CAPITOLO 9

Le serie di potenze

Ahlfors, pag. 33,..,45

Bozza da rivedere

Le funzioni analitiche
sono piú o meno
polinomi in z, o
i loro limiti,
somme di serie di potenze
in z

1. Prerequisiti fondamentali

- Convergenza assoluta,
- Convergenza totale,
- Convergenza uniforme.

I seguenti teoremi, certamente incontrati nei Corsi di Analisi, sono fondamentali per ogni risultato di teoria delle serie di potenze:

- Ogni serie convergente assolutamente é convergente.
- Le serie convergenti totalmente convergono anche uniformemente.
- Ogni successione $\{s_n(x)\}$ di funzioni continue, convergente uniformemente, ha per limite una funzione $f(x)$ continua.
- Ogni successione $\{s_n(x)\}$ di funzioni $C^1(E)$, tali che convergano uniformemente sia la $\{s_n(x)\}$ sia la $\{s'_n(x)\}$ ha per limite una funzione $f \in C^1(E)$, con $f'(x)$ limite delle $\{s'_n x)\}$.

Teorema 1.1. *Per ogni serie di potenze il numero*

$$R = \sup_{z \in E} |z|$$

costruito in relazione all'insieme E di convergenza, é detto raggio di convergenza della serie:

- *la serie converge assolutamente in ogni z con $|z| < R$,*
- *per $|z| > R$ la serie non converge,*
- *converge uniformemente per $|z| \leq \rho < R$*

- *la serie derivata ha lo stesso raggio di convergenza della serie iniziale.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $|z_1| < R$ esiste quindi $z_0 \in E$ tale che $|z_1| < |z_0|$: la convergenza della serie in z_0 implica che gli addendi

$$|a_k\, z_0^k|$$

siano infinitesimi al divergere di k.
Quindi

$$|a_k||z_0|^k \leq M \quad \rightarrow \quad |a_k| \leq \frac{M}{|z_0|^k}$$

Ne segue che

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k\, z_1^k| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{z_1}{z_0}\right|^k$$

quindi la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, z_1^k$$

converge assolutamente, quindi converge.
Sia $|z_0| > R$: se in tale punto la serie convergesse, allora per definizione di $R = \sup_{z \in E} |z|$ si avrebbe

$$R < |z_0| \leq R$$

quindi se $|z_0| > R$ in tale punto la serie non puó convergere.
La convergenza uniforme:

se $|z| \leq \rho < R$ allora

$$|a_n\, z^n| \leq |a_n \rho^n|$$

da cui la convergenza totale e quindi uniforme per

$$|z| \leq \rho_0 < R$$

La serie derivata:
É facile riconoscere che se la serie di partenza converge in z_0 allora la serie derivata converge assolutamente in ogni $|z_1| < |z_0|$.
Ed é anche facile riconoscere l'inverso: se la serie derivata converge in z_0 allora la serie di partenza converge in ogni $|z_1| < |z_0|$
Tenuto presente che la serie derivata ha lo stesso raggio di convergenza allora nel cerchio

$$|z| \leq \rho < R$$

si puó derivare termine a termine...detta $f(z)$ la somma

$$f_x(z) = \frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\partial}{\partial x} z^n$$

$$i f_y(z) = i\frac{\partial}{\partial y}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, i\, \frac{\partial}{\partial y} z^n$$

$$f_x(z) + i\, f_y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\{ \frac{\partial}{\partial x} z^n + i\frac{\partial}{\partial y} z^n \right\} = 0$$

$\square$

OSSERVAZIONE 1.2. *La definizione di raggio di convergenza*

$$R = \sup_{z \in E} |z|$$

assunta nel precedente teorema, come pure in numerosi libri, non é del tutto soddisfacente.
Se la ricerca di R sembra collegata a conoscere l'insieme di convergenza, la sua definizione non puó essere dedotta dall'insieme di convergenza stesso !
Poiché la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

é determinata dai suoi coefficienti, anche il raggio di convergenza deve essere una funzione i tali coefficienti

$$R = \Phi(a_0, a_1, ...)$$

Tale funzione é tradizionalmente espressa dalla formula di Hadamard

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

2. La formula del raggio di convergenza

Sapppiamo che ogni serie di potenze converge assolutamente o nella sola origine o all'interno di un cerchio di centro l'origine e raggio $R > 0$.
Si tratta di riconoscere che il numero R

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

esprime il raggio di convergenza della serie.

- sia
$$|z| \leq \rho_0 < R \quad \to \quad \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{\rho_0}\ \forall n > n_{\rho_0} \quad \to \quad |a_n| < \frac{1}{\rho_0^n}$$
Ne segue che
$$|a_n z^n| < \left(\frac{|z|}{\rho_0}\right)^n$$
e quindi la serie é assolutamente convergente in tali z che verifichino la $|z| < R$
- prendiamo ora un z che invece verifichi la disuguaglianza
$$|z| \geq \rho_0 > R \quad \to \quad \frac{1}{\rho_0} < \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$
L'ultima disuguaglianza implica che esistono infiniti n_k tali che
$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{\rho_0}, \quad |a_{n_k}| > \frac{1}{\rho_0^{n_k}}$$
In corrispondenza a tali valori n_k riesce
$$|a_{n_k} z^{n_k}| \geq |a_{n_k} \rho_0^{n_k}| > 1$$
Circostanza che nega il carattere infinitesimo necessario per i termini di una serie convergente.

2.1. Circostanze favorevoli. La formula precedente per il calcolo di R non é pratica: lo diventa tuttavia in corrispondenza a successioni di coefficienti
$$a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots.$$
sulle quali quel limite superiore sia evidente: cosa che accade ad esempio se la successione
$$\sqrt[n]{|a_n|}$$
é convergente.
Nella forma
$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$
si esprime infatti il noto *criterio della radice.*

Un'altra circostanza favorevole é la convergenza della successione dei rapporti
$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$
il cui limite fornisce direttamente il raggio di convergenza della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

I rapporti considerati hanno tradizionalmente il nome di criterio del rapporto.