CAPITOLO 2

Il campo complesso

$\boxed{\text{Bozza da sistemare}}$

1. La sfera complessa

La rappresentazione del piano complesso sulla superficie sferica rende la gestione del punto

$$z = \infty$$

del tutto naturale.
Il piano complesso $\mathcal{C}$, con la metrica ordinaria di $\mathbb{R}^2$ é uno spazio localmente compatto: pertanto esiste (ed é unico a meno di omeomorfismi), vedi Teorema di Alexandrov,

http://it.wikipedia.org/wiki/Compattificazione_di_Alexandrov
uno spazio compatto X tale che

$$\mathcal{C} \equiv X - P_\infty$$

Nel caso di $\mathcal{C}$ tale compatto é la superficie sferica S_2 e

$$\mathcal{C} \equiv S_2 - (0, 0, 1)$$

2. Aritmetica coi complessi

Il campo complesso ha origine dalla necessitá di risolvere equazioni algebriche, di secondo grado e, si sperava anche di molti altri gradi.
I corsi d'algebra spiegano (teoria di Galois) come mai tale speranza vada, in parte, ridimensionata.

2.1. Le radici quadrate.

$\boxed{\text{Ahlfors, Cap. 1, §1.2}}$

$$(x + iy)^2 = \alpha + i\beta \quad \to \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \\ 2xy = \beta \end{cases}$$

Ne segue

$$(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 = \alpha^2+\beta^2 \quad \to \quad x^2+y^2 = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

Ne segue

$$2x^2 = \alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \quad 2y^2 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

Da queste relazioni sembrano scaturire due valori opposti $\pm x_1$ e due valori opposti $\pm y_1$, troppi... ma tenuto conto che $2xy = \beta$ si riconosce come in realtá siano solo due le coppie legittime !

La risolubilitá delle equazioni di secondo grado

$$az^2 + bz + c = 0, \quad a \neq 0 \tag{1}$$

segue quasi automaticamente

$$az^2+bz+c=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(z+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4\,a\,c}{2a}$$

Dette ξ_1 e ξ_2 le due radici quadrate complesse di $\dfrac{b^2-4\,a\,c}{2a}$ le soluzioni (complesse) dell'equazione (1) sono

$$z_1 = -\frac{b}{2a}+\xi_1, \quad z_2 = -\frac{b}{2a}+\xi_1,$$

2.2. Le ellissi e le curve di Cassini.

Sia

$$Q(z) = z^2+pz+q = (z-a)(z-b) \quad \to \quad Q(z) = |z-a||z-b|e^{i\,\arg(Q(z))}$$

Assegnati due punti a e b si considerano

- i punti z tali che $|z-a|+|z-b| = a$, ellisse
- i punti P tali che $|z-a||z-b| = k$ curve di Cassini[1] $\mathcal{L}$

Il polinomio $Q(z)$ trasforma i punti $z \in \mathcal{L}$ in punti $w \in \mathcal{C}_r$.
Ovvero le curve di Cassini sono le contrimmagini delle circonferenze di centro l'origine tramite il polinomio di secondo grado $Q(z)$[2]

[1] o lemniscate
[2] Vedi Needham pag.60

2.3. Le equazioni di terzo grado.

Esistono algoritmi algebrici (cioé basati sulle quattro operazioni e sull'estrazione di radici) capaci di risolvere oltre le equazioni dei gradi 1 e 2 anche quelle dei gradi 3, 4: l'algoritmo per le equazioni di grado 4 é oneroso.
L'algoritmo per le equazioni di terzo grado si chiama

formule di Cardano[3]

e costituisce il collaudo piú intelligente della familiaritá posseduta col campo complesso.

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0 \tag{2}$$

I coefficienti a, b, c, d siano reali (non é restrittivo...), non sarebbe restrittivo neanche supporre $a = 1$....
Con una traslazione l'equazione puó essere sempre ridotta ad un'altra priva del termine quadratico: sostituendo infatti

$$z = w + h$$

si ottiene l'equazione in w

$$aw^3 + w^2(3ah + b) + w(3ah^2 + 2bh + c) + ah^3 + bh^2 + ch + d = 0$$

Scelto

$$h = -\frac{b}{3a}$$

si ottiene

$$\frac{2\,b^3}{27\,a^3} - \frac{b\,c}{3\,a^2} + \frac{d}{a} - \left(\frac{b^2}{3\,a^2} - \frac{c}{a}\right) w + w^3 = 0$$

equazione ancora di terzo grado ma priva del termine in w^2
Indicati con

$$3p = \left(\frac{b^2}{3\,a^2} - \frac{c}{a}\right)$$

$$2q = \left(-\frac{2\,b^3}{27\,a^3} + \frac{b\,c}{3\,a^2} - \frac{d}{a}\right)$$

l'equazione si riduce a

$$w^3 = 3\,p\,w + 2\,q \tag{3}$$

[3]Girolamo Cardano, 1501-1576

nella quale supponiamo $q \neq 0$: nel caso infatti fosse $q = 0$ l'equazione avrebbe la soluzione $w = 0$, ecc. ecc.
Cerchiamo soluzioni della (3) nella forma $w = s + t$

$$(s+t)^3 = 3p(s+t) + 2q \Rightarrow \begin{cases} s\,t = p \Rightarrow s^3\,t^3 = p^3 \\ s^3 + t^3 = 2q \end{cases}$$

I due numeri s^3 e t^3, dei quali sono noti il prodotto p^3 e la somma $2q$ si conoscono tramite l'equazione di secondo grado

$$x^2 - 2q\,x + p^3 = 0$$

da cui

$$s^3 = q - \sqrt{q^2 - p^3} = \left|q - \sqrt{q^2 - p^3}\right| e^{i\,\vartheta},$$
$$t^3 = q + \sqrt{q^2 - p^3} = \left|q + \sqrt{q^2 - p^3}\right| e^{-i\,\vartheta}$$

