CAPITOLO 12

Fattorizzazione

$\boxed{\text{Ahlfors, pag.191-212}}$

Bozza da rivedere

1. Introduzione

I polinomi sono determinati, a meno di un coefficiente, dalle loro radici:

- i polinomi che hanno la sola radice z_1 sono tutti e soli
$$P(z) = a(z - z_1)$$
- i polinomi che hanno le sole radici $z_1,\ z_2$ sono tutti e soli
$$P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$$
- i polinomi che hanno le sole n radici $z_1, \; ....z_n$ sono tutti e soli
$$P(z) = a\prod_{i=1}^{n}(z - z_i)$$
- le funzioni $C^\infty(\mathbb{R})$ che si annullano in $0,\ \pi$ e solo in tali punti sono
$$f(x) = b\, e^{\alpha x}\, x^n(x - \pi)^m, \quad ecc.$$

La rigiditá dei polinomi fa riconoscere come, a meno di un solo fattore, le radici determinimo il polinomio, mentre nel caso, molto piú generale delle funzioni $C^\infty(\mathbb{R})$ le radici non sembrano determinare in modo significativo la funzione.

Il problema che tratteremo in questo capitolo si riferisce alle funzioni analitiche $w = f(z)$ secondo i seguenti punti di vista:

- assegnare le radici $\{z_h\}$ (cioé i punti in cui $f(z_h) = 0$) determina la funzione ?
- la funzione si rappresenta, come accadeva nei polinomi, con un prodotto di fattori $(z - z_h)$?
- attenzione mentre nel caso dei polinomi c'era un numero finito di radici, nel caso di funzioni analitiche ci possono essere infinite radici...

É proprio il terzo dei tre punti precedenti che propone la candidatura dell'algoritmo

prodotti infiniti....

2. Prodotti infiniti

Assegnata una successione di numeri complessi

$$w_1,\ w_2,\ w_3, \ldots.$$

i prodotti

$$W_n = \prod_{i=1}^{n} w_i$$

si dicono prodotti parziali ad essa associati:

- se esiste il limite $\lim_{n\to\infty} W_n = P$
- e se é $P \neq 0$

si dice che il prodotto infinito é convergente al valore

$$P = \prod_{i=1}^{\infty} w_i$$

Esempio 2.1. *Il caso piú semplice di prodotto infinito convergente é quello determinato dalla successione* $\{w_h = 1\} \quad \forall h$ *: in questo caso tutti i prodotti parziali* $W_n = \prod_{i=1}^{n} w_i = 1 \quad \forall n$ *e quindi (ovviamente)* $\prod_{i=1}^{\infty} w_i = 1$.

Osservazione 2.2. *Non é un caso particolarmente strano quello del precedente esempio: 1 é l'elemento neutro del prodotto !*
In altri termini l'esempio proposto corrisponde, nell'ambito delle serie, al caso di addendi tutti uguali a zero, l'elemento neutro della somma.

Osservazione 2.3. *Tenuto conto che se qualche* $w_h = 0$ *i prodotti parziali diventano nulli, e il problema quindi della loro convergenza diviene banalmente risolto, ci si occupa solo di prodotti infiniti con fattori tutti diversi da zero.*

2.1. Due esempi.

François Viète (1540-1630)

$$\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \times \cdots$$

John Wallis (1616-1703)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7} \times \frac{8}{9} \cdots \frac{2k}{2k-1} \times \frac{2k}{2k+1} \cdots$$

$$= 2\times\frac{3^2-1}{3^2}\times\frac{5^2-1}{5^2}\times\frac{7^2-1}{7^2}\cdots = 2\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\cdots$$

$$= 2 \times \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(2k+1)^2}\right)$$

3. Da prodotti a somme...

$$\boxed{\log \prod_{m=1}^{\infty} p_m = \sum_{m=1}^{\infty} \log(p_m)}$$

Il logaritmo (o l'esponenziale) trasformano prodotti in somme:

$$prodotti \quad infiniti \quad \to \quad serie$$

$$\log\left(\prod_{h=1}^{n}(1+\alpha_h)\right) = \sum_{h=1}^{n}\log(1+\alpha_h)$$

$$\begin{cases} P_n = \prod_{h=1}^{n}(1+\alpha_h) \\ \\ S_n = \sum_{h=1}^{n}\log(1+\alpha_h) \end{cases} \quad \to \quad P_n = e^{S_n}$$

