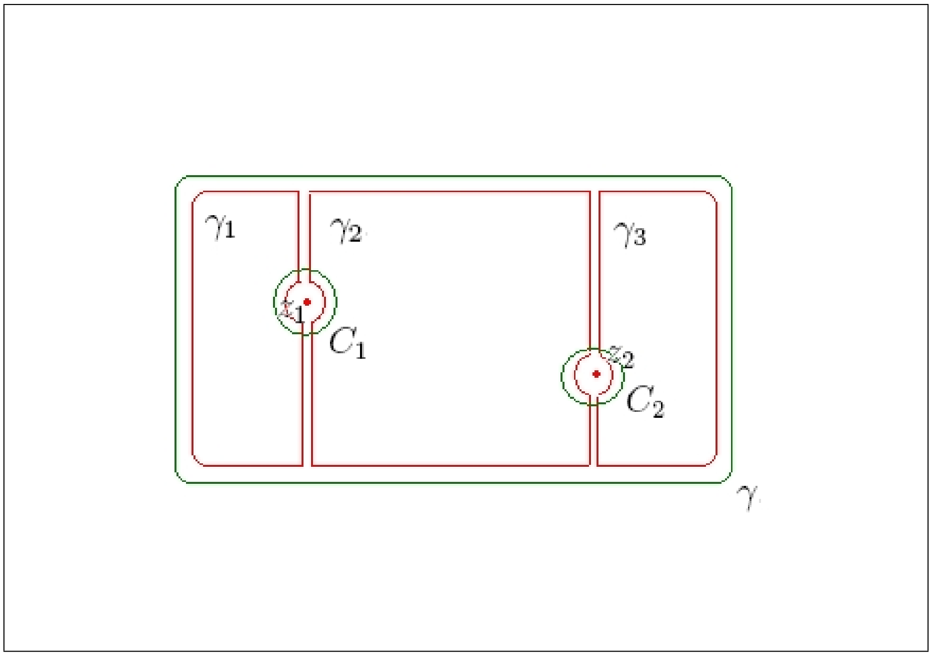


FIGURA 1. $\int_\gamma f(z)dz = \sum_{h=1}^{2} \int_{C_h} f(z)dz$

Ahlfors, pag.148-161

**Bozza da rivedere**

## 1. Il calcolo dei residui

Sia $f(z)$ analitica in $\Omega$, aperto semplicemente connesso, privato di un numero finito di punti $z_1,\ z_2,\ ...,z_m$.
Sia $\gamma \subseteq \Omega$ una curva semplice e chiusa:
fatto riferimento alla Figura 1 si riconosce come l'integrale lungo la curva $\gamma$, verde in figura, equivalga alla somma dei tre integrali sulle tre curve

$$\gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \gamma_3$$

rosse in figura.
Si riconosce inoltre che

$$\int_{\gamma_h} f(z)dz = 0 \quad h = 1, 2, 3$$

E si riconosce che la somma dei tre integrali sulle $\gamma_k$ corrisponda, semplificando i segmenti percorsi due volte in senso opposto, a

$$\sum_{k=1}^{3} \int_{\gamma_k} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz - \sum_{h=1}^{2} \int_{C_h} f(z)dz$$

da cui segue

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{h=1}^{2} \int_{C_h} f(z)dz$$

L'integrale lungo $\gamma$ si conosce quindi non appena si conoscono gli integrali

$$P_h = \int_{\gamma_h} f(z)dz = 0 \quad h = 1, 2, 3$$

### 1.1. I periodi.

Gli integrali

$$P_h = \int_{C_h} f(z)dz$$

si chiamano i *periodi* di $f$ intorno alla singolaritá $z_h$.
Tenuto conto che

$$\int_{C_h} \frac{1}{z - z_h} dz = 2\pi i$$

posto

$$R_h = \frac{P_h}{2\pi i}$$

si riconosce che la differenza

$$f(z) - \frac{R_h}{z - z_h},$$

ha periodo nullo intorno a $z_h$.
Il coefficiente $R$ tale che

$$f(z) - \frac{R}{z - z_h}$$

abbia periodo nullo intorno a $z_h$ si chiama

*residuo di $f$ in $z_h$.*

e si indica con

$$R = \mathrm{Res}|_{z=z_h} f(z)$$

Si riconosce facilmente che

$$\frac{R}{z - z_h}$$

é il primo termine singolare dello sviluppo di Laurent....

