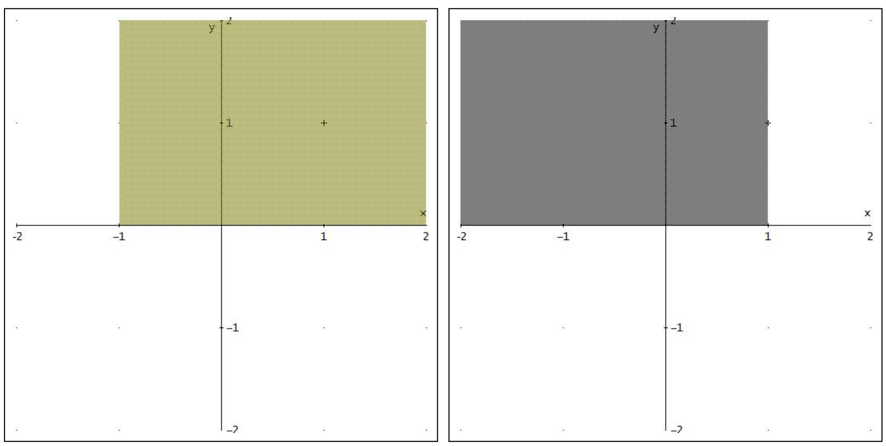

Figura 2. $T : x > -1,\ y > 0, \quad S(T)$

- tenuto conto che la retta $y = 0$ é trasformata nella $v = 0$ e che il semipiano $y > 0$ é, tenuto conto che $S(i) = i$, trasformato in $v > 0$;
- tenuto conto che la retta $x = -1$ é trasformata nella $u = 1$ e che il semipiano $x > -1$ é, tenuto conto che $S(0) = -1$, trasformato in quello di sinistra, $u < 1$

si riconosce che

$$S(T) := \{u < 1,\ v > 0\}$$

ancora un quadrante.

(3) L'immagine della circonferenza $|z| = 1$ é la retta $u = 0$: tenuto presente che

$$S(2) = \frac{1}{3}$$

si riconosce che l'immagine di $|z| > 1$ é il semipiano di destra, $u > 0$

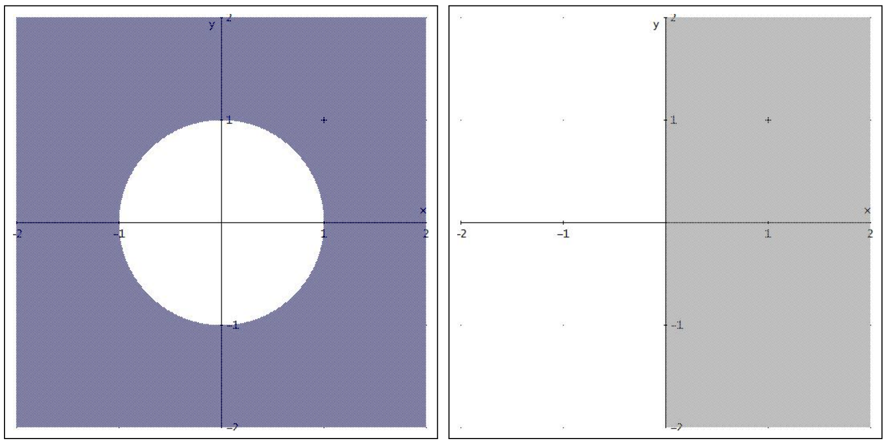

FIGURA 3. $U : |z| > 1, \quad S(U)$

4.2. Esercizio. *Indicata con*

$$f(z) = z\, e^{z^2}$$

- *determinare la parte reale e la parte immaginaria di* $f(z)$,
- *detta* S *la circonferenza* $x^2 + y^2 = 4$ *determinare*

$$\min_{z \in S} |f(z)|, \qquad \max_{z \in S} |f(z)|$$

- *determinare il limite della successione*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{1 + n\, z} dz, \qquad \mathcal{C} := |z| = 2,$$

SOLUZIONE:

(1)

$$z = x + iy \quad \to \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$f(z) = (x + iy)e^{x^2 - y^2} \left(\cos(2xy) + i \sin(2xy)\right) \quad \to$$

$$\to \quad \begin{cases} u(x, y) = e^{x^2 - y^2} \left(x \cos(2xy) - y \sin(2xy)\right) \\ v(x, y) = e^{x^2 - y^2} \left(x \sin(2xy) + y \cos(2xy)\right) \end{cases}$$

(2)

$$|f(z)| = |z| \left| e^{z^2} \right| = |z|\, e^{x^2 - y^2}$$

da cui

$$|z| = 2 \quad \to \quad |f(z)| = 2\, e^{x^2 - y^2} \in [2e^{-4},\, 2e^4]$$

ovvero

$$\min_{z\in S}|f(z)| = 2e^{-4}, \quad \max_{z\in S}|f(z)| = 2e^{4}$$

(3)

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{1+nz}dz = \frac{1}{n}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-\dfrac{-1}{n}}dz = \frac{2\pi i}{n}\, f(\frac{-1}{n})$$

da cui

$$w_n = -2\pi i\frac{e^{1/n^2}}{n^2} = -2\pi\frac{e^{1/n^2}}{n^2}\, i$$

$$\lim_{n\to\infty} w_n = 0$$

4.3. Esercizio. *Assegnato il prodotto*

$$p(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+e^{-(z^2+k^2)}\right)$$

- *determinare l'insieme di convergenza,*
- *determinare il valore nell'origine, $z=0$ del quoziente*

$$\frac{p'(z)}{p(z)}$$

- *determinare le soluzioni dell'equazione $p(z)=0$.*

SOLUZIONE:

(1) Un prodotto infinito $\prod_{k=1}^{\infty}(1+w_k)$ é assolutamente convergente, quindi convergente, se

$$\sum_{k=1}^{\infty}|w_k| < \infty$$

Quindi il prodotto assegnato é convergente per tutti i z tali che

$$\sum_{k=1}^{\infty}|e^{-(z^2+k^2)}| = e^{\ (-z^2)}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2} < \infty$$

situazione che accade qualunque sia z.
Quindi il prodotto assegnato é assolutamente convergente in tutto $\mathbb{C}$.

