Ahlfors, pag.42,..,47

Bozza da rivedere

1. La serie esponenziale

La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{1}$$

é una serie di potenze convergente in tutto il piano: infatti la serie dei moduli

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$$

é una serie a termini reali non negativi convergente qualunque sia $|z|$ (per riconoscerlo basta applicare il criterio dell rapporto).
La somma della (1) si chiama e^z.
Conseguenze:

- La funzione e^z é analitica in tutto il piano.
- Se z é reale e^z coincide con l'ordinario e^x
- La serie (1) converge uniformemente in ogni compatto.
- La derivata

$$(e^z)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{z^{n-1}}{n!}$$

- Una primitiva di e^z é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} = e^z - 1$$

Teorema 1.1. *(Da dimostrare in seguito) e^z é l'unico prolungamento analitico della funzione e^x a tutto $\mathcal{C}$*

1.1. La proprietá formale delle potenze.

Riesce

$$e^{a+b} = e^a\, e^b$$

Infatti consideriamo

$$g(z) = e^z\, e^{a+b-z} \quad \rightarrow \quad g'(z) = e^z\, e^{+b-z} - e^z\, e^{a+b-z} = 0$$

Tenuto presente che, dette $u(x, y)$ e $v(x, y)$ le parti reali e immaginarie di g

$$g'(z) = 0 \quad \rightarrow \quad u_x = v_x = u_y = v_y = 0$$

ne segue che g é costante in tutto il piano e quindi

$$g'(z) = 0 \quad \rightarrow \quad g(z) = g(a+b) \quad \rightarrow \quad g(b) = e^b\, e^a = e^{a+b}$$

1.2. Sempre diverso da zero. Dalla

$$e^z\, e^{-z} = e^0 = 1$$

segue che

$$e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathcal{C}$$

1.3. Modulo di e^z. La serie (1) ha coefficienti reali quindi per ciascun addendo si ha

$$\frac{\overline{z}^n}{n!} = \overline{\left(\frac{z^n}{n!}\right)}$$

da cui

$$e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$$

In particolare

$$e^{x+iy} e^{x-iy} = |e^{x+iy}|^2 = e^{2x} \quad \rightarrow \quad |e^{++iy}| = e^x$$

e inoltre

$$|e^{iy}| = 1, \quad \forall y$$

Posto

$$e^{iy} = u(y) + iv(y)$$

determinare $u(y)$ e $v(y)$ percheé

$$e^{x+iy} = e^x(u(y) + iv(y))$$

sia analitica.
Si tratta di verificare le condizioni di Cauchy Riemann

$$\left\{ \begin{array}{l} e^x u'(y) = -e^x v(y) \\ e^x u(y) = e^x v'(y) \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} u'(y) = -v(y) \\ u(y) = v'(y) \\ u(0) = 1 \\ v(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \\ v'(0) = 1 \end{array} \right.$$

Relazioni che implicano

$$u'' = u, \quad v'' = v$$

da cui

$$u(y) = A \sin(y) + B \cos(y), \quad v(y) = C \sin(y) + D \cos(y)$$

Tenuto conto delle condizioni iniziali $u(0) = 1, , ...$ non resta che la scelta di

$$u(y) = \cos(y), \quad v(y) = \sin(y)$$

ovvero

$$e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y) \tag{2}$$

1.4. La periodicitá. Dalla (2) segue, ovviamente che e^z é periodica di periodo $2\pi i$ infatti

$$e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$$

e quindi

$$e^{z+2k\pi i} = e^z \, \left(e^{2\pi i}\right)^k = e^z$$

Osservazione 1.2. *L'invertibilitá di una funzione regolare $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é spesso ricavata dall'ipotesi $|f'(x)| \neq 0$.*
Nel caso di funzioni $g = (u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il teorema di Dini fornisce una condizione di invertibilitá locale, analoga alla precedente unidimensionale, servendosi del determinante Jacobiano,

$$\det \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \neq 0$$

Un problema interessante é esaminare se tale condizione locale possa essere anche globale.
La risposta, negativa, é ottenibile servendosi della funzione

$$g(x, y) = \{e^x \cos(y), \, e^x \sin(y)\}$$

parte reale e parte immaginaria di e^z.
Per tale funzione riesce

$$\det \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ e^x \sin(y) & e^x \cos(y) \end{vmatrix} = e^{2x} > 0$$

