CAPITOLO 12

Fattorizzazione

1. Funzione $\Gamma(z)$

Ahlfors, pag.198, 199,..

La funzione Gamma, $\Gamma(z)$, analitica in $\mathcal{C}-\{0,-1.-2,-3,...\}$, é usata in numerosi algoritmi collegati al fattoriale $n!$:

$$\Gamma(n+1)=n!$$

1.1. Primo problema: Costruire una funzione intera che si annulli sugli interi negativi

$$z_1=-1,\ z_2=-2,....,z_n=-n,....$$

Osservazione 1.1. *La funzione*

$$\sin(\pi z)=\sin(\pi x)\cosh(\pi y)+i\cos(\pi x)\sinh(\pi y)$$

certamente collegata al problema si annulla (purtroppo) anche sugli interi $0,1,2,3,...$
Proporre una funzione costruita come

$$f(z)=\begin{cases}\sin(\pi(x+iy)) & x\leq-\frac{1}{2}\\ \\ -\cosh(\pi y) & -\frac{1}{2}<x\end{cases}$$

certamente diversa da zero nel semipiano $\Re z>-1/2$*, non risolve il problema: si tratta di una* $f(z)$ *non analitica, é infatti reale in tutto il semipiano* $\Re z>1/2$ *e quindi, se fosse analitica,*

$$\begin{cases}v_y=u_x\\ v_x=-u_y\end{cases}\quad\rightarrow\quad v_y=v_x=0$$

dovrebbe essere costante.

Il teorema di fattorizzazione di Weierstrass assicura che il **Primo problema** ha soluzione nella forma

$$f(z)=e^{\varphi(z)}\,z^m\prod_{h=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{h}\right)\,e^{p_h(z)}$$

Gli esponenti, polinomi di Taylor del $\log(1 + z/h)$, di punto iniziale $z = 0$,

$$p_h(z) = \left\{ -\left(\frac{z}{h}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{h}\right)^2 - \ldots \frac{1}{m_h}\left(\frac{z}{h}\right)^{m_h} \right\}$$

servono a rendere convergente il prodotto infinito per $|z| \leq R$: gli ordini m_h sono tali da rendere convergente la serie

$$\sum_{h=1}^{\infty} \left|\frac{R}{h}\right|^{m_h+1} < \infty$$

Si riconosce che basta prendere

$$m_h = 1$$

Una funzione intera che si annulli negli interi negativi, ed in essi soltanto é quindi

$$G(z) = \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{h}\right) e^{-z/h}$$

1.2. Legami tra $G(z)$ e $\sin(z)$.

$$z\, G(z)\, G(-z)$$

si annulla su tutti gli interi, anche

$$\sin(\pi\, z) = \pi\, z \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)$$

si annulla su tutti gli interi: queste due funzioni non dovrebbero essere molto diverse!

$$\left\{ \begin{array}{l} G(z) = \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{z}{h}\right) e^{-z/h} \\ G(-z) = \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{z}{h}\right) e^{z/h} \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad z\, G(z)\, G(-z) = z \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right)$$

Ne segue infatti

$$z\, G(z)\, G(-z) = \frac{1}{\pi} \sin(\pi\, z) \tag{1}$$

1.3. La $G(z-1)$.

La funzione intera $G(z-1)$ si annulla se e solo se

$$z-1=-n \quad \rightarrow \quad z=0,\ -1,\ -2,....$$

gli stessi zeri di $G(z)$ piú l'origine: ne segue quindi che

$$G(z-1)=e^{\varphi(z)}\, z \prod_{h=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{h}\right)\, e^{-z/h} \tag{2}$$

