

## Rappresentazione conforme

Ahlfors, pag.73,...,99

- concetto ed esempi elementari,
- il gruppo lineare,
- enunciato del teorema di Riemann,
- problema di Dirichlet per il  $\Delta_2$  nel cerchio, formula di Poisson.
- Rappresentazioni conformi dei poligoni sul semipiano.

### 1. Concetto ed esempi elementari

Sia

- $f(z)$  analitica nell'aperto  $\Omega$
- $z = \gamma(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$  un arco di curva interno ad  $\Omega$
- $w = f[\gamma(t)]$  l'immagine della curva tramite  $f$

ne segue, dalla regola di derivazione delle funzioni composte,

$$w'(t) = f'[\gamma(t)] z'(t)$$

Quindi posto  $z(t_0) = z_0$  si ha se  $f'(z_0) \neq 0$

$$w'(t_0) = f'[z_0] z'(t_0) \quad \rightarrow \quad \arg(w'(t_0)) = \arg(f'[z_0]) + \arg(\gamma'(t_0))$$

Sia ora  $z = \sigma(t)$  un'altra curva, con ancora  $\sigma(t_0) = z_0$ , detta

$$s(t) = f[\sigma(t)]$$

l'immagine ancora tramite  $f$  si ha

$$s'(t_0) = f'[z_0] \sigma'(t_0) \quad \rightarrow \quad \arg(s'(t_0)) = \arg(f'[z_0]) + \arg(\sigma'(t_0))$$

da cui sottraendo membro a membro

$$\arg(w'(t_0)) - \arg(s'(t_0)) = \arg(\gamma'(t_0)) - \arg(\sigma'(t_0))$$

... si conservano gli angoli:

l'angolo tra  $f[\gamma]$  e  $f[\sigma]$  é lo stesso di  $\gamma$  e  $\sigma$ .

**1.1. Un fenomeno analogo per le lunghezze lineari.** L'ipotesi  $f(z)$  analitica significa

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \approx f'(z_0) \quad \rightarrow \quad |f(z) - f(z_0)| \approx |f'(z_0)| |z - z_0|$$

relazione che, in altri termini dice:

i segmenti uscenti da  $z_0$  di lunghezze

$$\ell = |z - z_0|$$

( $\ell$  abbastanza corte) vengono trasformati da  $f$  in curve approssimativamente di lunghezze

$$|f'(z_0)| \ell$$

e questo indipendentemente dalle diverse possibili direzioni.

In termini ancora piú intuitivi si puó dire che un intorno circolare di  $z_0$  di raggio  $\rho$  viene trasformato da  $f$  in un intorno circolare di  $f(z_0)$  di raggio

$$|f'(z_0)| \rho$$

### 1.2. Lunghezze e aree.

$$z = \gamma(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta \quad \rightarrow \quad \ell(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| dt$$

$$w = f[\gamma(t)] \quad \rightarrow \quad \ell[f[\gamma]] = \int_{\alpha}^{\beta} |f'[\gamma(t)]| |\gamma'(t)| dt$$

$$B = f(A) \quad \rightarrow \quad \iint_B du dv = \iint_A |J| dx dy$$

$$J = \det \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = |f'(z)|^2$$

$$\text{Area}(B) = \iint_A |f'(z)|^2 dx dy$$

## 2. Il gruppo lineare

$$w = S(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \rightarrow \quad z = S^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

Si tratta di funzioni analitiche ( $cz + d \neq 0$ ) invertibili, naturalmente sotto la condizione

$$ad - bc \neq 0$$

senza la quale riesce ovviamente  $S(z) = \text{costante}$ .

Il titolo *gruppo* si riferisce naturalmente al fatto che le  $S$  formano *gruppo* rispetto all'ordinaria composizione.

### 2.1. Decomposizione standard della trasformazione $S$ .

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2 \left(z + \frac{d}{c}\right)}$$

da cui si deduce la fattorizzazione della trasformazione

$$z \rightarrow w \quad w = S(z)$$

seguinte

$$z \rightarrow z_1 = z + \frac{d}{c} \rightarrow z_2 = \frac{1}{z_1} \rightarrow z_3 = \frac{bc - ad}{c^2} z_2 \rightarrow w = z_3 + \frac{a}{c}$$

- due traslazioni,
- una reciproca,
- un'omotetia.

Proprio tale fattorizzazione aiuta a riconoscere l'invarianza rispetto ad  $S$  della famiglia  $\mathfrak{F}$  di rette e circonferenze.

É ovvio che omotetie e traslazioni trasformano  $\mathfrak{F}$  in sé: resta da studiare la reciproca.