2.4. Le radici dell'unitá.

Posto

$$\varepsilon = e^{i\dfrac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i,$$

le radici cubiche dell'unitá sono

$$\varepsilon, \quad \varepsilon^2, \quad \varepsilon^3$$

e sono fondamentali nella rappresentazione delle radici cubiche di qualunque altro numero complesso w:

$$w = |w|\,e^{i\,\vartheta} \quad \rightarrow \quad \sqrt[3]{w} = \sqrt[3]{|w|}\,e^{i\dfrac{\vartheta}{3}}\left\{\varepsilon,\,\varepsilon^2,\,\varepsilon^3\right\}$$

2.5. Il caso della formula di Cardano.

I numeri s e t cercati sono pertanto

$$\begin{cases} s_k = \sqrt[3]{\left|q - \sqrt{q^2 - p^3}\right|}\,e^{i\dfrac{\vartheta}{3}}\,\varepsilon^k \\ \\ t_k = \sqrt[3]{\left|q + \sqrt{q^2 - p^3}\right|}\,e^{-i\dfrac{\vartheta}{3}}\,\varepsilon^k \end{cases} \qquad k = 1, 2, 3.$$

Gli accoppiamenti leciti, quelli a prodotto dei due addendi

$$s_k\,t_h = p$$

reale, sono pertanto tutti e soli quelli per cui

$$\varepsilon^h\,.\,\varepsilon^k = 1$$

cioé $h + k = 0 \mod 3$ e quindi

$$w_1 = s_1 + t_2, \quad w_2 = s_2 + t_1, \quad w_3 = s_3 + t_3$$

Trovate le soluzioni w dell'equazione (3) si trovano naturalmente le soluzioni

$$z_1 = w_1 - \frac{b}{3a}$$

dell'equazione (2) originale.

Esempio 2.1. *Consideriamo l'equazione*

$$(z-1)(z-2)(z-3) = z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = 0$$

di radici ovviamente $1, 2, 3$.

$$z = w + 2 \quad \rightarrow \quad w^3 = w \quad \rightarrow \quad p = \frac{1}{3}, \quad q = 0$$

Ne deriva

$$w = 0, \quad w = -1, \quad w = 1 \quad \rightarrow \quad z = 1,\ z = 2,\ z = 3$$

Esempio 2.2. *Consideriamo l'equazione*

$$z^3 = 2z - 4$$

che, per semplicitá supponiamo giá ridotta alla forma priva del termine di secondo grado.

$$s^3 + t^3 + 3st(s+t) = 2(s+t) - 4 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} s^3 + t^3 = -4 \\ s^3\, t^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \end{cases}$$

s^3 *e* t^3 *sono pertanto soluzioni dell'equazione di secondo grado*

$$\xi^2 + 4\xi + \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 = -2 + \frac{10}{3\sqrt{3}},\ t^3 = -2 - \frac{10}{3\sqrt{3}}$$

approssimando coi decimali si ha

$$s = 0.4226497307, \quad t = 1.577350269$$

Fatti i conti (magari con l'aiuto di un PC) si ha

$$\begin{aligned} s\,\varepsilon + t\,\varepsilon^2 &= -1 - i \\ s\,\varepsilon^2 + t\,\varepsilon &= -1 + i \\ s + t &= 2 \end{aligned}$$

che sono le tre radici dell'equazione.

3. I polinomi

3.1. Il teorema fondamentale dell'algebra.

3.2. Il teorema di Lucas.

LEMMA 3.1. *Assegnati $a \in \mathcal{C}$ e $b \in \mathcal{C}$ con $b \neq 0$ gli insiemi dei punti z tali che*

$$Im\,\frac{z-a}{b} < 0, \quad Im\,\frac{z-a}{b} > 0$$

sono i due semipiani determinati dalla retta

$$z = a + b\,t \quad t \in \mathbb{R}$$

LEMMA 3.2. *Se $z \neq 0$ e $Imz > 0$ allora $Im(\frac{1}{z}) < 0$.*

LEMMA 3.3. *Gli zeri di $P(z)$ appartengano tutti al semipiano S: allora anche gli zeri di $P'(z)$ appartengono ad S.*

TEOREMA 3.4. *Sia Z l'inviluppo convesso degli zeri $z_1, z_2, ..., z_m$ di $P(z)$ allora anche gli zeri di $P'(z)$ appartengono a Z*

4. Le funzioni razionali

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

con $P(z)$ e $Q(z)$ privi di zeri comuni.

- zeri e poli,
- valore di $R(z) = \infty$ sui poli,
- valore all'infinito
- $R(\infty) = R_1(0),\ R_1(z) = R(1/z)$
- numero (uguale) degli zeri e dei poli, ordine p della R
- Espressione
  $$R(z) = G(z) * H(z)$$
  con $R(\infty) = G(\infty),\ H(\infty) \in \mathcal{C}$
- detti β_j i q poli di R
  $$R(\beta_j + 1/\zeta) = G_j(\zeta) + H_j(\zeta)$$
  $$R(z) = G_j(\frac{1}{z-\beta_j}) + H_j(\frac{1}{z-\beta_j})$$
- $$R(z) - G(z) - \sum_{j=1}^{q} H_j(\frac{1}{z-\beta_j})$$
  é una funzione razionale senza zeri e senza poli
- .... quindi una costante A.

$$R(z) = G(z) + A + \sum_{j=1}^{q} H_j(\frac{1}{z-\beta_j})$$