OSSERVAZIONE 1.1. *Se $R$ é il residuo di $f$ in $z_h$ allora*

$$f(z) - \frac{R}{z - z_h} = F'(z)$$

*con $F$ analitica in un disco di centro $z_h$.*

### 1.2. Indice di allacciamento.

Posto

$$n(\sigma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{1}{z-a}\, dz$$

riesce, sempre facendo riferimento ad esempio alla Figura 1

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz = \sum_{h=1}^{2} \mathrm{Res}|_{z=z_h} f(z)\, n(\gamma, z_h) \tag{1}$$

OSSERVAZIONE 1.2. *La precedente formula (1) é di poco valore se non affiancata da qualche algoritmo per la determinazione dei $Res|_{z=z_h} f(z)$. Tale determinazione, collegata allo sviluppo di Laurent é difficile nel caso di singolaritá essenziali, piuttosto facile nel caso di singolaritá polari.*

### 1.3. Il calcolo dei residui nei poli.

ESEMPIO 1.3.

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-a)(z-b)}$$

*Due soli punti singolari*

$$z_1 = a, \quad z_2 = b$$

*entrambi poli del primo ordine.*

$$g(z) = f(z).(z-a)$$

*é analitica fin su $z_1 = a$ e riesce*

$$g(z) = g(a) + g'(a)(z-a) + \ldots \quad \to \quad f(z) = \frac{g(a)}{z-a} + g'(a) + \ldots.$$

*Si riconosce facilmente quindi che*

$$Res|_{z=a} f(z) = g(a) = \lim_{z\to a}(z-a).f(z) = \frac{e^a}{a-b}$$

*ovvero che, supponendo che $\gamma$ sia una curva semplice e chiusa che racchiuda al suo interno il punto $a$ e non il punto $b$, si ha*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\; Res|_{z=a} f(z) = 2\pi i \frac{e^a}{a-b}$$

TEOREMA 1.4. *Sia $f$ analitica nel disco $\Omega$ privato del centro $a$, ed abbia in $a$ un polo di primo ordine, riesce*

$$Res|_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

Sia ora $f$ analitica nel disco $\Omega$ privato del centro $a$, ed abbia in $a$ un polo di secondo ordine

$$f(z) = \frac{A}{(z-a)^2} + \frac{B}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

Il residuo in $a$ é $B$: ma come calcolarlo ?
Si ha

$$(z-a)^2 f(z) = A + (z-a)B + (z-a)^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

da cui, derivando si ha

$$\frac{d}{dz}\left[(z-a)^2 f(z)\right] = B + \frac{d}{dz}\left[(z-a)^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n\right]$$

e quindi

$$B = \lim_{z\to a}\left(\frac{d}{dz}\left[(z-a)^2 f(z)\right]\right)$$

Il caso di $f$ analitica nel disco $\Omega$ privato del centro $a$, che abbia in $a$ un polo di ordine $n$ si tratta in maniera analoga: dallo sviluppo di Laurent si ha

$$f(z) = \sum_{h=1}^{n} \frac{B_h}{(z-a)^h} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$$

da cui

$$(z-a)^n f(z) = \sum_{h=1}^{n} B_h(z-a)^{n-h} + (z-a)^n \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$$

da cui, derivando $n-1$ volte si ha

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}((z-a)^n f(z)) = (n-1)!B_1 + \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}\left((z-a)^n \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k\right)$$

e quindi

$$\mathrm{Res}|_{z=a} f(z) = B_1 = \lim_{z\to a}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}((z-a)^n f(z))$$