Sia

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

l'equazione di una circonferenza del piano  $z$ : preso

$$z = \frac{1}{w} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}} \right) \\ y = \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}} \right) \end{cases}$$

Sostituendo si ha pertanto

$$\frac{1}{w\bar{w}} + \frac{a}{2} \left( \frac{1}{w} + \frac{1}{\bar{w}} \right) + \frac{b}{2i} \left( \frac{1}{w} - \frac{1}{\bar{w}} \right) + c = 0$$

ovvero posto  $w = u + iv$  si ha

$$\frac{1}{u^2 + v^2} \{1 + au + bv\} + c = 0$$

Se  $c = 0$  l'equazione della circonferenza del piano  $z$  corrisponde all'equazione del piano  $w$

$$1 + au + bv = 0$$

una retta (non passante per l'origine).

Se  $c \neq 0$  l'equazione della circonferenza del piano  $z$  corrisponde all'equazione del piano  $w$

$$u^2 + v^2 + \frac{1}{c} \{1 + au + bv\} = 0$$

una circonferenza del piano  $w$  (non passante per l'origine).

Con un calcolo analogo (ma superfluo) si riconosce che la trasformazione reciproca muta

- rette non passanti per l'origine in circonferenze,
- rette passanti per l'origine in rette.

TEOREMA 2.1. *Le trasformazioni*

$$w = S(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0$$

trasformano la famiglia  $\mathfrak{F}$  delle rette e delle circonferenze in sé.

## 2.2. Alcune $S$ particolari.

La  $S$  é determinata dando tre coppie di punti corrispondenti

$$w_1 = S(z_1), \quad w_2 = S(z_2), \quad w_3 = S(z_3)$$

Il caso piú semplice, e che fornisce poi la soluzione generale, é scegliere

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 1, \quad w_3 = w_\infty$$

riesce ovviamente

$$S(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

cioé la  $S$  determinata dai coefficienti

$$a = z_2 - z_3, \quad b = -z_1(z_2 - z_3), \quad c = z_2 - z_1, \quad d = -z_3(z_2 - z_1)$$

ESEMPIO 2.2. *Detta  $S(w)$  la trasformazione precedente verificare che riesce effettivamente*

$$S(0) = z_1, \quad S(1) = z_2, \quad S(w_\infty) = z_3$$

OSSERVAZIONE 2.3. *Il calcolo di  $S(w_\infty)$  si fa, come standard ogni volta che ci si riferisce al punto all'infinito, sostituendo a  $w$   $1/s$ , semplificando dove possibile e ponendo poi  $s = 0$ .*

*Il procedimento equivale, del resto, a quello del tutto naturale di considerare il limite*

$$\lim_{|w| \rightarrow \infty} \frac{-z_3(z_2 - z_1)w + z_1(z_2 - z_3)}{-(z_2 - z_1)w + z_2 - z_3}$$

**2.3. Un algoritmo intelligente.**

Per determinare la  $S$  che soddisfi le tre condizioni

$$w_1 = S(z_1), \quad w_2 = S(z_2), \quad w_3 = S(z_3)$$

costruiamo

- la  $\zeta = S_1(z)$  che porta  $z_1, z_2, z_3$  in  $0, 1, \infty$
- la  $\zeta = S_2(w)$  che porta  $w_1, w_2, w_3$  in  $0, 1, \infty$
- risolvendo poi la equazione  $S_1(z) = S_2(w)$  rispetto a  $w$  si ha la  $w = S(z)$  cercata...

$$\frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_3} \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}$$

ESEMPIO 2.4. *Determinare la trasformazione che porta*

$$1 \rightarrow 2, \quad i \rightarrow 3, \quad -1 \rightarrow 4$$

*L'equazione in  $w$  da risolvere é quindi*

$$\frac{w - 2}{w - 4} = i \frac{z - 1}{z + 1}$$

$$S(z) = \frac{(3 - i)z - 1 + 3i}{i + z}$$

**3. Esempi fondamentali di  $S(z)$** **3.1. Semipiano  $\rightarrow$  Semipiano.**

La trasformazione

$$w = e^{i\theta}z + b$$

trasforma un semipiano in un altro: essa si decompone infatti in una rotazione - il fattore  $e^{i\theta}$  - e in una traslazione - l'addendo  $b$ .