Si tratta, al solito, di scoprire chi é la funzione intera $\varphi(z)$.
Tenuto presente che

$$G(z)=\prod_{h=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{h}\right)\, e^{-z/h} \quad \rightarrow \quad G(z-1)=\prod_{h=1}^{\infty}\left(1+\frac{z-1}{h}\right)\, e^{-(z-1)/h}$$

si ha

$$\frac{G'(z-1)}{G(z-1)}=\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1+h}-\frac{1}{h}\right)$$

derivando invece l'espressione a secondo membro di (2) si ha

$$\frac{G'(z-1)}{G(z-1)}=\varphi'(z)+\frac{1}{z}+\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+h}-\frac{1}{h}\right)$$

uguagliando le due espressioni si ottiene

$$\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1+h}-\frac{1}{h}\right)=\varphi'(z)+\frac{1}{z}+\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+h}-\frac{1}{h}\right)$$

portando tutto a primo membro

$$\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z+h-1}-\frac{1}{z+h}\right)-\frac{1}{z}=\varphi'(z)$$

da cui

$$0=\varphi'(z) \quad \rightarrow \quad \varphi(z)=\gamma$$

con γ costante.
Da cui

$$G(z-1)=e^{\gamma}\, z \prod_{h=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{h}\right)\, e^{-z/h}=e^{\gamma}\, z\, G(z) \tag{3}$$

Resta ancora da decidere quanto valga la costante γ....: posto nella (3) $z=1$ si ha

$$G(0)=e^{\gamma}\prod_{h=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{h}\right)\, e^{-1/h}$$

ovvero, tenuto conto che $G(0) = 1$ si ha

$$1 = \lim_{n\to\infty} e^{\gamma} \left(\prod_{h=1}^{n} \frac{h+1}{h}\right) \left(\prod_{h=1}^{n} e^{-1/h}\right) \quad \to \quad e^{-\gamma} = \lim_{n\to\infty} (n{+}1) \prod_{h=1}^{n} e^{-1/h}$$

da cui, passando al logaritmo (reale naturalmente)

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{h} - \log(n+1) \right\} \approx 0.5772$$

1.4. Avvicinandosi alla $\Gamma(z)$.

La funzione

$$H(z) = e^{\gamma\, z} \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{h}\right) e^{-z/h}$$

é ancora analitica intera e si annulla negli stessi zeri della $G(z)$.
Tenuto conto della (3)

$$H(z-1) = e^{\gamma(z-1)}\, G(z-1) = e^{\gamma(z-1)}\, e^{\gamma}\, z\, G(z) = z\, H(z)$$

Definizione 1.2.

$$\Gamma(z) = \frac{1}{zH(z)} = \frac{1}{e^{\gamma z} z G(z)} = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{h}\right)^{-1} e^{z/h}$$

$\Gamma(z)$ é una funzione analitica che ha come uniche singolaritá poli nei punti $z = 0, -1, -2, ...$, tutti di primo ordine: in Figura 1 si riconosce il divergere del modulo in corrispondenza dei punti

$$(-1, 0),\ (-2, 0),\ (-2, 0),\ (-4, 0),\ (-5, 0),\ (-6, 0), ...$$

Teorema 1.3.

$$(z-1)\, \Gamma(z-1) = \Gamma(z)$$

Dimostrazione. Infatti

$$\Gamma(z-1) = \frac{1}{(z-1)\, H(z-1)} = \frac{1}{(z-1)} \frac{1}{zH(z)} = \frac{1}{(z-1)} \Gamma(z)$$

