CAPITOLO 4

Le funzioni analitiche

vedi Ahlfors, pag. 24,...,28

1. Introduzione

Il termine funzioni analitiche si attribuisce classicamente alle funzioni

$$f : A \subseteq \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

con A aperto (non vuoto) se esiste, in ogni punto $z_0 \in A$ il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \in \mathcal{C} \tag{1}$$

Sono ovviamente funzioni analitiche quindi

- i polinomi,
- le funzioni razionali.

Il motivo discende dalla certezza dell'esistenza dei limiti dei relativi rapporti incrementali, certezza basata sulla loro formale uguaglianza con quanto visto nel caso dei polinomi e delle funzioni razionali reali.

Osservazione 1.1. *Il rapporto incrementale (1) somiglia naturalmente ai rapporti incrementali che definiscono le derivate parziali prime delle funzioni reali di due (o piú) variabili reali.*
Esso ha tuttavia un peso maggiore: ad esempio dall'esistenza del limite (1) discende, come nel caso delle funzioni reali di una variabile reale,la continuitá.
Proprietá che invece in generale non discende dalla semplice esistenza delle derivate parziali prime.

1.1. Il motivo profondo.

Il rapporto incrementale dei polinomi

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

ammette limite perché ammettono limite i rapporti incrementali dei singoli addendi

$$z^k$$

I rapporti incrementali degli z^k ammettono limite perché ammette limite quello di z.
I rapporti incrementali delle funzioni razionali

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

ammettono limite perché ammettono limite quelli dei due polinomi a numeratore e denominatore.
In altri termini il fatto che le funzioni razionali siano analitiche discende direttamente dal fatto che lo sia la funzione z.

2. Un'indagine

Consideriamo le funzioni

$$f(z) = z^k = (x + iy)^k, \quad k = 1, 2, 3, ...$$

Oltre al rapporto incrementale

$$\lim_{z \to z_0} \frac{(x + iy)^k - (x_0 + iy_0)^k)}{(x - x_0) + i(y - y_0)} = k\, z_0^{k-1}$$

che le riconosce come analitiche, possiamo considerare i rapporti incrementali relativi alle due derivate parziali prime $f_x,\ f_y$

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(x + iy_0)^k - (x_0 + iy_0)^k)}{x - x_0} = k(x_0 + iy_0)^{k-1}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{(x_0 + iy)^k - (x_0 + iy_0)^k)}{(y - y_0)} = i\, k\, (x_0 + iy_0)^{k-1}$$

L'osservazione

$$f_y(x_0 + iy_0) = i f_x(x_0 + iy_0) \quad \leftrightarrow \quad f_x(x_0 + iy_0) + i\, f_y(x_0 + iy_0) = 0$$

non puó sfuggire !

3. Le condizioni di Cauchy Riemann

Sia

$$f : A \subseteq \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

una funzione regolare, ad esempio,

$$f \in C^1(A)$$

funzione continua con le due derivate parziali prime continue anch'esse, l'esistenza del limite del rapporto incrementale

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

implica

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{x - x_0} = f'(x_0 + iy_0) = f_x(x_0 + iy_0)$$

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0 + iy) - f(x_0 + iy_0)}{i(y - y_0} = f'(x_0 + iy_0) = \frac{1}{i}\, f_y(x_0 + iy_0)$$

da cui ancora

$$f_x(x_0 + iy_0) = \frac{1}{i}\, f_y(x_0 + iy_0) \quad \leftrightarrow \quad f_x(x_0 + iy_0) + i\, f_y(x_0 + iy_0) = 0$$

Ne segue la seguente

Proposizione 3.1. *Condizione necessaria all'esistenza del limite del rapporto incrementale*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \in \mathcal{C}$$

