CAPITOLO 8

Il teorema di Goursat

1. Premessa

Sia f una funzione assegnata in un disco B: per rappresentarla con il Teorema di Rappresentazione di Cauchy é stato sfruttato che

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0, \quad \forall R \subseteq B$$

risultato conseguito sotto le ipotesi

$$f \in C^1(B), \quad f \;\; analitica \quad z \in B$$

.

L'importanza dell'ipotesi

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0 \tag{1}$$

risiede nella costruzione seguente:
scelto un punto $z_0 = (x_0, y_0) \in B$ definiamo per ogni altro punto $z = (x, y) \in B$

$$F(z) = \int_{\Pi_1} f(s)ds$$

essendo

$$\Pi_1 : (x_0, y_0) - (x, y_0) - ((x, y),$$

Tenuto conto della (1)si ha anche

$$F(z) = \int_{\Pi_2} f(s)ds$$

essendo

$$\Pi_2 : (x_0, y_0) - (x_0, y) - (x, y)$$

Derivando l'una o l'altra espressione di F si riconosce che

- $F \in C^1(B)$
- F é analitica
- $F'(z) = f(z)$

Le condizioni

$$F \in C^1(B), \quad F \quad analitica \quad \forall z \in B$$

implicano che F e tutte le sue derivate $F^{[n]}$ si rappresentano con il Teorema di Rappresentazione di Cauchy

$$F^{[n]}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Tenuto presente che $f(z) = F'(z)$ ne segue

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

e quindi

$$f \in C^\infty(B), \quad f \quad analitica \quad \forall z \in B$$

e tutto quello che ne segue....

2. Teorema di Morera

Il seguente teorema di Morera (1856-1907) esprime esattamente quanto accennato nella premessa.

Teorema 2.1. *Sia $f(z)$ continua nell'aperto Ω: se*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

per ogni curva chiusa contenuta in Ω allora $f(z)$ é analitica.

Dimostrazione. Scelto $w_0 \in \Omega$ consideriamo la funzione

$$F(w) = \int_{w_0}^{w} f(z)dz$$

si tratta di una funzione ben definita, infatti gli integrali

$$\int_{\gamma(w_0,w)} f(z)dz$$

dipendono, per l'ipotesi fatta solo dagli estremi della curva di integrazione.
$F(w)$ é analitica e riesce

$$f(z) = F'(z)$$

quindi f coincidendo con la derivata F' di una funzione analitica é analitica anch'essa.

$\square$

OSSERVAZIONE 2.2. *Il Teorema di Morera é rimasto, ed é citato col suo nome italiano nella letteratura internazionale, non tanto per la genialitá delle condizioni proposte quanto perché costituisce lo strumento standard per riconoscere che il limite di una successione di funzioni analitiche uniformemente convergente é una funzione analitica.*
Ricordiamo che, nell'ambito reale, il limite di una successione uniformemente convergente di funzioni C^1 puó non essere C^1: si pensi ad una successione di funzioni molto regolari approssimanti, ad esempio, la $|x|$.

3. Il teorema di Goursat

$\boxed{\text{Vedi Ahlfors pag.109}}$

TEOREMA 3.1. *(GOURSAT[1]) Sia $f(z)$ analitica nell'aperto Ω: sia $R \subseteq \Omega$ un rettangolo, allora*

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $R \subseteq \Omega$ un rettangolo con i lati di lunghezze $\leq M$.
Indichiamo con

$$\eta(R) = \int_{\partial R} f(z)\,dz$$

se dividiamo R dimezzando i lati in quattro rettangoli uguali

$$R = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4 \quad \to \quad \eta(R) = \sum_{k=1}^{4} \eta(R_k)$$

La ovvia disuguaglianza

$$|\eta(R)| \leq \sum_{k=1}^{4} |\eta(R_k)| \quad \to \quad |\eta(R)| \leq 4 \max_k |\eta(R_k)|$$

detto k_0 l'indice per cui si ha il massimo si ha

$$|\eta(R)| \leq 4|\eta(R_{k_0})|$$

Indicato come R^1 il rettangolo R_{k_0} si ha quindi

$$\frac{1}{4}|\eta(R)| \leq |\eta(R^1)|$$

Ripetiamo su R^1 la precedente suddivisione in quattro parti: si perviene ad un rettangolo, che chiamiamo R^2 tale che

[1]Il nome di Goursat (1858-1936) é rimasto a questo risultato per la semplicitá della dimostrazione.

$$\frac{1}{4}|\eta(R^1)| \leq |\eta(R^2)|$$

Sia $\{R^n\}$ la successione di rettangoli che si costruiscono con il procedimento precedente: si tratta di una successione di rettangoli chiusi e limitati, incapsulati, non vuoti.
Riesce

$$\frac{1}{4^n}|\eta(R)| \leq |\eta(R^n)|$$

Sia

$$z_0 \in \cap_{k=1}^{\infty} R^k$$

e sia C_{z_0} un cerchio di centro z_0 e raggio δ_ε tale che

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z), \quad |r(z)| \leq \varepsilon|z - z_0| \;\forall z \in C_{z_0}$$

Per n sufficientemente alto riesce

$$R_n \subseteq C_{z_0}$$

e si ha

$$\eta(R^n) = \int_{\partial R^n} f(z)dz = \int_{\partial R^n} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z))dz$$

Tenuto presente che

$$\int_{\partial R^n} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0))dz = 0 \quad \rightarrow \quad \eta(R^n) = \int_{\partial R^n} r(z)dz$$

Tenuto conto che

$$\left| \int_{\partial R^n} r(z)dz \right| \leq \varepsilon \sqrt{2}\frac{M}{2^n} 4 \frac{M}{2^n} = \varepsilon\, 4\sqrt{2}\frac{1}{4^n}$$

ne segue

$$\eta(R^n) \leq \varepsilon\, 4\sqrt{2}\frac{1}{4^n} \quad \rightarrow \quad \eta(R) \leq \varepsilon\, 4\sqrt{2}$$

In altri termini non puó che essere

$$\eta(R) = 0$$

ovvero

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0$$

$\square$

4. Un'estensione

Sia f analitica nel disco B privato di un numero finito di punti z_k nei quali tuttavia riesca

$$\lim_{\zeta \to z_k} (\zeta - z_k) f(\zeta) = 0$$

allora[2]

- continua a valere il teorema di Goursat, cioé riesce
$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0, \quad \forall R \subseteq B$$
- f é prolungabile sui z_k per continuitá,
- la funzione prolungata a tutto B é $C^\infty(B)$ e analitica.

5. La formula di Taylor

Sia f analitica in B: la funzione

$$F(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

- é analitica in B privato del punto a
- riesce $\lim_{z \to a} (z - a) F(z) = 0$
- quindi F é prolungabile in modo analitico.

Sia $f_1(z)$ il suo prolungamento per continuitá: in a non puó che essere $f_1(a) = f'(a)$. Ovvero

$$f(z) = f(a) + f_1(z)(z - a)$$

Riapplicando lo stesso procedimento alla $f_1(z)$ si ha

$$f_1(z) = f_1(a) + f_2(z)(z - a) \quad \to \quad f(z) = f(a) + f_1(a)(z - a) + f_2(z)(z - a)^2$$

Riapplicando lo stesso procedimento alla $f_2(z)$ si ha

$$f_2(z) = f_2(a) + f_3(z)(z - a) \quad \to$$
$$f(z) = f(a) + f_1(a)(z - a) + f_2(a)(z - a)^2 + f_3(z)(z - a)^3$$

ecc. ecc.

[2] Per la dimostrazione vedi Ahlfors, Teor. 3 pag.111