CAPITOLO 5

Integrale di funzioni analitiche

$\boxed{\text{Bozza da rivedere}}$

$\boxed{\text{vedi Laurentiev, pag. 42,...,47}}$

1. Introduzione

Come nel caso reale

- integrali definiti: numeri,
- integrali indefiniti: famiglie di primitive.

2. Le somme integrali

Nel caso di $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ I \subseteq \mathbb{R}$ l'integrale $\int_I g(x)\,dx$ era definito tramite le somme integrali:

- decomposizione di $I : a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$
- somme
$$\sum_{i=1}^{n} g(t_i)(t_i - t_{i-1})$$
- limite[1]
$$\int_I g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(t_i)(t_i - t_{i-1})$$

Nel caso di $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ l'integrale $\int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz$ con $\mathfrak{C}$ una curva di $\mathcal{C}$ é definibile in modo analogo (estensione diretta)

- decomposizione di $\mathfrak{C}$ con i punti $z_0,\ z_1,\ ...,\ z_n$
- somme
$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i)(z_i - z_{i-1})$$

[1]supponendo che al crescere di n tenda a zero la massima lunghezza $|t_i - t_{i-1}|$

- limite[2]

$$\int_{\mathfrak{C}} f(z)\, dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(z_i - z_{i-1})$$

3. L'algoritmo di calcolo

Nel caso che $f(z)$ e $\mathfrak{C}$ siano sufficientemente regolari si riconosce nelle somme

$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i)(z_i - z_{i-1})$$

le somme integrali di un opportuno integrale curvilineo.
Infatti sia

$$z = z(t): \ \{x = x(t),\, y = y(t)\}, \quad t \in [a, b]$$

una rappresentazione parametrica della curva $\mathfrak{C}$ detti

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < .... < t_n = b$$

i punti tali che

$$z_k = \{x(t_k),\, y(t_k)\}$$

riesce

$$z_i - z_{i-1} = x(t_i) - x(t_{i-1}) + i\,(y(t_i) - y(t_{i-1})) \approx (x'(t_i) + i\, y'(t_i))\,(t_i - t_{i-1})$$

Indicate inoltre con u e v la parte reale e la parte immaginaria di f si ha

$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i)(z_i - z_{i-1}) \approx$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n} (u(x(t_i), y(t_i)) + iu(x(t_i), y(t_i)))\,(x'(t_i) + i\, y'(t_i))\,(t_i - t_{i-1})$$

somme che approssimano l'integrale

$$\int_a^b \{u(x(t), y(t)) + iu(x(t), y(t))\}\,(x'(t) + i\, y'(t))\; dt$$

Integrale che rappresenta

$$\int_{\mathfrak{C}} (u + iv)(dx + idy)$$

piú semplicemente indicato con

$$\int_{\mathfrak{C}} f(z)\, dz$$

[2] supponendo che al crescere di n tenda a zero la massima lunghezza $|z_i - z_{i-1}|$

3.1. Una maggiorazione importante.

$$\left| \int_{\mathfrak{C}} f(z)\, dz \right| \leq M \ell(\mathfrak{C})$$

essendo $\ell(\mathfrak{C})$ la lunghezza della curva ed $|f(z)| \leq M$.

4. Il teorema di Cauchy

Il legame dell'integrale $\int_{\mathfrak{C}} f(z)\, dz$ con integrali curvilinei consente di utilizzare nel calcolo di tale integrale tutti i risultati (formule di Green, teorema della divergenza, teorema di Stokes, ecc) noti per gli integrali delle forme differenziali.
Ammettiamo per ora che la funzione $f(z)$ da integrare sia

- analitica,
- regolare, cioé indefinitamente derivabile.

Sotto tali ipotesi riesce, se

$$\mathfrak{C} = \partial\, \Omega$$

con Ω semplicemente connesso

$$\int_{\mathfrak{C}} f(z)\, dz = \iint_{\Omega} \left\{ -\frac{\partial}{\partial y}(u + iv) + i \frac{\partial}{\partial x}(u + iv) \right\} dx\, dy$$

Osservato che

$$\left\{ -\frac{\partial}{\partial y}(u + iv) + i \frac{\partial}{\partial x}(u + iv) \right\} = i \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(u + iv) \ + i \frac{\partial}{\partial y}(u + iv) \right\}$$

Se $f(z)$ é analitica per $z \in \Omega$

$$\frac{\partial}{\partial x} f + i \frac{\partial}{\partial y} f = 0 \quad \rightarrow \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(u + iv) \ + i \frac{\partial}{\partial y}(u + iv) \right\} = 0$$

da cui segue che il precedente integrale doppio su Ω é nullo ovvero che

$$\int_{\mathfrak{C}} f(z)\, dz = 0$$

5. L'indipendenza dalla curva

Siano C_1 e C_2 due curve contenute in Ω semplicemente connesso, che abbiano gli stessi estremi a e b: allora se $f(z)$ é analitica in Ω riesce

$$\int_{\mathfrak{C}_1} f(z)\, dz = \int_{\mathfrak{C}_2} f(z)\, dz$$

Infatti

$$\mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{C}_2 = \partial A$$

e il teorema di Cauchy implica che

$$\int_{\mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{C}_2} f(z)\, dz = \int_{\partial A} f(z)\, dz = 0$$

6. Le primitive

Sia $f(z)$ analitica in Ω semplicemente connesso, sia $w_0 \in \Omega$ e sia $\mathfrak{C}$ una qualsiasi curva regolare contenuta in Ω di estremi w_0 e w, indichiamo, stante l'indipendenza del valore dell'integrale dalla curva

$$\int_{\mathfrak{C}} f(z)\, dz = \int_{w_0}^{w} f(z) dz$$

TEOREMA 6.1. *$f(z)$ sia analitica in Ω semplicemente connesso,*

$$F(w) = \int_{w_0}^{w} f(z) dz$$

- $F(w_0) = 0$
- *F é analitica in Ω*
- $F'(w) = f(w)$

DIMOSTRAZIONE.

$$\frac{F(w+k) - F(w)}{k} = \frac{1}{k} \int_{w}^{w+k} f(z) dz \approx \frac{1}{k} f(\zeta)\, k \approx f(w)$$

□

TEOREMA 6.2. *Siano $F_1(w)$ e $F_2(w)$ due funzioni analitiche in Ω semplicemente connesso, entrambe primitive della funzione analitica f: allora esse differiscono per una costante.*

DIMOSTRAZIONE.

$$|F_1'(w) - F_2'(w)|^2 = (u_1 - u_2)_x^2 + (v_1 - v_2)_x^2 = 0 \quad \to \quad \begin{cases} u_1 - u_2 = c_1 \\ v_1 - v_2 = c_2 \end{cases}$$

□

TEOREMA 6.3. *Sia $f(z)$ sia analitica in Ω semplicemente connesso, e sia F una qualsiasi funzione analitica primitiva di f riesce*

$$\int_{w_1}^{w_2} f(z)\, dz = F(w_2) - F(w_1)$$