Ahlfors, pag.42,..,47

Bozza da rivedere

1. Gli zeri delle funzioni analitiche

Sia $f(z)$ analitica nell'aperto Ω, per ogni $z_0 \in \Omega$ esiste un disco, $D \subseteq \Omega$ nel quale la funzione si esprime come somma di una serie di potenze

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z_0)^k = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + ...$$

Se $f(z_0) = 0$ riesce $a_0 = 0$: se del resto $f(z)$ non é identicamente nulla qualcuno dei coefficienti della serie che la rappresenta sará diverso da zero.
Sia a_m il primo coefficiente diverso da zero

$$f(z) = a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + ... = (z - z_0)^m \{a_m + \varphi(z)\}$$

avendo indicato

$$\varphi(z) = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-m}$$

Tenuto presente che

$$\varphi(z_0) = 0$$

e che $\varphi(z)$ é continua si riconosce che resta piccola in modulo nei punti $z \approx z_0$ e quindi

$$a_m + \varphi(z) \neq 0 \quad \forall |z - z_0| < \varepsilon$$

Ne segue che

$$0 < |z - z_0| < \varepsilon \quad \to \quad f(z) = (z - z_0)^m \{a_m + \varphi(z)\} \neq 0$$

In altri termini se

$$f(z_0) = 0 \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \to \quad 0 < |z - z_0| < \varepsilon \quad \to \quad f(z) \neq 0$$

fenomeno che si enuncia dicendo che

> *gli zeri delle funzioni analitiche sono, come quelli dei polinomi, isolati.*

Osservazione 1.1. *Per le funzioni analitiche accade quello che accadeva per i polinomi:*

$$P(z_0) = 0 \quad \to \quad P(z) = (z - z_0)^m.Q(z), \quad Q(z_0) \neq 0$$

con $Q(z)$ polinomio.
Per una $f(z)$ analitica si ha infatti

$$f(z_0) = 0 \quad \to \quad f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z), \quad \varphi(z_0) \neq 0$$

con $\varphi(z)$ analitica.

1.1. Un teorema di unicitá.

Teorema 1.2. *Se due funzioni $f(z)$, $g(z)$ analitiche nell'aperto connesso Ω coincidono in un insieme dotato di punti di accumulazione allora coincidono in tutto Ω.*

Dimostrazione. Sia $E \subseteq \Omega$ l'insieme in cui

$$f(z) - g(z) = 0$$

e sia z_0 un punto di accumulazione di E.
Per quanto osservato precedentemente allora, non essendo lo zero z_0 isolato ne segue che

$$f(z) - g(z) = 0, \quad \forall |z - z_0| < \varepsilon$$

Quindi

$$z_0 \in \overset{\circ}{E} \subseteq \Omega$$

Se fosse

$$\overset{\circ}{E} \neq \Omega$$

allora esisterebbe

$$z_1 \in \Omega, \qquad z_1 \notin \overset{\circ}{E}, \qquad z_1 \in \partial \, \overset{\circ}{E}$$

Ma é facile riconoscere che z_1 é punto di accumulazione per E e quindi, per quanto osservato prima, é interno ad E. □

2. Le serie trigonometriche e iperboliche

La relazione

$$e^{iy} = \cos(y) + i \sin(y)$$

equivale alle note formule di Eulero

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

le quali suggeriscono i prolungamenti analitici di $\sin(x)$ e $\cos(x)$ a tutto $\mathcal{C}$ seguenti

