CAPITOLO 3

Le funzioni razionali

$\boxed{\text{vedi Ahlfors, pag. 30, 31, 32}}$

1. Introduzione

DEFINIZIONE 1.1.
$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$
con $P(z)$ e $Q(z)$ due polinomi privi di zeri comuni.
Siano β_1, $\beta_2, ..., \beta_q$ gli zeri del polinomio $Q(z)$ si assume, per definizione,
$$R(\beta_h) = \infty$$
avendo indicato con ∞ il punto all'infinito di $\mathcal{C}$.
Posto
$$R_1(z) = R(\frac{1}{z})$$
si assume come valore di una funzione razionale nel punto all'infinito
$$R(\infty) = R_1(0)$$

- *I punti in cui $R(\zeta_j) = 0$ si dicono* zeri *della funzione,*
- *se ζ_j é uno zero di ordine s di $P(z)$ si dice che ζ_j é un polo di ordine s di $R(z)$*
- *i punti in cui $R(z) = \infty$ si dicono* poli *della funzione*
- *se β_h é uno zero di ordine s di $Q(z)$ si dice che β_h é un polo di ordine s di $R(z)$.*

OSSERVAZIONE 1.2. *Le figure 1 e 2 si riferiscono alla trasformazione del rettangolo variamente colorato a sinistra tramite la funzione razionale*
$$R(z) = \frac{1}{z}$$
In Figura 2 w é rappresentato su una sfera: l'origine di w corrisponde al polo Sud, $w = \infty$ corrisponde al polo Nord.