É evidente che se la successione delle somme parziali $\{S_n\}$ converge ad S allora convergerá anche la successione dei prodotti parziali $\{P_n\}$ e riuscirá

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} e^{S_n=} = e^S$$

Si puó dimostrare il

TEOREMA 3.1. *Condizione (necessaria e) sufficiente perché il prodotto infinito*

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1+\alpha_h)$$

sia convergente é che sia convergente la serie dei logaritmi principali

$$\sum_{h=1}^{\infty}\log(1+\alpha_h)$$

cioé logaritmi con parte immaginaria:

$$\log(z) = \log(|z|) + i\ \arg(z), \quad -\pi < \arg(z) \leq \pi$$

Dimostrazione. La sufficienza della condizione é del tutto ovvia ed é stata raccontata nelle righe precedenti il teorema. □

Osservazione 3.2. *La necessitá é tutt'altro che ovvia: una delle difficoltá consiste nella molteplicitá dei logaritmi nel campo complesso, e quindi nell'ambiguitá dei termini della serie. (vedi Ahlfors, Th. 5 pag. 191-192)*

4. Il criterio di convergenza di Cauchy

Teorema 4.1. $\prod_{m=1}^{\infty} w_m$ *é convergente se e solo se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* n_ε *tale che*

$$\left|\prod_{m=n+1}^{n+p} w_m - 1\right| < \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon,\ \forall p \geq 0$$

Dimostrazione.
Sufficienza: sia n_0 tale che

$$\left|\prod_{m=n_0}^{n+p} w_m - 1\right| < \frac{1}{2} \quad \forall n > n_0, \quad \to \quad \left|\prod_{m=n_0}^{n+p} w_m\right| < \frac{3}{2}$$

ne segue

$$|P_{n+p} - P_n| = \left|\prod_{m=1}^{n_0} w_m\right| \left|\prod_{m=n_0+1}^{n} w_m\right| \left|\prod_{m=n+1}^{n+p} w_m - 1\right| \leq$$

$$\leq \left|\prod_{m=1}^{n_0} w_m\right| \frac{3}{2} \left|\prod_{m=n+1}^{n+p} w_m - 1\right| \leq L \left|\prod_{m=n+1}^{n+p} w_m - 1\right|$$

Necessitá :

$$|P_n - P| < \frac{1}{2}|P| \quad |P_n| > \frac{1}{2}|P| \quad \forall n > n_0$$

$$|P_{n+p} - P_n| = |P_n| \left|\prod_{m=n+1}^{n+p} w_m - 1\right|$$

Tenuto conto che

$$|P_{n+p} - P_n| \quad \to \quad 0, \qquad |P_n| > \frac{1}{2}|P|$$

si ricava che

$$\left|\prod_{m=n+1}^{n+p} w_m - 1\right| \quad \to \quad 0$$

□

Corollario 4.2. *Se il prodotto infinito*

$$\prod_{m=1}^{\infty} w_m$$

é convergente allora riesce, necessariamente

$$\lim_{m\to\infty} w_m = 1$$

Dimostrazione. Prendendo $p = 1$ si ha

$$\left|\prod_{m=n+1}^{n+1} w_m - 1\right| = |w_m - 1| < \varepsilon \quad \forall m > n_\varepsilon$$

□

Congettura:

Saranno convergenti i prodotti infiniti con i fattori p_h tanto vicini ad 1 da rendere assolutamente convergente la serie degli scostamenti da 1:

$$p_h = 1 + \alpha_h, \qquad \sum_{h=1}^{\infty} |\alpha_h| < \infty$$

Il precedente prodotto infinito di Wallis per $\pi/2$ verifica la congettura...