**3.2. Semipiano  $\rightarrow$  cerchio.**

$$w = \frac{z - i}{z + i} \rightarrow \begin{cases} S(i) = 0 \\ S(0) = -1 \\ S(1) = -i \\ S(-1) = i \\ S(-i) = \infty \end{cases}$$

La trasformazione  $S$ , come tutte quelle di tale tipo, porta la famiglia  $F$  (rette e circonferenze) in sé, quindi

$$\begin{cases} S(0) = -1 \\ S(1) = -i \\ S(-1) = i \end{cases}$$

implicano che l'asse  $x$ , cioè la retta  $y = 0$  sia trasformata in un'altra retta o in una circonferenza: poiché tale trasformata deve passare per

$$-1, \quad -i, \quad i$$

allora non può che essere la circonferenza  $|w| = 1$  tali tre punti.

Semplici ragioni di continuità fanno riconoscere che il semipiano  $\Re z > 0$  non può che essere trasformato in una delle due parti del piano  $w$  determinate dalla circonferenza  $|w| = 1$

- la parte dentro  $|w| < 1$
- la parte fuori  $|w| > 1$

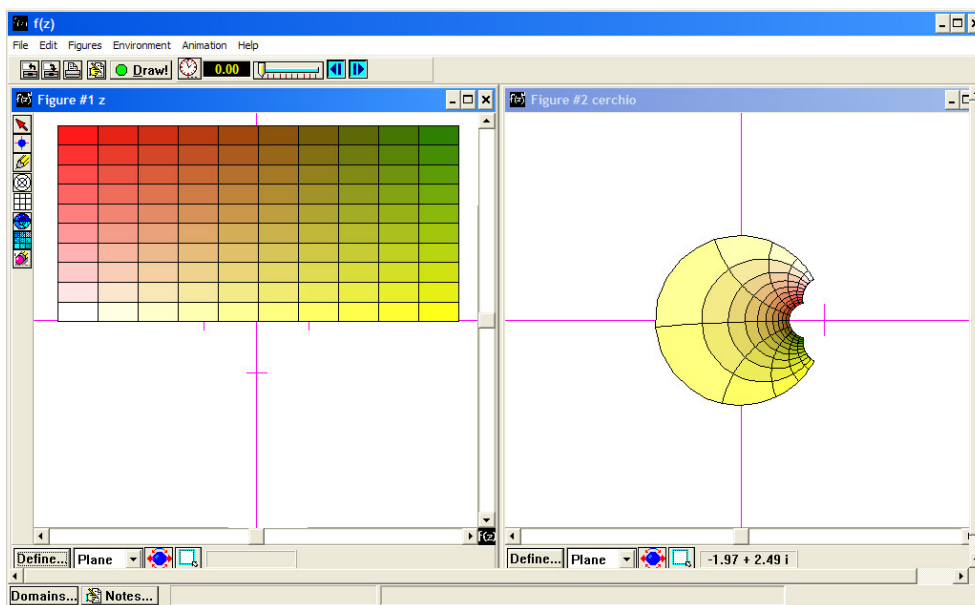


FIGURA 1.  $w = \frac{z - i}{z + i}$ ,  $z$  a sinistra,  $w$  a destra.

Tenuto conto che

$$S(i) = 0$$

si riconosce che, necessariamente,

$$S : \Re z > 0 \quad \rightarrow \quad |w| < 1$$

Nel grafico di Figura 1, realizzato con il software  $f(z)$ , si riconosce la trasformazione di un grande rettangolo del semipiano  $\Re z > 0$  in una parte interna al cerchio  $|w| < 1$ .

Si noti che

- la quadrettatura del rettangolo si trasforma in una ragnatela dentro il cerchio rispettosa degli angoli,
- la corrispondenza dei colori fa riconoscere come la trasformazione operi: ad esempio i rettangoli verde scuro in alto a destra vanno in settori verde scuro nella parte di cerchio piú prossima a  $w = 1$
- si intuisce che se  $z \rightarrow \infty$  segue  $S(z) \rightarrow 1$
- 

$$|S'(z)| = \left| \frac{2i}{(z+i)^2} \right| = \frac{2}{|z+i|^2}$$

le dilatazioni maggiori si osservano vicino ai punti  $z$  piú vicini a  $-i$ , ovvero dove  $|z+i|$  é piú piccolo... zone gialle in Fig. 1.

**OSSERVAZIONE 3.1.** *Una trasformazione analoga alla precedente puó farsi a partire da  $a \in \Re z > 0$*

$$w = \frac{z-a}{z-\bar{a}} e^{i\theta} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} S(a) = 0 \\ S(0) = \frac{a}{\bar{a}} e^{i\theta} \\ S(\bar{a}) = \infty \end{cases}$$

### 3.3. Cerchio $\rightarrow$ Cerchio.

Sia  $a = \alpha + i\beta \in B$ , cerchio  $|z| < 1$ : la trasformazione

$$S(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

trasforma in modo biunivoco e conforme  $B$  in  $B$ .