(2)

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} f_k(z) \quad \to \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k'(z)}{f_k(z)} \quad \to$$

$$\to \quad \frac{p'(z)}{p(z)} = -2z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-(z^2+k^2)}}{1 + e^{-(z^2+k^2)}}$$

da cui

$$\frac{p'(0)}{p(0)} = 0$$

(3) Un prodotto assolutamente convergente si annulla se e solo se si annulla qualcuno dei fattori: quindi

$$p(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \,|\, 1 + e^{-(z^2+k^2)} = 0$$

ovvero

$$e^{-(z^2+k^2)} = e^{-(2n+1)\pi i} \quad \to \quad z^2 = (2n+1)\pi i - k^2$$

da cui

$$z_{k,\,n} = \pm\sqrt{(2n+1)\pi i - k^2}$$

4.4. Esercizio. *Assegnata la funzione*

$$f(z) = 3z^4 + z^2 - 1$$

- *provare che l'equazione $f(z) = 0$ ha 4 radici appartenenti al cerchio $|z| \le 1$,*
- *determinare il numero di radici dell'equazione $f(z) = e^{z-2}$ appartenenti al cerchio $|z| \le 1$*
- *determinare il valore dell'integrale*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{f(z)}\, dz, \quad C := |z| = 1$$

Soluzione:

(1) L'equazione

$$3z^4 - 1 = 0$$

ha 4 radici, appartenenti al cerchio $|z| < 1$: pertanto l'equazione

$$3z^4 - 1 + z^2 = 0$$

ha lo stesso numero di radici se é soddisfatta l'ipotesi del teorema di Rouché

$$\forall\, |z| = 1 : \quad |z^2| < |3z^4 - 1|$$

Tenuto presente che

$$|z| = 1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} |z^2| = 1 \\ |3z^4 - 1| > 2 \end{cases}$$

ne segue che l'ipotesi del teorema di Rouché é soddisfatta e quindi l'equazione

$$3z^4 - 1 + z^2 = 0$$

ha 4 radici nel cerchio $|z| \leq 1$.

(2) L'equazione

$$3z^4 - 1 + z^2 = 0$$

ha 4 radici, appartenenti al cerchio $|z| < 1$: pertanto l'equazione

$$3z^4 - 1 + z^2 = e^{z-2}$$

ha lo stesso numero di radici se é soddisfatta l'ipotesi del teorema di Rouché

$$\forall\, |z| = 1 : \quad |e^{z-2}| < |3z^4 - 1 + z^2|$$

Tenuto presente che

$$|z| = 1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} |e^{z-2}| = e^{-1} \\ |3z^4 - 1 + z^2| > 1 \end{cases}$$

ne segue che, per il teorema di Rouché, l'equazione

$$3z^4 - 1 + z^2 = e^{z-2}$$

ha 4 radici nel cerchio $|z| \leq 1$.

(3) Siano

$$z_1 = a, \quad z_2 = -a, \quad z_3 = b, \quad z_4 = -b$$

le 4 radici dell'equazione $f(z) = 0$ in $|z| < 1$

$$f(z) = 3(z-a)(z+a)(z-b)(z+b)$$

Indicate con $\mathcal{C}_1,\ \mathcal{C}_2,\ \mathcal{C}_3,\ \mathcal{C}_4,$ circonferenze di centri i punti radice e raggio sufficientemente piccolo riesce

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{f(z)}\,dz, = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}_k} \frac{1}{f(z)}\,dz$$

Tenuto conto che:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \dfrac{1}{f(z)}\, dz = \dfrac{1}{3} \dfrac{1}{2a(a^2 - b^2)} \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \dfrac{1}{f(z)}\, dz = \dfrac{1}{3} \dfrac{1}{-2a(a^2 - b^2)} \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi i} \int_{C_3} \dfrac{1}{f(z)}\, dz = \dfrac{1}{3} \dfrac{1}{2b(b^2 - a^2)} \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi i} \int_{C_4} \dfrac{1}{f(z)}\, dz = \dfrac{1}{3} \dfrac{1}{-2b(b^2 - a^2)} \end{cases}$$

si riconosce che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{f(z)}\, dz = 0$$

Un conto analogo si ottiene servendosi della definizione di residui:

- i punti singolari di $1/f(z)$, z_k $k = 1, ..., 4$ sono poli di primo ordine,
- i residui sono quindi

$$Res(z_k) = \lim_{z \to z_k} (z - z_k) \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{f'(z_k)}$$

- l'aspetto dispari dei denominatori $f'(z)$ e la simmetria degli z_k fa sí che

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{f'(z_k)} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{f(z)}\, dz = 0$$