## 2. Il principio dell'argomento

Sia $f$ analitica nel disco $\Omega$ e abbia nel centro $a$ uno zero di ordine $h$

$$f(z) = (z-a)^h f_h(z), \quad f_h(a) \neq 0$$

Il quoziente

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{h}{z-a} + \frac{f'(z)}{f_h'(z)}$$

é una una funzione analitica nel disco privato del centro $a$, nel quale ha una singolaritá polare del primo ordine con residuo $h$, l'ordine dello zero di $f$ in $a$.

Sia $f$ analitica nel disco $\Omega$ e abbia nel centro $a$ un polo di ordine $h$

$$f(z) = \frac{f_h(z)}{(z-a)^h}, \quad f_h(a) \neq 0$$

Il quoziente

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{h}{z-a} + \frac{f'(z)}{f_h'(z)}$$

é una una funzione analitica nel disco privato del centro $a$, nel quale ha una singolaritá polare del primo ordine con residuo $-h$, l'ordine del polo di $f$ in $a$.

### 2.1. Un'interpretazione geometrica.

Assegnata la curva $\gamma$ e la funzione $f$ consideriamo l'immagine $\Gamma$ di $\gamma$ tramite $f$.
Riesce

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w}dw$$

Tenuto conto che

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{w}dw \neq 0$$

se e solo se la curva $\Gamma$ compie almeno un giro intorno all'origine, si ricava che l'equazione

$$f(z) = 0$$

ha radici nella regione delimitata da $\gamma$ se l'immagine di $\gamma$ tramite $f$ racchiude al suo interno l'origine.

### 2.2. Il teorema di Rouché.

Teorema 2.1. *(Rouché) Siano $f$ e $g$ analitiche nel disco $\Omega$ e riesca*

$$|g(z) - f(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in \partial\Omega$$

*allora $g$ ed $f$ hanno lo stesso numero di zeri in $\Omega$*

Dimostrazione. Consideriamo il quoziente

$$F(z) = \frac{g(z)}{f(z)}, \quad F(z) \neq 0 \quad \forall z \in \partial\Omega$$

$$\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)}$$

da cui

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{F'(z)}{F(z)} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{g'(z)}{g(z)} dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

Tenuto conto che

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{F'(z)}{F(z)} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{1}{w} dw$$

essendo $\Gamma$ la curva immagine di $\gamma$ tramite $F$, riusciŕa

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{1}{w} dw = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \notin \Phi$$

essendo $\Phi$ la regione delimitata da $\Gamma$.
Questo accade se

$$\forall z \in \partial\Omega \quad |F(z) - 1| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad F(z) \in B(1, 1)$$

essendo $B(1, 1)$ il cerchio di centro 1 e raggio 1 ,

$$\left| \frac{g(z)}{f(z)} - 1 \right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |g(z) - f(z)| < |f(z)|$$

Tale condizione é esattamente l'ipotesi fatta: pertanto

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{F'(z)}{F(z)} dz = 0$$

e quindi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

ma i due integrali rappresentano il numero di zeri in $\Omega$ di $f$ e di $g$ che pertanto risultano gli stessi. □

Esempio 2.2. *Il polinomio*

$$g(z) = z^7 - 2z^5 + 6z^3 - z + 1$$

*ha nel disco* $|z| < 1$ *lo stesso numero di zeri del polinomio*

$$f(z) = 6z^3$$

*Infatti*

$$|g(z) - f(z)| = |z^7 - 2z^5 - z + 1| < |6z^3| \quad \forall |z| = 1$$

*Quindi*

$$6z^3 = 0 \quad \rightarrow \quad z_1 = z_2 = z_3 = 0$$

*implicano che l'equazione*

$$z^7 - 2z^5 + 6z^3 - z + 1 = 0$$

*ha nel disco* $|z| < 1$ *anch'essa tre radici.*