$$\Gamma(z) = (z-1)\, \Gamma(z-1)$$

ovvero anche

$$\Gamma(z+1) = z\, \Gamma(z)$$

□

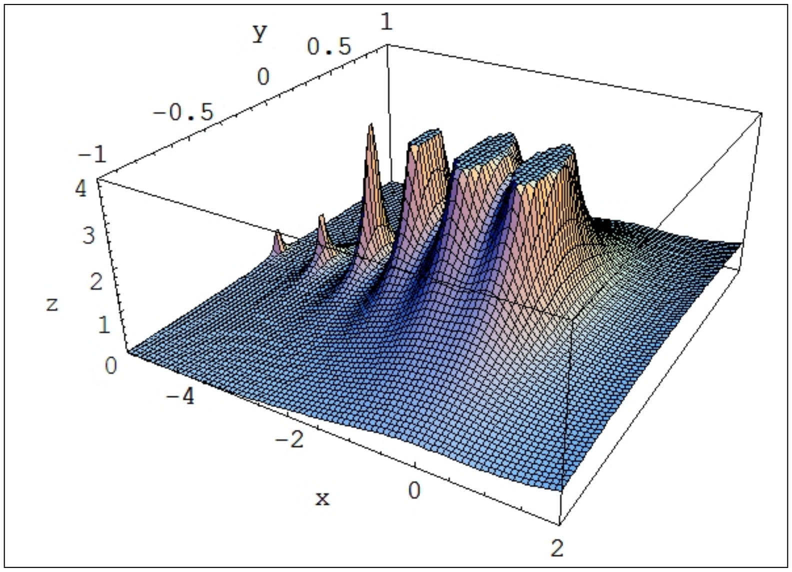

FIGURA 1. $|\Gamma(z)|$: il grafico del modulo di $\Gamma(z)$

COROLLARIO 1.4.

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \Gamma(2) = & 1\,\Gamma(1) & \\ \Gamma(3) = & 2\,\Gamma(2) & = 2.\,1\,\Gamma(1) \\ \Gamma(4) = & 3\,\Gamma(3) & = 3.\,2.\,1\,\Gamma(1) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \Gamma(n+1) = & n\,\Gamma(n) & = n!\,\Gamma(1) \end{cases}$$

ovvero, tenuto conto che $\Gamma(1) = 1$ *si ha*

$$\Gamma(n+1) = n!$$

1.5. Ancora legami $\Gamma(z)$ e $\sin(\pi z)$.

Dalla relazione precedente (1) segue, passando agli inversi

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{zG(z)}\,\frac{1}{G(-z)} = \Gamma(z)\,e^{-\gamma z}\,(-ze^{\gamma z}\Gamma(-z)) =$$

$$= -z\,\Gamma(z)\,\Gamma(-z)$$

da cui

$$-\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = z\,\Gamma(z)\,\Gamma(-z)$$

Tenuto presente che

$$z\,\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$$

si ha

$$\frac{\pi}{\sin(-\pi z)} = \Gamma(z+1)\,\Gamma(-z)$$

da cui, scambiando z con $-z$ si ha

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \Gamma(1-z)\,\Gamma(z)$$

2. Funzione $\zeta(s)$ di Riemann

Posto

$$n^s = e^{s\,\log(n)}, \quad s = \sigma + it$$

con $\log(n)$ il logaritmo principale (in questo caso quello reale), riesce

$$|n^s| = e^{\sigma\,\log(n)} = n^\sigma$$

Tenuto conto che la serie reale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} < \infty \qquad \forall \sigma > 1$$

si riconosce che la serie (complessa)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad s = \sigma + it$$

converge assolutamente nel semipiano $\Re s > 1$, uniformemente in ogni compatto di tale semipiano.

2.1. Il prodotto infinito.

Alcune identitá algebriche:

$$\begin{cases} \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s} \\ \\ \dfrac{1}{2^s}\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n)^s} \end{cases} \quad \to \quad \zeta(s)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^s}$$

avendo tenuto presente che nella differenza

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s}$$

gli addendi pari scompaiono.
Ripetendo un'operazione analoga sull'espressione

$$\zeta(s)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) - \frac{1}{3^s}\zeta(s)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)$$

si perviene a

$$\zeta(s)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m_n^s}$$

essendo gli addendi salvatisi nella serie solo quelli relativi a basi m_n non divisibili né per 2 né per 3.
Il procedimento si puó iterare, seguendo la successione $\{p_k\}$ dei numeri primi e si perviene a

$$\zeta(s)\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k_n(m)^s}$$

essendo i naturali $k_n(m)$ quelli non divisibili per i primi m numeri primi.
Tenuto conto che

- $$\lim_{m\to\infty}\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)$$
- $$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k_n(m)^s}=0$$

si ricava

$$\zeta(s)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)=1$$

ovvero

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right)=\frac{1}{\zeta(s)}$$