Ahlfors, pag.191-212

Bozza da rivedere

5. I prodotti canonici

Un problema:

La funzione analitica intera $\sin(z)$ si annulla in tutti e soli i punti

$$z_h = h\,\pi, \quad h = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

- Il prodotto infinito
$$z \prod_{h=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{h^2\,\pi^2})$$
converge[1] uniformemente in ogni $|z| \leq R$ e rappresenta, quindi, una funzione analitica $f(z)$ intera e nulla in tutti e soli i punti z_h
- Tale $f(z)$ coincide con $\sin(z)$?

5.1. Alcune premesse:

LEMMA 5.1. *Sia $g(z)$ analitica intera, allora*

$$f(z) = e^{g(z)}$$

é analitica intera e sempre diversa da zero.
Viceversa ogni funzione intera $f(z)$ diversa da zero $f(z) \neq 0\ \forall z$ si rappresenta come

$$f(z) = e^{g(z)}.$$

DIMOSTRAZIONE. La prima parte é ovvia.
La seconda:

$$\frac{f'(z)}{f(z)}$$

é analitica in tutto $\mathcal{C}$, quindi é dotata di primitiva, ovvero

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = g'(z) \quad \rightarrow \quad f'(z) - f(z)\,g'(z) = 0$$

ma allora

$$f(z)\,e^{-g(z)}$$

[1] Infatti

$$\sum_{h=1}^{\infty} \left| \frac{z^2}{h^2\,\pi^2} \right| \leq \frac{R^2}{\pi^2} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^2} < \infty$$

ha derivata nulla, ed é quindi costante, da cui

$$f(z) = c\, e^{g(z)}$$

$\square$

Ne segue che

$$\frac{\sin(z)}{z\prod_{h=0}^{\infty}(1-\dfrac{z^2}{h^2\,\pi^2})} = e^{g(z)}$$

con $g(z)$ funzione intera.
Quale sia $g(z)$ non siamo, per il momento in grado di dirlo !

Corollario 5.2. *Sia $f(z)$ analitica intera, e abbia un numero finito di zeri: l'origine di molteplicitá m e altri N punti z_1, z_2, ..., z_N: allora essa si rappresenta come*

$$f(z) = c\, z^m\, e^{g(z)} \prod_{k=1}^{N}(1-\frac{z}{z_k})$$

essendo $g(z)$ una funzione intera.

6. Funzioni intere con zeri assegnati

Lemma 6.1. *Condizione necessaria affinché una successione*

$$z_1,\ z_2,\ z_3, ...$$

di numeri complessi sia l'insieme degli zeri di una funzione intera é che non abbia punti limite al finito.

Dimostrazione. Infatti se esistesse una sottosuccessione $\{z_{n_k}\}$ convergente a w_0 allora

$$f(w_0) = \lim_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = 0$$

ma w_0, come tutti gli zeri delle funzioni analitiche non identicamente nulle, dovrebbe essere uno zero isolato. Cioé in un suo intorno non dovrebbero cadere altri zeri. Affermazione che contraddice che gli zeri z_{n_k} convergano a w_0. $\square$

Problema:

La precedente condizione é sufficiente ?

6.1. Un caso importante.

PROPOSIZIONE 6.2. *Sia $z_1,\ z_2, ...$ una successione di numeri complessi diversi da zero tali che*
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_k|} < \infty$$
il prodotto infinito
$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{z_k})$$
é assolutamente convergente in ogni compatto di $\mathcal{C}$ e rappresenta una funzione analitica intera, che si annulla in tutti e soli i punti z_k.

$\boxed{\text{QUINDI:}}$

Le funzioni intere $f(z)$ che si annullano sui punti z_h tali che
$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{|z_h|} < \infty$$
sono tutte e sole
$$f(z) = e^{g(z)}\ z^m \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{z_k})$$
con $g(z)$ intera ed $m \geq 0$.

6.2. Il caso generale.

Sia $z_1,\ z_2, ...$ una successione di numeri complessi diversi da zero tali che[2]
$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty,$$
La costruzione di un prodotto infinito che esprima una funzione intera nulla sui z_k e solo su essi puó essere fatta ai modi seguenti
$$\prod_{h=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{z_k}), \quad \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^2, \quad \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{g_h(z)}, \quad \prod_{h=1}^{\infty} \varphi_h \left(1 - \frac{z}{z_k}\right), ...$$
essendo le $g_h(z)$ funzioni intere, ovvero le $\varphi_h(z)$ funzioni intere nulle solo in 0.
Si tratta di scegliere, tra le varie proposte quelle che diano luogo ad un prodotto infinito convergente assolutamente in ogni compatto[3].