$$\cos(z) == \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{1}$$

2.1. Parte reale e parte immaginaria.

$$\sin(x + iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$$

$$\cos(x + iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$$

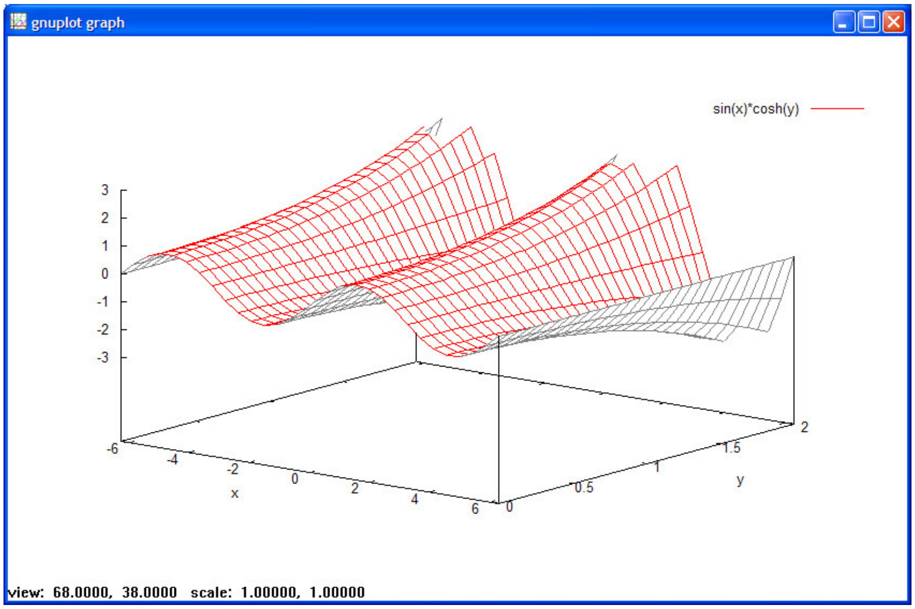

FIGURA 1. $\sin(x)\cosh(y)$ la parte reale di $\sin(z)$

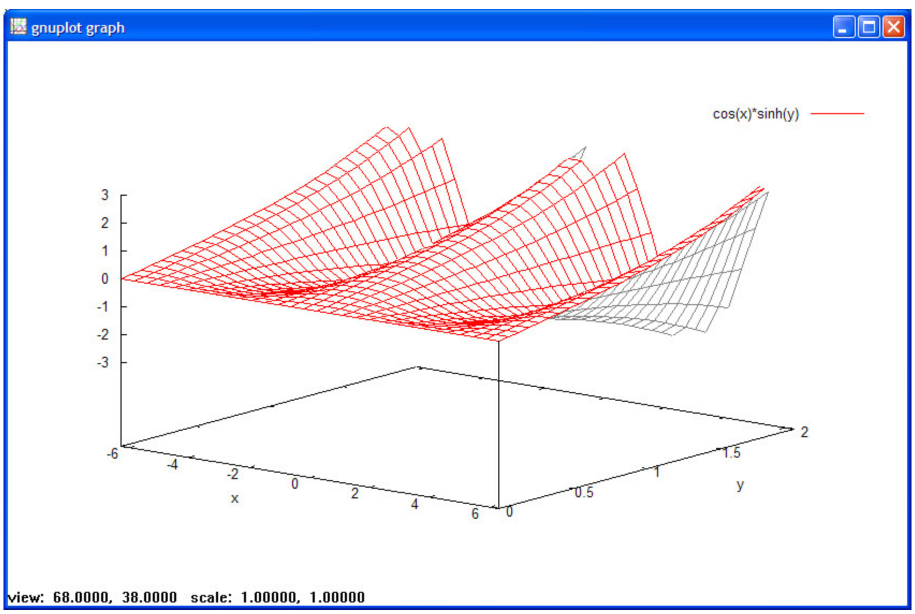

FIGURA 2. $\cos(x)\sinh(y)$ la parte immaginaria di $\sin(z)$

2.2. I moduli delle funzioni goniometriche. Problema: Potrebbero conservarsi le note relazioni

$$|\sin(x)| \leq 1, \quad |\cos(x)| \leq 1$$

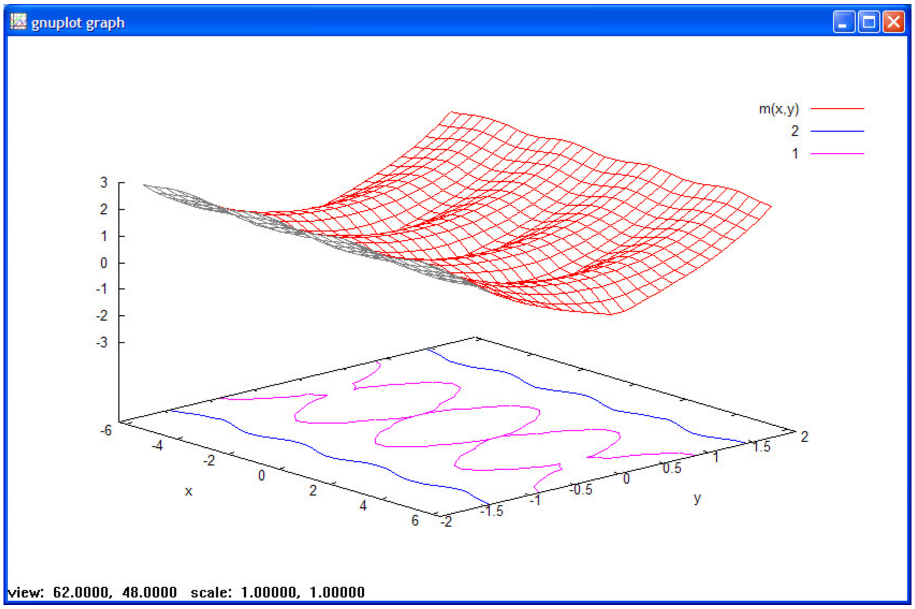

FIGURA 3. Il modulo di $\sin(z)$

valide nel campo reale anche nel campo complesso ?
No ! C'é il Teorema di Liouville...—
In Figura 3 si riconosce facilmente, anche seguendo in basso le linee di livello, come $|\sin(z)|$ si mantenga tra -1 e 1 in prossimitá dell'asse reale, mentre aumenti notevolmente discostandosi da esso.

3. Unicitá dei prolungamenti