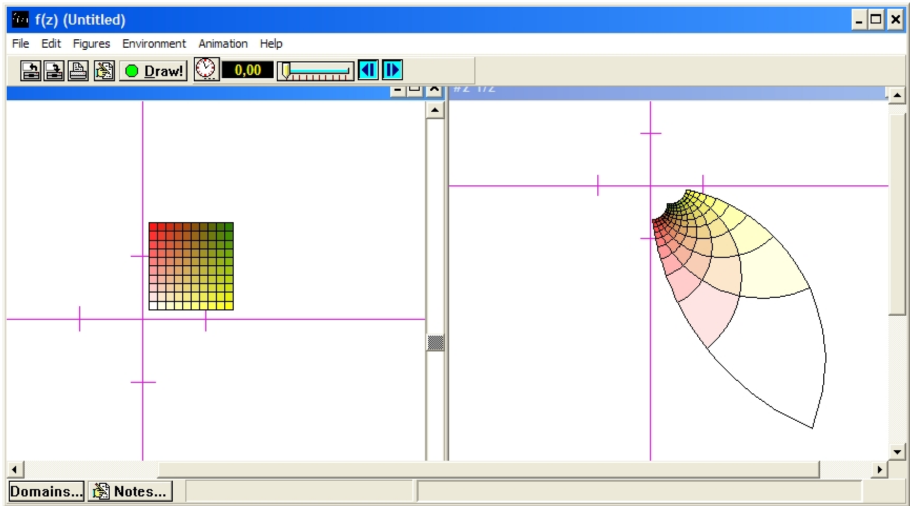

FIGURA 1. $w = \dfrac{1}{z}$

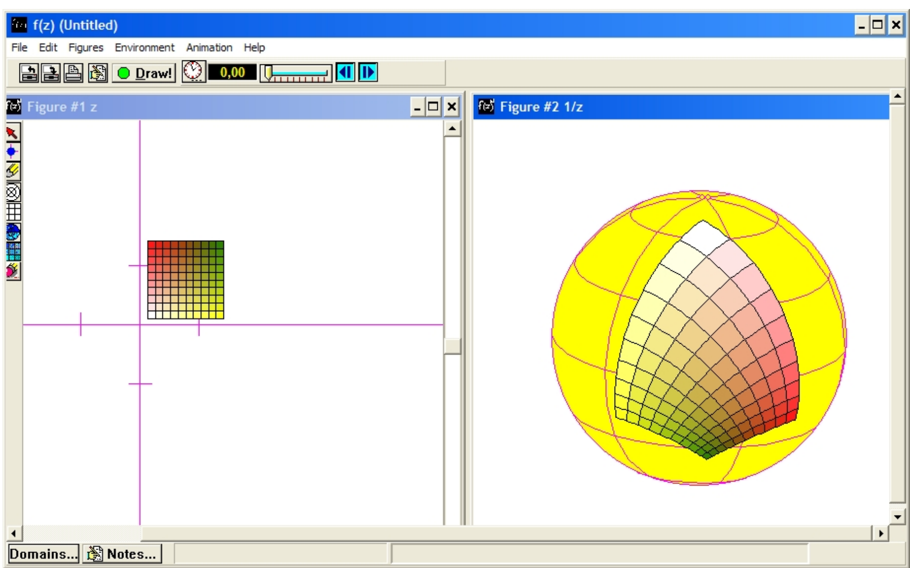

FIGURA 2. $w = \dfrac{1}{z}$

Si riconosce, in entrambe le rappresentazioni, che i quadratini piú lontani dall'origine (verdi in figura) siano trasformati in dmini (ancora verdi) vicini all'origine del piano w.
I quadratini piú vicini all'origine (bianchi in figura) vengono trasformati in domini di w lontani dall'origine.

Nella Figura 2, quella in cui w é rappresentato sulla sfera S_2 si riconosce come i lati del quadrato z che si avvicinano all'origine siano trasformati in archi della sfera che si avvicinano al polo Nord, l'immagine di $w = \infty$.

Tenuto conto che

$$R(z) = \frac{a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + ... + b_m z^m} \quad \to \quad R_1(z) = z^{m-n} \frac{a_0 z^n + ... + a_n}{b_0 z^m + ... + b_m}$$

servendosi del teorema fondamentale dell'algebra si riconosce che

- se $n = m$ allora $R(z)$ n zeri ed $m = n$ poli,
- se $n > m$ allora $R(z)$ n zeri ed n poli,
- se $n < m$ allora $R(z)$ m zeri ed m poli,

In altri termini $R(z)$ ha, nel piano complesso esteso (cioé incluso il punto ∞) lo stesso numero di zeri e di poli, numero pari al maggiore tra i due gradi n ed m del numeratore P e del denominatore Q.
Il valore $p = \max(n, m)$ si dice ordine della funzione razionale.

Proposizione 1.3. *$\forall z \in \mathcal{C}$ la funzione*

$$R(z) - a$$

é razionale e ha gli stessi poli di $R(z)$, quindi ha lo stesso ordine, e lo stesso numero di zeri...

Teorema 1.4. *Una funzione razionale di ordine p ha p zeri e p poli e $\forall z \in \mathcal{C}$ l'equazione*

$$R(z) = a$$

ha esattamente p radici.

Esempio 1.5. *La funzione razionale*

$$R(z) = \frac{z+1}{4+z^2}, \quad R_1(z) = \frac{z+z^2}{1+4z^2}$$

ha

- *uno zero al finito in $z = -1$ e uno zero in $z = \infty$,*
$$R(\infty) = R_1(0) = 0$$
totale due zeri nel piano complesso esteso,
- *due poli $z = \pm 2\,i$ al finito,*
- *nessun polo all'infinito in quanto $R(\infty) = R_1(0) = 0$*

La funzione $R(z)$ considerata é di ordine $p = 2$: ha infatti due zeri e due poli.

Corollario 1.6. *Una funzione razionale priva di poli (o priva di zeri) é costante.*

Proposizione 1.7.

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad \rightarrow \quad R'(z) = \frac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{Q^2(z)}$$

é ancora una funzione razionale e ha gli stessi poli di $R(z)$:
se β_h é un polo di ordine s per $R(z)$ allora é un polo di ordine $s+1$ per $R'(z)$.

