$\boxed{\text{Ahlfors, pag. 33,..,45}}$

Bozza da rivedere

1. Il teorema di continuitá

Esiste un secondo teorema di Abel per le serie di potenze, assai piú fine del precedente, esso consente di riconoscere una sorta di continuitá della somma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

sotto opportune ipotesi anche in punti della circonferenza frontiera $|z_0| = R$ del cerchio di convergenza.
Supponiamo per semplicitá

- $R = 1$
- $z_0 = 1$
- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$

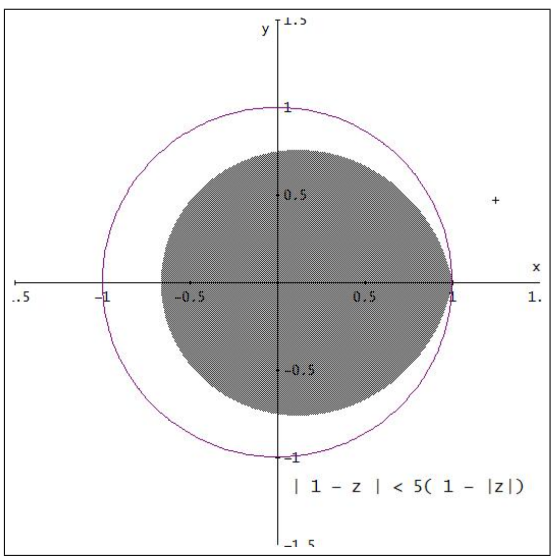

FIGURA 1. $\dfrac{|1-z|}{1-|z|} \leq 5$

TEOREMA 1.1 (Abel 2). *La serie di potenze abbia raggio di convergenza $R = 1$, riesca convergente anche nel punto $z_0 = 1$*

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

allora riesce

$$\lim_{z\to 1} f(z) = 0$$

purché z *si avvicini ad* 1 *con la condizione che*

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} \leq K$$

DIMOSTRAZIONE. I coefficienti a_n della serie possono esprimersi tramite le somme parziali

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \to \quad a_0 = s_0, \quad a_n = s_n - s_{n-1}$$

Le somme parziali della serie di potenze si scrivono pertanto

$$S_n(z) = a_0 + a_1 z + ... a_n z^n = s_0 + (s_1 - s_0)z + ... + (s_n - s_{n-1})z^n =$$
$$s_0(1-z) + s_1(z - z^2) + ... + s_{n-1}(z^n - z^{n-1}) + s_n z^n$$

$$S_n(z) = (1-z)\left(s_0 + s_1 z + ... + s_{n-1} z^{n-1}\right) + s_n z^n$$

Tenuto presente che

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 0 \quad \to \quad \lim_{n\to\infty} s_n z^n = 0$$

si ha

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z) = (1-z)\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$$

da cui, per ogni m

$$f(z) - (1-z)\sum_{n=0}^{m} s_n z^n = (1-z)\sum_{n=m+1}^{\infty} s_n z^n$$

e quindi

$$\left| f(z) - (1-z)\sum_{n=0}^{m} s_n z^n \right| \leq |1-z| \sum_{n=m+1}^{\infty} |s_n||z|^n$$

Supponiamo di aver scelto m tale che

$$|s_n| < \varepsilon \quad \forall n > m$$

allora

$$\left| f(z) - (1-z)\sum_{n=0}^{m} s_n z^n \right| \leq |1-z|\varepsilon \sum_{n=m+1}^{\infty} |z|^n \leq \varepsilon \frac{|1-z|}{1-|z|}$$

Se z é scelto tale che

$$\frac{|1-z|}{1-|z|} \leq K$$

ne segue che

$$\left| f(z) - (1-z)\sum_{n=0}^{m} s_n z^n \right| \leq K\varepsilon$$

da cui

$$\lim_{z\to 1} f(z) = 0, \quad \frac{|1-z|}{1-|z|} \leq K$$

□

COROLLARIO 1.2. *Sia*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \ell \neq 0$$

allora

$$\lim_{z\to 1} f(z) = \ell, \quad \frac{|1-z|}{1-|z|} \leq K$$

1.1. Un'applicazione famosa. Consideriamo la serie di potenze

$$z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - .... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$$

- ha raggio di convergenza $R = 1$
- considerata per $z = x$ reale, con $x \in (-1, 1)$ ha somma $\ln(1+x)$
- la serie converge anche in $z = 1$ come si riconosce dal teorema di Leibnitz sulle serie a termini di segni alterni,
- posto

  $$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

  riesce, per il Teorema di Abel,

  $$\lim_{x\to 1} \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

- da cui

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$$

2. Tre serie famose

$$\begin{cases} e^z & = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{k!} \\ \\ \sin(z) & = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \\ \cos(z) & = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{z^{2k}}{(2k)!} \end{cases}$$

2.1. Soluzioni di equazioni differenziali. *Determinare la funzione analitica $f(z)$ che risolve il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} f'(z) = f(z) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Cerchiamo la soluzione nella forma di una serie di potenze:

$$f(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + ... \quad \rightarrow \quad f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + ...$$

Il primo termine 1 é imposto dalla condizione $f(0) = 1$

$$1 + a_1 z + a_2 z^2 + ... = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + ... \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 1 = a_1 \\ a_1 = 2a_2 \\ a_2 = 3a_3 \\ ...... \end{cases}$$

da cui

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{2.3}, ... \quad ... \quad a_n = \frac{1}{n!}, ...$$

Donde la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

Per poter dire che tale serie esprime una funzione analitica che verifica il problema di Cauchy assegnato occorre riconoscere che tale serie di potenze ha raggio di convergenza $R > 0$.

Cosa che effettivamente accade come si riconosce osservando che la serie dei valori assoluti

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!}$$

é la nota serie esponenziale convergente per qualsiasi valore $|z|$.

2.2. La proprietá formale.

$$e^{a+b} = e^a\, e^b$$

Infatti

$$\left(e^z \,.\, e^{c-z}\right)' = e^z \,.\, e^{c-z} + e^z \,.\, (-e^{c-z}) = 0$$

Quindi la funzione analitica $e^z \,.\, e^{c-z}$ ha derivata nulla in tutto $\mathcal{C}$, quindi é costante:

$$e^z \,.\, e^{c-z} = e^c, \quad \forall z \quad \rightarrow \quad e^a e^{c-a} = e^c$$

ovvero

$$e^a e^{(a+b)-a} = e^{a+b}$$

2.3. L'esponenziale é sempre diverso da zero.

$$e^z \,.\, e^{-z} = 1 \quad \rightarrow \quad e^z \neq 0$$