é che le due derivate parziali prime verifichino la condizione

$$f_x(x_0 + iy_0) + i\, f_y(x_0 + iy_0) = 0$$

Esempio 3.2. *La funzione*

$$f(z) = (x^2 + y^2) + i(x^2 - y^2)$$

non é analitica: infatti se lo fosse dovrebbe riuscire

$$f_x(x_0 + iy_0) + i\, f_y(x_0 + iy_0) = 0$$

mentre riesce

$$\begin{cases} f_x = 2x + 2ix \\ f_y = 2y - 2iy \end{cases} \quad \to \quad f_x + i f_y = 2x + 2ix + 2iy - 2y \neq 0$$

3.1. La sufficienza.

Sia $f \in C^1(A)$: f é quindi anche differenziabile e riesce

(2) $f(x+iy) - f(x_0+iy_0) = f_x(x_0+iy_0)(x-x_0) + f_y(x_0+iy_0)(y-y_0) + R$

con R, il resto, che gode della proprietá

$$\lim_{(x,y) \to ((x_0,0)} \left| \frac{R}{\sqrt{(x - xc_o)^2 + (y - y_0)^2}} \right| = 0$$

Se

$$f_x(x_0 + iy_0) + i\, f_y(x_0 + iy_0) = 0 \quad \to \quad f_y = i f_x$$

il differenziale (2) puó scriversi anche come

$$f(z) - f(z_0) = f_x(z_0)(z - z_0) + R$$

ovvero

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f_x(x_0 + iy_0) + \frac{R}{z - z_0}$$

da cui, tenuto conto che

$$\lim_{z \to z_0} \left| \frac{R}{z - z_0} \right| = 0$$

segue che

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f_x(z_0) = f'(z_0)$$

TEOREMA 3.3. *Sia $f \in C^1(A)$, condizione necessaria e sufficiente perché esista il limite*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) \quad \forall z_0 \in A$$

é che le due derivate parziali prime verifichino la condizione

$$f_x(z) + i\, f_y(z) = 0, \quad \forall z \in A$$

4. L'esponenziale

Consideriamo la funzione

$$f : (x + iy) \to e^x\, cos(y) + ie^x \sin(y), \quad \forall (x + iy) \in \mathcal{C}$$

- si tratta di una funzione regolare, $f \in C^\infty(\mathcal{C})$
- $f_x = e^x\, cos(y) + ie^x \sin(y)$,
- $f_y = -e^x \sin(y) + i\, e^x\, cos(y)$

Riconosciuto che

$$f_y = i\, f_x \quad \leftrightarrow f_x + i\, f_y = 0$$

si riconosce, vedi Teorema 3.3, che la funzione f é analitica.
Essa si chiama l'esponenziale !
Dopo i polinomi e le funzioni razionali é la piú importante funzione analitica.

5. Parti reale e immaginaria

Sia $f(z)$ analitica e siano $u(x,y)$ e $v(x,y)$ le sue parti reale e immaginaria

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) : \quad f_x + i f_y = 0 \quad \to \quad \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Se $f \in C^2$ allora

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} u_{xx} = v_{yx} \\ u_{yy} = -v_{xy} \end{cases}$$

Da cui, sommando

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Un conto analogo produce

$$v_{xx} + v_{yy} = 0$$

In altri termini le funzioni analitiche sono anche armoniche.

6. Armonica coniugata

Le funzioni analitiche sono armoniche, ma non tutte le funzioni armoniche sono analitiche.
Tuttavia, assegnata $u(x,y)$ armonica si puó costruire un'altra funzione $v(x,y)$ armonica tale che

$$u(x,y) + iv(x,y)$$

sia analitica.
La costruzione si puó fare in modo standard determinando v come soluzione del sistema

$$\begin{cases} v_x = & -u_y \\ v_y = & u_x \end{cases}$$

con u_x e u_y dati e v incognita. Si tratta di un problema compatibile, almeno localmente perché sono soddisfatte le condizioni

$$-\frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

essendo appunto u per ipotesi armonica.

Osservazione 6.1. *All'indirizzo seguente*

http://www.usfca.edu/vca/PDF/amplitwist.pdf *si trova un estratto del libro di Needham, relativo alle derivate: si tratta di buone osservazioni sul significato della derivata, sia nel caso di*

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

sia nel caso di

$$f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$