Tuttavia la funzione g, ovvero e^z non é invertibile a causa della periodicitá: sia infatti

$$R := \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\pi\} \quad g(R) = \Omega$$

Il nuovo rettangolo

$$P := \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4\pi\}$$

ha la stessa immagine Ω: quindi g non é $(1 : 1)$ tra P e Ω, pur avendi il determinante Jacobiano sempre diverso da zero.

2. Il logaritmo

Problema:
quali numeri complessi w si possono scrivere come

$$w = e^z \quad ?$$

Gli (eventuali) valori z che risolvano tale problema si chiamano

$$\log(w)$$

Osservazione 2.1. *Tutti i numeri complessi $|w| = 1$ si possono scrivere nella forma*

$$w = e^{i\theta}$$

Tutti i numeri complessi, anche di modulo diverso da 1 si possono scrivere nella forma

$$|w|\, e^{i\theta}$$

Il numero (o i numeri) θ é l'argomento di w.

La costruzione, dato w dei $\log(w)$ é molto semplice

$$w = |w|\, e^{i\theta} = e^{x+iy} \quad \to \quad \begin{cases} |w| = e^x \\ e^{i\theta} = e^{iy} \end{cases}$$

Da cui

$$\log(w) = \ln(|w|) + i \arg(w)$$

Nota: Mentre dato w il modulo $|w|$ é ben definito e unico, non altrettanto puó dirsi dell'argomento, definito a meno di multipli di 2π.
Infatti il problema stesso di scrivere

$$w = e^z$$

mostra, stante la periodicitá di e^z, che non ci puó essere unicitá.

2.1. Le proprietá formali.

$$\begin{cases} w_1 = e^{z_1} \\ w_2 = e^{z_2} \end{cases} \quad \to \quad w_1\, w_2 = e^{z_1+z_2} \quad \to \quad \log(w_1 w_2) = \log(w_1) + \log(w_2)$$

3. Le potenze

Definizione 3.1. *Le potenze di base ed esponente complesso sono definite al modo seguente*

$$z^w = e^{w \log(z)}$$

Si noti che in generale l'operazione z^w é plurivoca, cioé produce piú valori.

Esempio 3.2.

$$z^3 = e^{3\,\log(z)}, \quad \log(z) = L + 2k\pi i \quad \rightarrow \quad z^3 = e^{3L}\, e^{2k\pi i} = e^{3L} = \left(e^{L}\right)^3$$

Esempio 3.3.

$$z^{1/3} = e^{1/3\,\log(z)}, \quad \log(z) = L + 2k\pi i \quad \rightarrow \quad z^{1/3} = e^{1/3L}\, e^{\frac{2k\pi i}{3}} =$$
$$= e^{1/3L} \left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^k$$

Si noti che

$$e^{\dfrac{2\pi i}{3}}$$

é una radice terza di 1*, primitiva.*

Esempio 3.4.

$$z^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\log(z)} \quad \log(z) = L + 2k\pi i \quad \rightarrow \quad z^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}L}\, e^{\sqrt{2}(2k\pi i)} =$$
$$= e^{\sqrt{2}L} \left(e^{\sqrt{2}(2\pi i)}\right)^k$$

Infiniti valori appartenenti ad una stessa circonferenza.

Esempio 3.5.

$$i^i = e^{i\,\log(i)} = e^{i\,(\pi + 2k\pi) i} = e^{-(\imath + 2k\pi)}$$

Incredibilmente infiniti valori reali...