---

[2]La successione degli zeri di una funzione intera é necessariamente divergente...!
[3]Se la successione degli zeri verifica la precedente condizione
$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{|z_h|} < \infty$$

6.3. I prodotti canonici.

Esiste una tecnica, detta dei prodotti canonici o dei prodotti di Weierstrass, basata sulla terza delle precedenti scelte

$$\prod_{h=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{g_h(z)}$$

con $g_h(z)$ addirittura polinomi di grado quasi sempre non molto alto.
É possibile costruire in corrispondenza alla successione $z_1,\ z_2, ...$ una successione di polinomi

$$p_1(z),\ p_2(z), ...$$

tali che il prodotto infinito

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{z}{z_k})\ e^{p_k(z)}$$

converga assolutamente (e uniformemente) in ogni compatto di $\mathcal{C}$ e quindi rappresenti una funzione analitica intera, che si annulla in tutti e soli i punti z_k.
Si tenga presente che

- se z appartiene a un compatto $|z| \leq R$
- i termini della successione divergono $|z_h| \to \infty$
- quindi $1-\dfrac{z}{z_h}$ appartiene ad un cerchio di centro 1
- quindi

$$\log(1-\frac{z}{z_k}) = -\left(\frac{z}{z_k}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_k}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{z}{z_k}\right)^3 ....$$

Il prodotto infinito

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{z}{z_k})\ e^{p_k(z)}$$

converge se (e solo se)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\log\left((1-\frac{z}{z_k})\ e^{p_k(z)}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\log(1-\frac{z}{z_k})+p_k(z)\right\}$$

é convergente.

---

il primo dei prodotti infiniti proposti giá funziona...

Tenuto conto che $\log(1-\dfrac{z}{z_k})$ é sviluppabile in serie di Taylor é chiaro che i polinomi $p_k(z)$ saranno presi tra tali polinomi di Taylor

$$p_k(z) = -\left\{-\left(\frac{z}{z_k}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_k}\right)^2 - \dots \frac{1}{m_k}\left(\frac{z}{z_k}\right)^{m_k}\right\}$$

$$\left|\log(1-\frac{z}{z_k})+p_k(z)\right| \le \sum_{s=m+1}^{\infty}\frac{1}{s}\left|\frac{z}{z_k}\right|^s$$

Da cui, supponendo di tenere $|z|\le R$ si ha

$$\left|\log(1-\frac{z}{z_k})+p_k(z)\right| \le \left|\frac{R}{z_k}\right|^{m+1}\sum_{s=0}^{\infty}\left|\frac{R}{|z_k|}\right|^s \le \left|\frac{R}{z_k}\right|^{m+1}\frac{1}{1-\dfrac{R}{|z_k|}}$$

Tenuto conto che gli z_k divergono riesce, da un certo k in poi

$$\left|\log(1-\frac{z}{z_k})+p_k(z)\right| \le 2\left|\frac{R}{z_k}\right|^{m_k+1}$$

Riesce quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\log(1-\frac{z}{z_k})+p_k(z)\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{R}{z_k}\right|^{m_k+1} < \infty$$

avendo scelto opportunamente gli m_k.
La possibile, opportuna, scelta degli ordini m_k si riconosce osservando che

- da un certo k in poi riesce

$$\frac{R}{|z_k|} < \frac{1}{2}$$

- quindi (serie geometrica insegna) basta prendere $m_k = k$.
- In molti casi, tenuto conto della divergenza degli $|z_k|$ potranno essere sufficienti scelte di $m_k < k$.

Con tale scelta dei polinomi $p_k(z)$ il prodotto infinito

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-\frac{z}{z_k})\ e^{p_k(z)}$$

é uniformemente convergente in tutto $\mathcal{C}$ ad una funzione intera che si annulla in tutti e soli i punti z_k assegnati.

Osservazione 6.3. *La scelta dei gradi m_h é collegata a rendere la serie*

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{|z_h|^{m_h}} < \infty$$

convergente.
Nel precedente caso particolare

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{|z_h|} < \infty$$

bastava prendere tutti gli m_h uguali ad 1.
Puó succedere che, in altri casi basti prendere tutti gli m_h uguali ad uno stesso valore h.

Teorema 6.4. *Assegnata comunque una successione di punti u_k diversi da zero e divergenti a ∞ esistono funzioni intere che si annullano in tutti e soli tali punti, e sono rappresentate tutte come*

$$f(z) = z^m\, e^{\phi(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{u_n}\right) \exp\left\{ \frac{z}{u_n} + \left(\frac{z}{u_n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z}{u_n}\right)^{\lambda_n} \right\}$$

essendo $\phi(z)$ una funzione intera e λ_n una successione di interi non negativi.