4.1. La convergenza assoluta.

Poniamo, d'ora in poi

$$w_m = 1 + u_m$$

Definizione 4.3. *Un prodotto infinito*

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 + u_k)$$

si dice assolutamente convergente se

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\log(1 + u_k)| < \infty$$

ovvero, equivalentemente,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| < \infty$$

Teorema 4.4. *Un prodotto infinito*

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k)$$

é assolutamente convergente se e solo se é convergente il prodotto infinito

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + |u_k|)$$

Dimostrazione.

$$\left| \prod_{m=n+1}^{n+p} (1 + u_m) - 1 \right| \leq \left| \prod_{m=n+1}^{n+p} (1 + |u_m|) - 1 \right| \leq$$

$$\leq \left| \prod_{m=n+1}^{n+p} e^{|u_m|} - 1 \right| = \exp\left(\sum_{m=n+1}^{n+p} |u_m| \right) - 1$$

Pertanto

$$\sum_{m=1}^{\infty} |u_m| < \infty \quad \rightarrow \quad \exists \lim_{n\to\infty} \prod_{m=1}^{n} (1 + u_m)$$

Viceversa, tenuto conto che

$$\sum_{m=1}^{n} |u_m| \leq \prod_{m=1}^{n} (1 + |u_m|)$$

si ricava che

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{m=1}^{n} (1 + |u_m|) \quad \rightarrow \quad \sum_{m=1}^{\infty} |u_m| < \infty \quad \rightarrow \quad \exists \lim_{n\to\infty} \prod_{m=1}^{n} (1 + u_m)$$

$\square$

Teorema 4.5. *Sia*

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 + u_m)$$

assolutamente convergente e nullo: allora uno almeno dei suoi fattori é nullo.

DIMOSTRAZIONE.

$$P_n = P_{n_0} \prod_{k=n_0+1}^{n} (1+u_k)$$

$$\left| \prod_{k=n_0+1}^{n} (1+u_k) - 1 \right| \le \left| \prod_{k=n_0+1}^{n} (1+|u_k|) - 1 \right| \le \exp\left(\sum_{m=n_0+1}^{n+p} |u_m| \right) - 1$$

Tenuto presente che la serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} |u_m| < \infty$$

ne segue che

$$\exp\left(\sum_{m=n_0+1}^{n+p} |u_m| \right) - 1 < \varepsilon$$

ovvero che

$$1-\varepsilon \le \prod_{k=n_0+1}^{n} (1+u_k) \le 1+\varepsilon$$

e quindi

$$P_n = P_{n_0}\,\rho_n, \quad \rho_n \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$$

Quindi essendo $P_{n_0} \neq 0$ i prodotti parziali P_n cadono tutti in un intorno di P_{n_0} a distanza positiva dallo zero...

OSSERVAZIONE 4.6. *Un contresempio*

$$\prod_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k+2} = \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,\frac{3}{4}\,\frac{4}{5}.... \quad \to \quad 0$$

pur non essendo alcun fattore nullo.
Attenzione:

$$\frac{k+1}{k+2} = 1 - \frac{1}{k+2} \quad \to \quad u_k = -\frac{1}{k+2}$$

termini che non costituiscono una serie (assolutamente) convergente.

□

ESEMPIO 4.7. *Consideriamo il prodotto infinito*

$$\prod_{m=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{m^2})$$

Essendo

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \infty$$

siamo sicuri che il prodotto infinito é convergente.
Decomposto

$$1 - \frac{1}{m^2} = \frac{m-1}{m}\ \frac{m+1}{m}$$

si ottiene

$$\prod_{i=2}^{m}(1-\frac{1}{i^2}) = \left\{\frac{1}{2}\ \frac{3}{2}\right\}\ \left\{\frac{2}{3}\ \frac{4}{3}\right\}\ ...\left\{\frac{m-1}{m}\ \frac{m+1}{m}\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\ \left\{\frac{3}{2}\ \frac{2}{3}\right\}\ \left\{\ \frac{4}{3}\ ...\frac{m-1}{m}\right\}\ \frac{m+1}{m}$$
$$= \frac{1}{2}\ \frac{m+1}{m} \quad \to \quad \prod_{i=2}^{\infty}(1-\frac{1}{i^2}) = \frac{1}{2}$$

Esempio 4.8. *Sia* $|z| < 1$ *riesce*

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+z^k) = \frac{1}{1-z}$$

Infatti

$$\begin{cases} P_1 = 1+z, \\ P_2 = (1+z)(1+z^2) = 1+z+z^2+z^3, \\ P_4 = 1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+z^7, \\ .... \end{cases}$$

I prodotti parziali $\{P_n\}$ *costituiscono una sottosuccessione delle somme parziali* $\{S_m\}$ *della serie geometrica: quindi*

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-z}$$