CAPITOLO 6

Il teorema di rappresentazione

1. Introduzione

LEMMA 1.1. *Sia $\mathfrak{C}$ una circonferenza e sia A il cerchio racchiuso: riesce*

$$\frac{1}{2\pi\, i}\int_{\mathfrak{C}}\frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} 0 & se \quad z \notin \overline{A} \\ \\ 1 & se \quad z \in \overset{\circ}{A} \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE.

$\boxed{\text{Primo caso: } z \notin \overline{A}}$

La funzione

$$f(\zeta) = \frac{1}{\zeta - z}$$

é analitica nel cerchio A e quindi l'integrale viene zero per il Teorema di Cauchy.

$\boxed{\text{Secondo caso: } z \text{ cade nel centro di } A}$

$$\frac{1}{2\pi\, i}\int_{\mathfrak{C}}\frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi\, i}\int_0^{2\pi}\frac{1}{R\, e^{i\vartheta}} i\, R\, e^{i\,\vartheta}\, d\vartheta = 1$$

$\boxed{\text{Terzo caso: } z \in \overset{\circ}{A}}$

Indichiamo con $\mathfrak{C}_1$ una circonferenza di centro z e tutta interna ad A. Detto A_1 il cerchio delimitato da $\mathfrak{C}_1$ osserviamo che

$$f(\zeta) = \frac{1}{\zeta - z}$$

é analitica in $A - A_1$

Indicate con γ_1 e γ_2 le due curve chiuse disegnate in rosso e in verde in Figura 1, e che immaginiamo con i lati rettilinei vicini quanto si vuole, riesce

$$\frac{1}{2\pi\, i}\int_{\gamma_1}\frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = 0, \quad \frac{1}{2\pi\, i}\int_{\gamma_2}\frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = 0$$

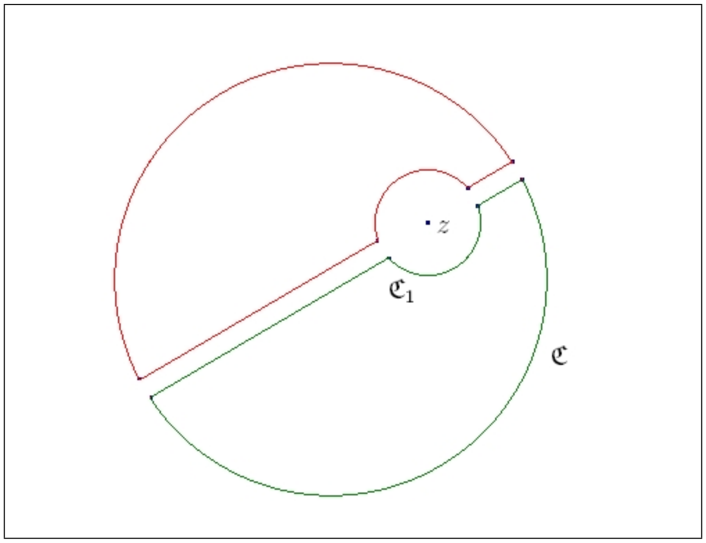

FIGURA 1. $A - A_1$

É del resto evidente che la differenza

$$\frac{1}{2\pi\, i}\int_{\gamma_1}\frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi\, i}\int_{\gamma_2}\frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta = 0$$

si riduce alla seguente

$$\frac{1}{2\pi\, i}\int_{\mathfrak{C}}\frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi\, i}\int_{\mathfrak{C}_1}\frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta = 0$$

dal momento che i tratti rettilinei si elidono fra loro.
Tenuto presente che

$$\frac{1}{2\pi\, i}\int_{\mathfrak{C}_1}\frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta = 1$$

come osservato nel precedente *secondo caso*, ne segue

$$\frac{1}{2\pi\, i}\int_{\mathfrak{C}}\frac{1}{\zeta - z}\,d\zeta = 1$$

□

LEMMA 1.2. *Sia $f(z)$ analitica e di classe C^1 nel cerchio U: sia $\mathfrak{C}$ una circonferenza contenuta in U, riesce*

$$\int_{\mathfrak{C}}\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta = 0 \quad \forall z \notin \mathfrak{C}$$

DIMOSTRAZIONE. Se z é esterno al cerchio delimitato da $\mathfrak{C}$ la funzione

$$R(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$$

é analitica in un cerchio Ω contenente $\mathfrak{C}$ e quindi la tesi del Lemma é il Teorema di Cauchy.
Nel caso in cui z sia interno al cerchio delimitato da $\mathfrak{C}$ consideriamo gli integrali