Definizione 6.5. *Una funzione analitica in tutto il piano privato di una successione divergente di punti singolari, tutti di tipo polare, si dice meromorfa intera.*

Corollario 6.6. *Ogni funzione meromorfa intera é quoziente di due funzioni intere.*

Sia $F(z)$ meromorfa intera e siano

$$z_1,\ z_2,\ \ldots.$$

i suoi poli ciascuno di molteplicitá $m_1, m_2, \ldots.$
Sia $g(z)$ una funzione intera che abbia zeri nei punti z_h di molteplicitá m_h.
Il prodotto $F(z)\, g(z)$ é quindi una funzione intera $f(z)$, quindi

$$F(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

7. Il caso di $\sin(z)$

Riesce:

$$\sin(z) = e^{g(z)}\, z \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{h^2\,\pi^2}\right)$$

infatti

- il prodotto infinito
$$\prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{h^2\,\pi^2}\right)$$
é assolutamente e uniformemente convergente in ogni compatto di $\mathcal{C}$.
- la funzione
$$S(z) = z \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{h^2\,\pi^2}\right)$$
si annulla in tutti e soli gli zeri di $\sin(z)$:
  - si annulla in $z = 0$
  - si annulla quando si annulla un fattore
$$1 - \frac{z^2}{h^2\,\pi^2} \quad \rightarrow \quad z = \pm h\pi$$
- Quindi
$$\frac{\sin(z)}{S(z)}$$
é intera e mai nulla, quindi
$$\frac{\sin(z)}{S(z)} = e^{g(z)}$$

$\boxed{\text{PROBLEMA:}}$

Chi é $g(z)$?
Osservato[4] che

$$\cos((2n+1)x) + i\sin((2n+1)x) = (\cos(x) + i\sin(x))^{2n+1} =$$
$$= \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{k}{2n+1} \cos^{2n+1-k}(x)\, i^k\, \sin^k(x)$$

[4] Il conto che viene proposto dovrebbe essere perfezionato, provando accuratamente numerosi passaggi che richiedono convergenza uniforme: si tratta comunque di precisazioni del tutto ovvie e credibili.
Il conto mostrato, eccezionalmente rapido e diverso dallo standard, si trova sul libro *Funzioni analitiche di una variabile complessa* di G.Fichera e L.De Vito

si riconosce che

$$\sin((2n+1)x) = \Im\left\{\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{k}{2n+1} \cos^{2n+1-k}(x)\, i^k\, \sin^k(x)\right\}$$

espressione che, tenuto conto che

$$i^{2m} = (-1)^m, \quad i^{2m+1} = (-1)^m i$$

si riduce alla somma dei soli addendi con k dispari e, quindi, $2n+1-k$ pari.
In altri termini

$$\sin((2n+1)x) = P(\sin(x))$$

essendo $P(s)$ un polinomio di grado $2n+1$ in s.
Gli zeri di $P(s)$ sono, ovviamente,

$$sin(0),\ \pm\sin(\frac{\pi}{2n+1}),\ \pm\sin(2\frac{\pi}{2n+1}),\ ...,\pm\sin(n\frac{\pi}{2n+1})$$

Quindi

$$P(s) = a\, s \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{s^2}{\sin^2(k\frac{\pi}{2n+1})}\right)$$

In altri termini si ottiene la formula trigonometrica

$$\sin((2n+1)x) = a\, \sin(x) \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(k\frac{\pi}{2n+1})}\right)$$

Dividendo membro a membro per x si ha

$$\frac{\sin((2n+1)x)}{x} = a\,\frac{\sin(x)}{x} \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(k\frac{\pi}{2n+1})}\right)$$

da cui, passando al limite per $x \to 0$ si ha

$$2n+1 = a$$

Posto $z = (2n+1)x$ si ha quindi

$$\sin(z) = z\frac{\sin(\frac{z}{2n+1})}{\frac{z}{2n+1}} \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2(\frac{z}{2n+1})}{\sin^2(k\frac{\pi}{2n+1})}\right)$$

Passiamo ora al limite su n nella formula

$$\sin(z) = z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)$$

ovvero

$$e^{g(z)} = 1, \quad g(z) = 0$$

Osservazione 7.1. *Un eperimento da eseguire é disegnare, per z reale i grafici di* $\sin(x)$ *e delle sue approssimazioni*

$$Q_n(x) = x \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right), \quad n = 1, 2, 3, ...$$