2. La decomposizione di Hermite

Lemma 2.1. *Ogni funzione razionale $R(z)$ puó essere espressa come somma*

$$R(z) = G(z) + H(z)$$

essendo

- *$G(z)$ un polinomio privo di termine costante,*
- *$H(z)$ una funzione razionale finita all'infinito.*

Dimostrazione. Se $grado(P) \leq grado(Q)$ allora la rappresentazione é ovvia con $G(z) \equiv 0$ ed $H(z) = R(z)$
Se $grado(P) > grado(Q)$ allora si esegue... qualche divisione ! □

Esempio 2.2.

$$R(z) = \frac{z^2 + 3z + 1}{z+2} = z + \frac{z+1}{z+2}$$

$$G(z) = z, \quad H(z) = \frac{z+1}{z+2}, \quad H(\infty) = 1$$

Osservazione 2.3. *Nella decomposizione $R(z) = G(z)+H(z)$ indicata il polinomio G ha, all'infinito un polo dello stesso ordine di $R(z)$. La funzione razionale $H(z)$ ha, ovviamente gli stessi poli di $R(z)$ e con gli stessi ordini, infatti*

$$H(z) = R(z) - G(z) = \frac{P(z) - Q(z) * G(z)}{Q(z)}$$

Definizione 2.4. *Il polinomio $G(z)$, quello che diverge all'infinito si dice* parte singolare *di $R(z)$ mentre $H(z)$ si dice la* parte regolare *all'infinito.*

Le funzioni razionali

$$\frac{1}{z-a}$$

si dicono frazioni semplici.

Teorema 2.5. *Ogni funzione razionale $R(z)$ puó essere rappresentata come somma di polinomi in z e polinomi in frazioni semplici.*

$\boxed{\text{Schema della rappresentazione di Hermite}}$

Siano $\beta_1, ..., \beta_q$ gli zeri di $Q(z)$: decomponiamo le funzioni razionali di ζ

$$R\left(\beta_j + \frac{1}{\zeta}\right)$$

come indicato nel precedente Lemma 2.1

$$R\left(\beta_j + \frac{1}{\zeta}\right) = G_j(\zeta) + H_j(\zeta)$$

Sostituendo

$$z = \beta_j + \frac{1}{\zeta} \quad \to \quad \zeta = \frac{1}{z - \beta_j}$$

si ricavano le seguenti espressioni di $R(z)$:

$$R(z) = G_j\left(\frac{1}{z - \beta_j}\right) + H_j\left(\frac{1}{z - \beta_j}\right)$$

Si noti che la funzione

$$H_j\left(\frac{1}{z - \beta_j}\right)$$

é regolare in β_j

Consideriamo la funzione razionale

$$A(z) = R(z) - G(z) - \sum_{j=1}^{q} G_j\left(\frac{1}{z - \beta_j}\right)$$

Se dimostreremo che $A(z)$ non ha nel piano complesso esteso alcun polo ne seguirá che é costante, e quindi detto A_0 il suo valore si ha

$$A(z) \equiv A_0 \quad \to \quad R(z) = G(z) + \sum_{j=1}^{q} G_j\left(\frac{1}{z - \beta_j}\right) + A_0$$

Infatti:

- $A(z)$ non puó avere poli se non nei β_j o all'infinito,
  - $R(z)$ ha poli nei β_j o all'infinito,
  - $G(z)$ puó, come polinomio, avere poli solo all'infinito
  - la somma dei $G_j\left(\frac{1}{z-\beta_j}\right)$ puó avere poli solo nei β_j
- in $z = \beta_1$ $A(z)$ é regolare:
  potrebbero avere un polo in β_1 solo

$$R(z) - G_1\left(\frac{1}{z - \beta_1}\right)$$

ma

$$R(z) - G_1\left(\frac{1}{z-\beta_1}\right) = H_1\left(\frac{1}{z-\beta_1}\right)$$

con $H_1(\infty)$ regolare....quindi

$$R(z) - G_1\left(\frac{1}{z-\beta_1}\right)$$

non puó avere poli in β_1

- analogamente si riconosce che $A(z)$ non puó avere poli negli altri β_j
- $A(z)$ é regolare anche all'infinioto: infatti

$$R(\infty) - G(\infty) = H(\infty)$$

regolare, e la somma

$$\sum_{j=1}^{q} G_j\left(\frac{1}{z-\beta_j}\right)$$

é ovviamente regolare all'infinito (sarebbe come considerare la somma $\sum G_j(\zeta)$ in $\zeta = 0$).