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

essendo γ_1 e γ_2 le curve rossa e verde di Figura 1.
Tali due integrali sono nulli, sempre per il Teorema di Cauchy: la loro differenza del resto implica, semplificando i tratti rettilinei,

$$\int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_{\mathfrak{C}_1} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Per quanto concerne l'integrale a secondo membro si ha la maggiorazione

$$\left| \int_{\mathfrak{C}_1} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \leq 2\,\pi \max_{\zeta \in \mathfrak{C}_1} |f(\zeta) - f(z)|$$

Tenuto conto che, essendo f continua

$$\lim_{\rho \to 0} \max_{\zeta \in \mathfrak{C}_1} |f(\zeta) - f(z)|$$

si riconosce che non puó che essere

$$\int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0$$

□

OSSERVAZIONE 1.3. *Il precedente Lemma 1.2 si riduce ad un fatto banale nel caso che la funzione analitica f sia un polinomio P: in tal caso infatti*

- *$D(\zeta) = P(\zeta) - P(z)$ é un polinomio nullo in $\zeta = z$*
- *quindi $D(\zeta) = (\zeta - z)Q(\zeta)$*
- *e quindi*

$$\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = \frac{P(\zeta) - P(z)}{\zeta - z} = Q(\zeta)$$

  il cui integrale sulla circonferenza $\mathfrak{C}$ é nullo per il Teorema di Cauchy.

OSSERVAZIONE 1.4. *.... sotto molti punti di vista le funzioni analitiche $f(z)$ si comportano in modo molto simile ai polinomi $P(z)$!*

2. Il teorema di rappresentazione

TEOREMA 2.1. *Sia f analitica e di classe C^1 nel cerchio U: sia $\mathfrak{C}$ una circonferenza contenuta in U e sia A il cerchio da essa delimitato, riesce*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \qquad \forall z \in \overset{\circ}{A}$$

DIMOSTRAZIONE. Dal Lemma 1.2 discende

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f(z)}{\zeta - z} \, d\zeta = f(z) \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{1}{\zeta - z} \, d\zeta \right\}$$

Tenuto conto del Lemma 1.1 si ha quindi $\forall z \in \overset{\circ}{A}$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = f(z)$$

□

OSSERVAZIONE 2.2. *É abbastanza facile riconoscere che i risultati, i due precedenti Lemmi e il Teorema di rappresentazione possono essere estesi al caso di curve semplici e chiuse $\mathfrak{C}$ piú generali delle circonferenze: ellissi, frontiere di poligoni convessi, ecc.*

2.1. Un'applicazione.

La formula di rappresentazione

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$$

si presta ad una lettura particolarmente semplice nel caso che z sia il centro z_0 di $\mathfrak{C}$: in tal caso, detto R il raggio e calcolando l'integrale servendosi delle coordinate polari si ha

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\vartheta}) \, d\vartheta$$

ovvero, esprimendo il secondo membro con un'integrale in ds

$$f(z_0) = \frac{1}{\ell(\mathfrak{C})} \int_{\mathfrak{C}} f(\zeta) \, ds_\zeta$$

Raprresentata f con parte reale u e parte immaginaria v si ha quindi

$$u(z_0)+iv(z_0) = \frac{1}{\ell(\mathfrak{C})} \int_{\mathfrak{C}} \{u(\zeta) + iv(\zeta)\} \, ds_\zeta \to \begin{cases} u(z_0) = \dfrac{1}{\ell(\mathfrak{C})} \int_{\mathfrak{C}} u(\zeta) \, ds_\zeta \\ v(z_0) = \dfrac{1}{\ell(\mathfrak{C})} \int_{\mathfrak{C}} v(\zeta) \, ds_\zeta \end{cases}$$

Le due espressioni a destra, per $u(z_0)$ e $v(z_0)$ sono di fatto due formule riferite a qualsiasi funzione armonica, tenuto conto che ogni funzione armonica puó essere letta come parte reale o parte immaginaria di una funzione analitica.

