Ahlfors, pag.

Bozza da rivedere

1. Singolaritá isolate

Lo sviluppo di Laurent permette di rappresentare con un algoritmo standard una funzione analitica nell'intorno incompleto di un suo punto di singolaritá: sia infatti $f(z)$ analitica in

$$0 < |z - z_0| < R$$

riesce

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, (z - z_0)^k$$

indicata con

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, (z - z_0)^k$$

funzione analitica anche in z_0, riesce

$$f(z) = \varphi(z) + \sum_{k=0}^{\infty} c_{-k} \, \frac{1}{(z - z_0)^{k+1}}$$

Il livello di singolaritá di z_0 é pertanto collegato alla presenza degli addendi con $z - z_0$ a denominatore.
Tale presenza puó essere catalogata in tre livelli

- nessun termine,
- un numero finito di termini,
- un numero infinito di termini.

ovvero, riferendosi alla $f(z)$, la classificazione potrebbe essere

- $|f(z)|$ limitata in un intorno di z_0
- $|f(z)|$ divergente al tendere di $z \to z_0$
- $|f(z)|$ priva di limite al tendere di $z \to z_0$.

É facile riconoscere che le tre situazioni nella prima o nella seconda classificazione si equivalgono.

Teorema 1.1. *Sia $f(z)$ analitica in $0 < |z - z_0| < R$: riesce $|f(z)| \leq M$ se e solo se la serie di Laurent non ha alcun termine singolare.*

Dimostrazione.

$$|f(z)| \leq M \quad \to \quad |c_{-n}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1} \, d\zeta \right| \leq M \rho^n$$

da cui, per l'arbitrarietá di ρ segue

$$c_n = 0 \ \forall n < 0$$

Viceversa se $c_n = 0 \ \forall n < 0$ segue che lo sviluppo di Laurent di $f(z)$ non contiene parti singolari, quindi $fc(z)$ é continua, e quindi di modulo limitato in tutto il cerchio $|z - z_0| \leq R$. □

Osservazione 1.2. *Nell'ambito reale conosciamo la* $\sin(1/x)$ *limitata in un intorno di zero ma non prolungabile sullo zero.*
Nell'ambito analitico, l'equivalente $\sin(1/z)$ *non é limitata in un intorno di zero.*

Teorema 1.3. *Sia $f(z)$ analitica in $0 < |z - z_0| < R$: riesce*

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$$

se e solo se lo sviluppo di Laurent contiene un numero finito di addendi singolari.

Dimostrazione. Sia

$$f(z) = \varphi(z) + \sum_{k=0}^{m} c_{-k} \frac{1}{(z - z_0)^{k+1}}$$

ne segue che

$$g(z) = f(z)(z - z_0)^m$$

é analitica nel cerchio $|z - z_0| \leq R$, con $g(z_0) \neq 0$, quindi, nella corona riesce

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \quad \to \quad \lim_{z \to z_0} |f(z)| = \lim_{z \to z_0} \frac{|g(z)|}{|z - z_0|^m} = \infty$$

Viceversa sia

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty \quad \to \quad f(z) \neq 0 \ \forall 0 < |z - z_0| < \varepsilon$$

Consideriamo quindi

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

essa é analitica nel cerchio chiuso e riesce

$$g(z_0) = (z - z_0)^s \psi(z), \quad \psi(z_0) \neq 0$$

Tornando indietro

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)} \frac{1}{\psi(z)} = \frac{1}{(z - z_0)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

essendo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = \frac{1}{\psi(z)}$$

Si riconosce quindi che $f(z)$ si rappresenta con uno sviluppo di Laurent con un numero finito di addendi singolari. $\square$

TEOREMA 1.4. *Sia $f(z)$ analitica in $0 < |z - z_0| < R$: lo sviluppo di Laurent contiene infiniti addendi singolari se e solo se*

$$\liminf |f(z)| = 0 \quad \limsup |f(z)| = \infty$$

DIMOSTRAZIONE. Tenuto conto dei precedenti teoremi si riconosce che infiniti addendi singolari si possono avere solo se

$$\limsup |f(z)| = \infty \quad \liminf |f(z)| \neq \limsup |f(z)|$$

Se del resto fosse

$$\liminf |f(z)| > 0 \quad \to \quad f(z) \neq 0 \;\; \forall |z - z_0| < \varepsilon$$

si potrebbe considerare allora la reciproca

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^m \, \psi(z), \quad \psi(z_0) \neq 0$$

e quindi

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} \frac{1}{\psi(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

avrebbe uno sviluppo di Laurent con un numero finito di addendi singolari. Quindi é provato che

$$\liminf |f(z)| = 0$$

Viceversa supponiamo che riesca

$$\liminf |f(z)| = 0 \quad \limsup |f(z)| = \infty$$

cioé $f(z)$ non sia prolungabile per continuitá su z_0: lo sviluppo di Laurent

- deve contenere addendi singolari,
- non puó contenerne un numero finito.

$\square$

1.1. I nomi tradizionali.

I punti singolari isolati con un numero finito di addendi singolari si chiamano **poli**, quelli con un numero non finito di addendi singolari si chiamano **singolaritá essenziali**.

2. Un risultato sorprendente

Consideriamo la funzione analitica

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^k}$$

L'origine é, per essa una singolaritá essenziale dal momento che la sua serie di Laurent ha infiniti addendi singolari.
Non solo ma, qualunque sia w costante complessa anche la funzione

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} - w$$

ha nell'origine una singolaritá essenziale.
Quindi, per quanto visto precedentemente in relazione a tali singolaritá riesce

$$\liminf |f(z)| = 0$$

ovvero

$$\liminf \left| e^{\frac{1}{z}} - w \right| = 0$$

Affermazione che puó anche essere espressa come segue:

> *comunque si prenda w esiste una successione $\{z_n\}$ convergente all'origine per la quale riesce*

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{z_n}} = w$$

Formula che, letta a buon senso, significa quanto segue:

> *comunque si prenda $\varepsilon > 0$ e comunque si prenda $\rho > 0$ si trovano nella corona $0 < |z - z_0| < \rho$ punti z in cui*

$$\left| e^{\frac{1}{z}} - w \right| < \varepsilon$$

Sotto questa ultima forma viene riferito da Alhfors (pag. 129, Th. 9) che, come la maggioranza degli autori, lo attribuisce a Weierstrass.
Di diversa idea sono altri autori che riconoscono su tale risultato il nome dell'italiano Felice Casorati(1835-1890) o quello del russo Y. K. Sokhotski (1842-1927).

Attualmente il risultato, notevolmente ampliato, passa sotto il nome di Teorema di E. Picard (1856-1941)[1].

TEOREMA 2.1. *Una funzione analitica prende valori vicini quanto si vuole a ogni numero complesso in ogni intorno di una sua singolaritá essenziale.*

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo il risultato per assurdo: sia a il punto di singolaritá e supponiamo che ci sia un numero complesso A e un $\delta > 0$ tali che

$$|z-a| < \delta \quad \to \quad |f(z) - A| > \varepsilon$$

Consideriamo quindi la funzione reciproca

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - B}$$

analitica e limitata, quindi prolungabile per continuitá fin su a Ne segue

$$g(z) = (z-a)^m \psi(z), \quad \psi(a) \neq 0$$

da cui

$$f(z) - B = \frac{1}{(z-a)^m} \frac{1}{\psi(z)} = \frac{1}{(z-a)^m} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$$

Relazione che implicherebbe che f ha nel punto a una singolaritá al massimo polare. $\square$

[1] http://www.britannica.com/eb/article-9059897/Charles-Emile-Picard