CAPITOLO 14

Il problema di Dirichlet

1. La formula di Poisson

Sia $f(z)$ analitica nel cerchio $B: \ |z|<1$ allora per ogni $z \in B$ si ha la formula di rappresentazione di Cauchy

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\,\zeta$$

Posto inoltre

$$z^*=\frac{1}{\overline{z}}, \quad z^* \notin B \quad \to \quad 0=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z^*}\,d\,\zeta$$

da cui segue anche

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} f(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - z} \; - \frac{1}{\zeta - z^*}\right)d\,\zeta$$

ovvero

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B} f(\zeta)\,\frac{z-z^*}{(\zeta - z)(\zeta - z^*)}d\,\zeta$$

Posto $z=\rho\,e^{i\theta}, \quad z^*=\dfrac{1}{\rho}\,e^{i\theta}, \quad \zeta=e^{i\varphi}$ l'integrale si esprime come

$$f(\rho\,e^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi})\,\frac{\left(\rho-\dfrac{1}{\rho}\right)e^{i\theta}}{(e^{i\varphi}-\rho\,e^{i\theta})\left(e^{i\varphi}-\dfrac{1}{\rho}\,e^{i\theta}\right)}\,e^{i\varphi}\,d\,\varphi=$$

$$f(\rho\,e^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi})\,\frac{(\rho^2-1)\,e^{i\theta}}{(e^{i\varphi}-\rho\,e^{i\theta})\,(\rho\,e^{i\varphi}-\,e^{i\theta})}\,e^{i\varphi}\,d\,\varphi=$$

$$f(\rho\,e^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi})\,\frac{\rho^2-1}{(1-\rho\,e^{i(\theta-\varphi)})\,(\rho\,e^{i(\varphi-\theta)}-1)}\,d\,\varphi=$$

(1) $$f(\rho\,e^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi})\,\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\,\cos(\varphi-\theta)}\,d\,\varphi$$

Se $u(z)$ é una funzione reale armonica in B

- costruiamo l'armonica coniugata v,
- rappresentiamo la funzione analitica $f(z) = u(z)+iv(z)$ tramite la (1)
- isoliamo parte reale e parte immaginaria e teniamoci la rappresentazione della parte reale, cioé della u

$$u(\rho\, e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\varphi}) \, \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2 - 2\rho\, \cos(\varphi-\theta)} \, d\,\varphi \tag{2}$$

La (2) si chiama formula di Poisson e determina i valori $u(\rho\, e^{i\theta})$ di una funzione armonica in B ricavandoli dai valori $u(e^{i\varphi})$ della stessa funzione su ∂B

2. Il problema di Dirichlet

Si consideri il problema nell'incognita $u(x, y)$

$$\begin{cases} \triangle\, u(x,y) & = 0 \qquad\quad\;\; \forall (x,y) \in B \\ u(x,y) & = g(x,y) \;\; \forall (x,y) \in \partial B \end{cases}$$

con g funzione continua su $\in\, \partial B$, detto *problema di Dirichlet nel cerchio.*

$\boxed{Se}$ tale problema ha soluzione questa non puó che essere quella prodotta dalla (2)

$$u(r\, e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{i\varphi}) \, \frac{1-r^2}{1+r^2 - 2r\, \cos(\varphi-\theta)} \, d\,\varphi \tag{3}$$

Per provare che il problema di Dirichlet ha soluzione occorre quindi verificare se la (3) lo soddisfa, cioé occorre verificare se

- la (3) é armonica in B
- la (3) ha traccia g su ∂B, cioé se

$$\lim_{z \to e^{i\theta}} u(z) = g(e^{i\theta})$$

Per verificare se la (3) é armonica in B é bene servirsi dell'espressione dell'operatore di Laplace in coordinate polari

$$\triangle\, u(r\, e^{i\theta}) = \frac{\partial}{\partial r^2} u(\rho\, e^{i\theta}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} u(\rho\, e^{i\theta}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta^2} u(\rho\, e^{i\theta})$$

e ricordare che per $r\, e^{i\theta} \in K$, con K compatto contenuto in B si puó derivare sotto il segno d'integrale:

$$\triangle\, u(r\, e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{i\varphi}) \, \triangle \left(\frac{1-r^2}{1+r^2 - 2r\, \cos(\varphi-\theta)} \right) d\,\varphi$$

Tenuto conto che

$$\triangle\left(\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\,\cos(\varphi-\theta)}\right)=0\quad\forall\varphi,\ r<1$$

si riconosce che la funzione espressa dalla (3) é armonica in B qualunque sia g.

Piú difficile é verificare la proprietá di limite:

$$\lim_{z\to e^{i\theta}} u(z)=g(e^{i\theta})$$

A tale scopo ricordiamo che

- se $r<1$ riesce
$$\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\,\cos(\varphi-\theta)}\geq 0$$
- se $g=1$ riesce
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\,\cos(\varphi-\theta)}\,d\varphi=1\quad\forall r<1$$
- se $|\varphi-\theta|>\delta$ riesce
$$\left|\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\,\cos(\varphi-\theta)}\right|<\varepsilon\quad\forall r>r_\varepsilon$$
- $\forall\varepsilon>o\quad\exists\delta>0\quad|\varphi-\theta|>\delta\quad\to\quad|g(e^{i\varphi})-g(e^{i\theta})|<\varepsilon$

Si tratta di quattro affermazioni abbastanza evidenti.