OSSERVAZIONE 2.3. *La formula*

$$u(z_0) = \frac{1}{\ell(\mathfrak{C})} \int_{\mathfrak{C}} u(\zeta)\, ds_\zeta$$

riferita al valore $u(z_0)$ che una funzione armonica prende nel centro di una circonferenza, si dice

proprietá della media

Il valore nel centro é la media dei valori presi sulla circonferenza:

- *se sulla circonferenza riesce $m \leq u(\zeta) \leq M$ allora $m \leq u(z_0) \leq M$*
- *il massimo di u nel cerchio chiuso non puó cadere in un punto interno,*
- *il minimo di u nel cerchio chiuso non puó cadere in un punto interno,*

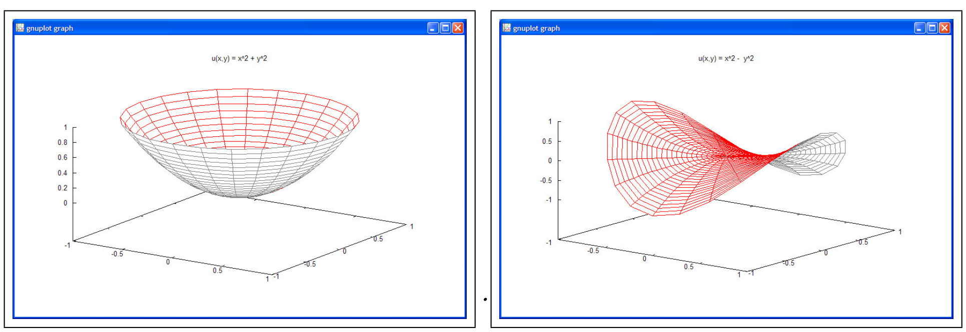

FIGURA 2. $u = x^2 + y^2$ non armonica e $u = x^2 - y^2$ armonica

.... a meno che u non sia costante.
In Figura 2 si riconosce nel grafico a sinistra, quello di $u = x^2 + y^2$ un fenomeno che contraddice la proprietá di media.
Nel grafico a destra, quello della funzione armonica $u = x^2 - y^2$, si riconosce come il valore nel centro sia la media dei valori, un po' sopra un po' sotto, presi sulla circonferenza.

2.2. La rigiditá.

La formula di rappresentazione offerta dal precedente Teorema 2.1 esprime un fenomeno importante che fa parte di un insieme di proprietá indicate genericamente col titolo *rigiditá delle funzioni analitiche*

I valori infatti che una funzione analitica prende all'interno di un cerchio sono determinati dai valori che prende sulla circonferenza frontiera.
Si tratta di un fenomeno assolutamente nuovo e inesistente nel caso reale: supponiamo

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x, y) = g(x, y) \ \ \forall (x, y) \in \mathfrak{C}$$

regolare, $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, e pensiamo al suo grafico relativo al dominio delimitato dalla circonferenza $\mathfrak{C}$.
Si tratterá di una superficie la cui forma, all'interno, non é che in minima parte determinata dai valori $g(x, y)$ che prende al bordo: si tratta di un velo elastico, bloccato al bordo, che possiamo, all'interno, modificare a piacere.
In altri termini le funzioni C^∞ non hanno rigiditá.

Osservazione 2.4. *Il precedente fenomeno cui abbiamo approssimativamente attribuito il nome di* rigiditá *si incontra in corrispondenza di tutti i problemi di Dirichlet per i quali si possiede un teorema di unicitá. Cosí ad esempio*

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} & = 0 & (x, y) \in A \\ u(x, y) & = s(x, y) & (x, y) \in \partial A \end{cases}$$

problema di Dirichlet per le funzioni armoniche ha esistenza e unicitá[1]*: ovvero i valori della soluzione in ogni punto di A sono rigidamente determinati dai valori della u sulla frontiera ∂A.*

2.3. Esistenza ?

Consideriamo il problema di Dirichlet per le funzioni analitiche:

$$\begin{cases} f_x(z) + i\, f_y(z) & = 0 & z \in A \\ f(\zeta) & = s(\zeta) & \zeta \in \partial A \end{cases}$$

nel caso semplice in cui A sia un cerchio.

- se la soluzione (regolare fin sulla frontiera) c'é é, obbligatoriamente, la funzione di z

$$\frac{1}{2\pi\, i} \int_{\partial A} \frac{s(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

- ....oppure non c'é !

[1]prescindiamo dai dettagli sulle regolaritá di dato e di soluzione.

Un problema importante é valutare per quali tracce $s(\zeta)$ la soluzione ci sia....
Una condizione necessaria per tale traccia é offerta dal Teorema di Cauchy:

$$\int_{\mathfrak{C}} f(z)dz = 0 \quad \rightarrow \quad \int_{\partial A} s(z)dz = 0$$

....sará anche sufficiente ?
No !