TEOREMA 3.1. *I prolungamenti (1) sono gli unici prolungamenti di* $\cos(x)$ *e* $\sin(x)$ *come funzioni analitiche definite in tutto* $\mathcal{C}$.

DIMOSTRAZIONE. Se oltre alla
$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$
definita sopra esistesse un'altra funzione $F(z)$ analitica in $\mathcal{C}$ che coincidesse sull'asse reale con la vecchia $\cos(x)$ ne seguirebbe che
$$\cos(z) = F(z)$$
su tutto l'asse reale, insieme certamente dotato di punti di accumulazione.
Quindi il precedente teorema di unicitá implica
$$F(z) \equiv \cos(z) \qquad \forall z$$

□

4. Sviluppo di Laurent

Sia $f(z)$ analitica nella corona di centro a:

$$r < |z - a| < R$$

Indicate con γ_+ e γ_- le due curve, vedi Figura 4 riesce

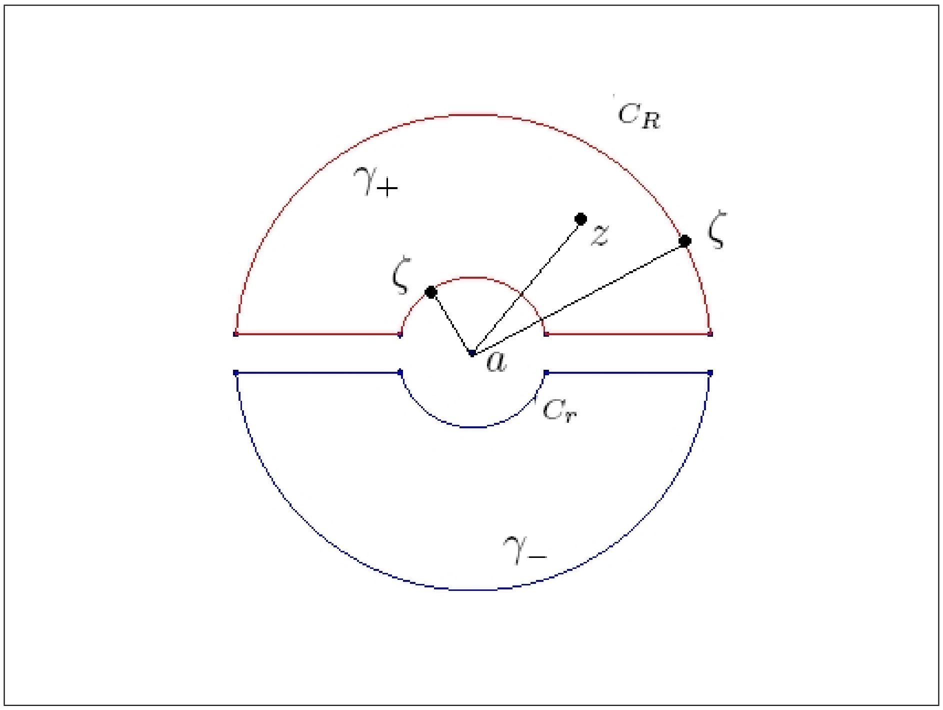

FIGURA 4. La corona $r < |z - a| < R$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_+} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0$$

il primo per il teorema di rappresentazione di Cauchy, il secondo per il teorema di Cauchy sull'integrale delle funzioni analitiche in assenza di singolaritá.