Tenuto conto della seconda delle quattro si ha

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(e^{i\theta})\,\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\,\cos(\varphi-\theta)}\,d\varphi=g(e^{i\theta})$$

e quindi

$$(4)\quad u(z)-g(e^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(g(e^{i\varphi})-g(e^{i\theta}))\,\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\,\cos(\varphi-\theta)}\,d\varphi$$

Osserviamo che se $|\varphi-\theta|>\delta\,>0$ riesce ovviamente

$$\lim_{r\to 1}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\,\cos(\varphi-\theta)}=0$$

Decomponiamo pertanto l'integrale a secondo membro di (4)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{|\varphi-\theta|<\delta}(g(e^{i\varphi})-g(e^{i\theta}))\,\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\,\cos(\varphi-\theta)}\,d\varphi\,+$$
$$+\,\frac{1}{2\pi}\int_{|\varphi-\theta|\geq\delta}(g(e^{i\varphi})-g(e^{i\theta}))\,\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\,\cos(\varphi-\theta)}\,d\varphi$$

I due addendi hanno limite 0 per due differenti motivi[1]:

- il primo integrale contiene il termine
$$g(e^{i\varphi}) - g(e^{i\theta})$$
variazione di una funzione continua su due punti $e^{i\varphi}$ e $e^{i\theta}$ vicini, $|\varphi - \theta| < \delta$,
- il secondo beneficia del
$$\lim_{r \to 1} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\,\cos(\varphi - \theta)} = 0$$
essendo $|\varphi - \theta| \geq \delta$.

Teorema 2.1. *Sia g una funzione reale continua su ∂B allora la (3)*

- *é armonica in B,*
- *continua in $B \cup \partial B$*
- *coincide con g su ∂B.*

3. Problema di Dirichlet, formula di Poisson, teorema di Riemann

Lemma 3.1. *Sia $F(w)$, $w = u + iv$, armonica in Ω,*
$$f : A \quad \to \quad \Omega, \quad f(x + iy) = u(x + iy) + iv(x + iy)$$
analitica in A allora
$$G = F \circ f, \qquad G(z) = F[f(z)]$$
é armonica in A.

Dimostrazione. Si tratta di una semplice applicazione della regola di derivazione delle funzioni composte:
$$G_x = F_u\, u_x + F_v\, v_x$$
$$G_{xx} = F_{uu}\, u_x^2 + F_{uv}\, u_x v_x + F_u\, u_{xx} + F_{vv}\, v_x^2 + F_{vu}\, v_x u_x + F_v\, v_{xx}$$

$$G_y = F_u\, u_y + F_v\, v_y$$
$$G_{yy} = F_{uu}\, u_y^2 + F_{uv}\, u_y v_y + F_u\, u_{yy} + F_{vv}\, v_y^2 + F_{vu}\, v_y u_y + F_v\, v_{yy}$$

[1]Detto M il massimo del modulo di g si ha complessivamente, per $r > r_\varepsilon$,
$$\left|u(r\,e^{i\theta}) - g(e^{i\theta})\right| \leq \frac{1}{2\pi}\varepsilon \int_{|\varphi-\theta|<\delta} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\,\cos(\varphi - \theta)}\, d\,\varphi +$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\, 2M \int_{|\varphi-\theta|\geq\delta} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\,\cos(\varphi - \theta)}\, d\,\varphi \leq \varepsilon + 2M\varepsilon$$

Sommando si ottiene

$$G_{xx} + G_{yy} = (F_{uu} + F_{vv})(u_x^2 + u_y^2)$$

avendo tenuto conto che

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0, \quad u_x^2 + u_y^2 = v_x^2 + v_y^2, \quad u_x v_x + u_y v_y = 0$$

Ne segue che

$$F_{uu} + F_{vv} = 0 \quad \to \quad G_{xx} + G_{yy} = 0$$

$\square$

Dal Lemma si riconosce quindi che le funzioni armoniche in Ω sono strettamente imparentate con le funzioni armoniche in A se esiste una funzione analitica f che trasformi A in Ω.

4. Da un problema di Dirichlet a un altro

Siano A e B due aperti e sia $w = f(z)$ una funzione analitica invertibile tale che

$$f : A \quad \to \quad B, \quad f(A) = B, \quad A = f^{-1}(B)$$

Quindi

$$\triangle F(w) = 0 \ \ \forall w \in B \quad \to \quad \triangle F[f(z)] = 0 \ \ \forall z \in A \tag{5}$$

e viceversa

$$\triangle G(z) = 0 \ \ \forall z \in A \quad \to \quad \triangle G[f^{-1}(w)] = 0 \ \ \forall w \in B$$

In altri termini la f associa alle funzioni armoniche in A funzioni armoniche in B e viceversa.
Inoltre

$$f(\partial A) = \partial B, \qquad f^{-1}(\partial B) = \partial A$$

e quindi

$$F(w) = s(w) \ \forall w \in \partial B \quad \leftrightarrow \quad F[f(z)] = s[f(z)] \ \forall z \in \partial A \tag{6}$$

I due problemi di Dirichlet

$$\begin{cases} \triangle F(w) & = 0 & w \in B \\ F(w) & = s(w) & w \in \partial B \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} \triangle G(z) & = 0 & z \in A \\ G(z) & = s[f(z)] & z \in \partial A \end{cases}$$

sono pertanto equivalenti:

$$F(w) = G[f^{-1}(w)], \qquad G(z) = F[f(z)]$$

ovvero se si sa risolvere il problema in A si risolve anche quello in B e viceversa.
Il teorema di Riemann del resto assicura che per ogni aperto semplicemente connesso A esiste una funzione analitica invertibile che lo trasforma nel cerchio aperto $B : |z| < 1$.

Nei casi in cui tale trasformazione f é prolungabile fin sulla frontiera ∂A si riconosce che il problema di Dirichlet su A é perfettamente equivalente al problema di Dirichlet sul cerchio, e, tenuto conto che sul cerchio c'é la formula di Poisson che lo risolve se ne conclude......