Infatti

$$|S(1)| = \left| \frac{1-a}{1-\bar{a}} \right| = \frac{|1-a|}{|1-\bar{a}|} = 1$$

$$|S(-1)| = \left| \frac{-1-a}{1+\bar{a}} \right| = \frac{|1+a|}{|1+\bar{a}|} = 1$$

$$|S(i)| = \left| \frac{i-a}{1-i\bar{a}} \right| = \frac{|i-i\beta-\alpha|}{|1-\beta-i\alpha|} = 1$$

Riconosciuto che tre punti,  $1, -1, i$  della circonferenza  $|z| = 1$  vanno nella circonferenza  $|w| = 1$  se ne deduce che tutta la circonferenza  $|z| = 1$  va in tutta la circonferenza  $|w| = 1$ .

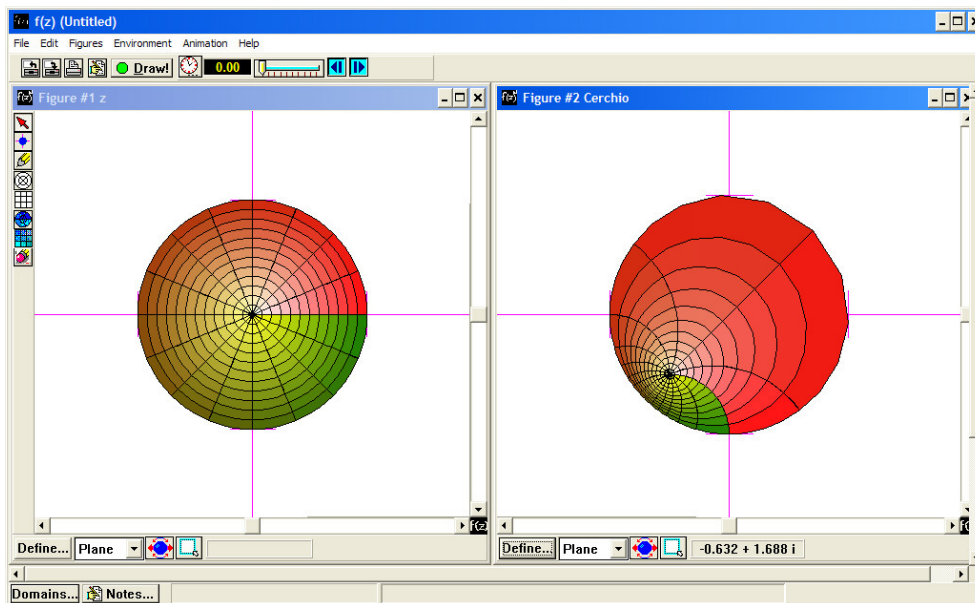


FIGURA 2.  $a = \frac{1}{2}(1 + i)$ ,  $S(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$

Resta da decidere se  $B : |z| < 1$  vada in  $|w| < 1$  oppure in  $|w| > 1$ : tenuto conto che

$$a \in B, \quad S(a) = 0 \in \{|w| < 1\}$$

si riconosce che

$$S : |z| < 1 \rightarrow |w| < 1$$

#### 4. Il teorema di Riemann

LEMMA 4.1. *Sia  $\Omega \subset \mathcal{C}$  un aperto semplicemente connesso di  $\mathcal{C}$ , diverso dal piano  $\mathcal{C}$  intero, detto  $B$  il cerchio aperto  $|z| < 1$  esistono funzioni analitiche  $f$  tali che riesca*

$$f(B) = \Omega$$

*con corrispondenza biunivoca e conforme ( $f'(z) \neq 0, \forall z \in B$ ).*

TEOREMA 4.2. *Siano  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  due aperti semplicemente connessi e diversi dall'intero piano  $\mathcal{C}$ : esistono funzioni analitiche  $f$  tali che riesca*

$$f(\Omega_1) = \Omega_2$$

*con corrispondenza biunivoca e conforme ( $f'(z) \neq 0, \forall z \in \Omega_1$ ).*



**4.1. La frontiera...**

É evidente che le  $f$  che applicano  $\Omega_1$  su  $\Omega_2$  non potranno, in generale, essere analitiche fin sulla frontiera: se lo fossero trasformerebbero  $\partial\Omega_1$  su  $\partial\Omega_2$  in modo conforme....

....e puó benissimo capitare che le due curve  $\partial\Omega_1$  e  $\partial\Omega_2$  abbiano angoli assai diversi !

---

*Ultima revisione: 7 maggio 2007*

D:\Fisica04\_05\Complex\HTML\lezioni\Corso\lezione\_17