CAPITOLO 7

Conseguenze del Teorema di Rappresentazione

Vedi Ahlfors pag.120,..,122

1. Rappresentazione delle derivate

LEMMA 1.1. *Sia $\varphi(\zeta)$ continua sulla curva γ allora le funzioni*

$$F_n(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^n} \, d\zeta$$

sono analitiche per $z \notin \gamma$ e verificano le relazioni

$$F_n'(z) = n \, F_{n+1}(z)$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $z \in B$ essendo B un cerchio a distanza positiva δ dalla curva γ.
I teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale e di derivazione sotto il segno di integrale garantiscono che

- $F_n(z)$ é continua in B
- $$\frac{\partial}{\partial x} F_n(z) = \int_\gamma \varphi(\zeta) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{(\zeta - z)^n} \right) d\zeta$$
- $$\frac{\partial}{\partial y} F_n(z) = \int_\gamma \varphi(\zeta) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{(\zeta - z)^n} \right) d\zeta$$

quindi $F_n(z) \in C^1(B)$.
Per riconoscere che $F - N(z)$ é analitica basta verificare la condizione di Cauchy Riemann

$$\frac{\partial}{\partial x} F_n(z) + i \, \frac{\partial}{\partial y} F_n(z) = 0$$

uguaglianza che discende dal fatto che per $\zeta \in \gamma$ e zB la funzione

$$\frac{1}{(\zeta - z)^n}$$

é analitica e quindi

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{(\zeta - z)^n} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{(\zeta - z)^n} = 0 \quad \to \quad \frac{\partial}{\partial x}F_n(z) + i\,\frac{\partial}{\partial y}F_n(z) = 0$$

$$F_n'(z) = \int_\gamma \varphi(\zeta)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{(\zeta - z)^n}\right)d\zeta = n\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta = n\,F_{n+1}(z)$$

□

COROLLARIO 1.2. *Tenuto conto della rappresentazione di*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\, i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

dal Lemma precedente discende

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi\, i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta$$

ecc. ecc. per le altre derivate

$$f^{[n]}(z) = \frac{n!}{2\pi\, i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta$$

DIMOSTRAZIONE. Piú che una dimostrazione di una formula di rappresentazione delle derivate se ne deduce la

sorprendente

prova dell'esistenza di derivate successive di ordine comunque alto. □

COROLLARIO 1.3. *La formula di rappresentazione*

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi\, i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta$$

prova che anche la derivata di una funzione analitica é analitica.

2. Teorema di Liouville

Le funzioni analitiche di classe C^1 in tutto il piano si dicono intere.
Le piú importanti funzioni intere sono le costanti e i polinomi.

TEOREMA 2.1. *[*LIOUVILLE*] Le funzioni intere non costanti, sono, come i polinomi di modulo illimitato.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione é quasi immediata conseguenza del Teorema di rappresentazione della derivata prima

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi\, i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta \qquad \forall z \in \mathring{A}$$

infatti, tenuto conto che f é per ipotesi intera, possiamo scegliere la circonferenza $\mathfrak{C}$ di raggio grande a piacere.
Se fosse $|f(\zeta)| \leq M$ seguirebbe, scelta una circonferenza di centro z e raggio R

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R} \quad \rightarrow \quad f'(z) = 0 \ \ \forall z \in \mathcal{C}$$

da cui $f(z) = c$. □

Osservazione 2.2. *Si noti che, nel caso reale, esistono invece funzioni regolari, perfino serie di potenze di raggio di convergenza infinito, limitate in modulo:*

$$\sin(x), \quad \cos(x), \quad \textit{ecc.}$$

3. Teorema fondamentale dell'algebra

Il teorema di Liouville offre una dimostrazione immediata del

Teorema 3.1 (Teorema fondamentale dell'algebra). *Ogni polinomio $P(z)$ di grado $n > 0$ possiede almeno una radice.*

Dimostrazione. Infatti, se per assurdo $P(z) \neq 0, \ \ \forall z \in \mathcal{C}$, risulterebbe che

$$R(z) = \frac{1}{P(z)}$$

é intera.
Del resto

$$\lim_{|z|\to\infty} |P(z)| = +\infty \quad \rightarrow \quad \lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{|P(z)|} = 0$$

quindi $R(z)$ sarebbe anche limitata in modulo.
Ma allora, per il Teorema di Liouville $R(z)$, intera e limitata in modulo, dovrebbe essere costante, cosa assurda dal momento che il denominatore $P(z)$ non é costante.
Quindi l'ammissione

$$P(z) \neq 0, \ \ \forall z \in \mathcal{C}$$

é assurda, ovvero

$$\exists\, z_0 \in \mathcal{C} \quad P(z_0) = 0$$

□