Sommando e tenendo conto della compensazione dei tratti orizzontali si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

ovvero, facendo intervenire il centro a

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)-(z-a)}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{(z-a)-(\zeta-a)}\,d\zeta$$

Le espressioni integrande possono essere rappresentate con opportune serie geometriche come segue:

- **Primo integrale**:

$$\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=\frac{1}{\zeta-a}\,\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}}$$

$$|z-a|<|\zeta-a| \quad\rightarrow\quad \frac{1}{\zeta-a}\,\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{\zeta-a}}=\frac{1}{\zeta-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^k$$

- **Secondo integrale:**

$$\frac{1}{(z-a)-(\zeta-a)}=\frac{1}{z-a}\,\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-a}{z-a}}$$

$$|\zeta-a|<|z-a| \quad\rightarrow\quad \frac{1}{z-a}\,\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-a}{z-a}}=\frac{1}{z-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^k$$

Ne segue, scambiando la serie con l'integrale,

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^k d\zeta+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\zeta)}{z-a}\left(\frac{\zeta-a}{z-a}\right)^k d\zeta$$

Portando poi fuori dagli integrali i fattori che non dipendono da ζ si ha

$$\begin{aligned} f(z)=&\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}\,d\zeta\right\}(z-a)^k+\\ &+\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}f(\zeta)\,(\zeta-a)^k\,d\zeta\right\}\frac{1}{(z-a)^{k+1}}\end{aligned}\tag{2}$$

Si osservi inoltre come, sempre dal teorema di Cauchy sull'integrale di funzioni analitiche su curve chiuse, si riconosca che

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}\,d\zeta$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}f(\zeta)\,(\zeta-a)^k\,d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}f(\zeta)\,(\zeta-a)^k\,d\zeta$$

essendo C_ρ una circonferenza di centro a qualsiasi interna alla corona $r < |z-a| < R$
Posto quindi

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}\, d\zeta, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

dalla (2) segue

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\,(z-a)^k, \quad r < |z-a| < R$$

La serie considerata si dice

serie bilatera

per l'ovvio motivo che é formata da una serie di potenze in $(z-a)$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k\,(z-a)^k,$$

e una serie di potenze in

$$\frac{1}{z-a}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k}\,\frac{1}{(z-a)^k}$$

La prima rappresenta la parte di $f(z)$ regolare fin su a, l'altra la parte singolare.

Esempio 4.1. *La funzione*

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1}$$

é analitica negli insiemi

$$|z| < 1, \quad 1 < |z| < 2, \quad 0 < |z-1| < 3, \quad 2 < |z|, \quad 0 < |z+2| < 3$$

Il primo é un disco, gli altri due sono corone circolari.

Sviluppi di $f(z)$:

- $$|z| < 1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{1}{z+2} = \dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\dfrac{z}{2}\right)^k \\[2ex] \dfrac{1}{z-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} z^k \end{cases}$$

$$f(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{-1}{2} \right)^{k+1} \right\} z^k = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}z - \frac{7}{8}z^2 ...$$

- $$1 < |z| < 2 \quad \rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{2+z} + \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{z} \right)}$$

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{2} \right)^k + \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z} \right)^k$$

Una serie bilatera: una prima componente regolare fin su $z = 0$*, una seconda singolare, tutti addendi in* $\frac{1}{z}$.

- $$0 < |z-1| < 3 \quad \rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{3 + (z-1)} + \frac{1}{z-1}$$

$$f(z) = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{z-1}{3} \right)^k + \frac{1}{z-1}$$

- $$|z| > 2 \quad \rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{z} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{2}{z}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \right\}$$

$$f(z) = \frac{1}{z} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{z} \right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z} \right)^k \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 + (-2)^k) \left(\frac{1}{z} \right)^{k+1}$$

- $$0 < |z+2| < 3 \quad \rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{(z+2) - 3} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{z+2} + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{z+2}{3} \right)^k$$