CAPITOLO 15

Funzioni analitiche secondo Weierstrass

La maggior parte dei risultati illustrati in questo capitolo non saranno dimostrati.

1. Introduzione

Consideriamo le due seguenti funzioni:

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \qquad f(z) = \frac{1}{1-z}$$

La prima é definita nel cerchio $B: \ |z| < 1$, la seconda in $\mathcal{C} - \{1\}$.
Domini molto diversi....: eppure le due funzioni sono molto collegate fra loro.
Ad esempio

$$z \in B \quad \to \quad \varphi(z) = f(z)$$

É ovvio che

$\varphi(z)$ é somma di ***una delle serie*** *di Taylor della $f(z)$!*

Sviluppando la $f(z)$ a partire dai punti iniziali

$$z_0 = -\frac{1}{2} \quad \to \quad \frac{2}{3} + \frac{4}{9}\left(\frac{1}{2}+z\right) + \frac{8}{27}\left(\frac{1}{2}+z\right)^2 + \frac{16}{81}\left(\frac{1}{2}+z\right)^3 + ...$$

$$z_0 = \frac{i}{2} \quad \to \quad \frac{4}{5}+\frac{2\,i}{5}+\left(\frac{12}{25}+\frac{16\,i}{25}\right)\left(\frac{-i}{2}+z\right)+\left(\frac{16}{125}+\frac{88\,i}{125}\right)\left(\frac{-i}{2}+z\right)^2-....$$

$$z_0 = -i \quad \to \quad \frac{1}{2} - \frac{i}{2} - \frac{i}{2}\,(i+z) - \left(\frac{1}{4}+\frac{i}{4}\right)(i+z)^2 - \frac{(i+z)^3}{4} + ...$$

si ottengono serie molto diverse, anche per quanto riguarda il raggio R di convergenza:

$$\begin{cases} z_0 = -\dfrac{1}{2} & \to \quad R = \dfrac{3}{2} \\ z_0 = \dfrac{i}{2} & \to \quad R = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \\ z_0 = -i & \to \quad R = \sqrt{2} \end{cases}$$

Osservazione 1.1. *Gli sviluppi in serie precedenti sono stati calcolati da Mathematica: per il primo, ad esempio,*

```
Normal[Series[1/(1 - z), {z, -1/2, 3}]]
```

ma possono essere riconosciuti direttamente con

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-a-(z-a)} = \frac{1}{1-a}\,\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{1-a}} =$$

$$= \frac{1}{1-a}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1-a}\right)^k (z-a)^k \quad \to \quad R = |1-a|$$

Si noti, nell'ultima espressione come il valore complesso a non abbia altra condizione se non quella

$$a \neq 1$$

.
La Figura 1 mostra i diversi cerchi di convergenza delle serie costruite prendendo diversi punti iniziali.

2. Il prolungamento analitico

Per chi conoscesse (o decidesse di accettare) solo serie di potenze, l'affermazione

> *la funzione* $\dfrac{1}{1-z}$ *é ottenuta prolungando la*
>
> $$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$
>
> *oltre il (modesto) cerchio nel quale era definita.*

sarebbe perfettamente corretta.

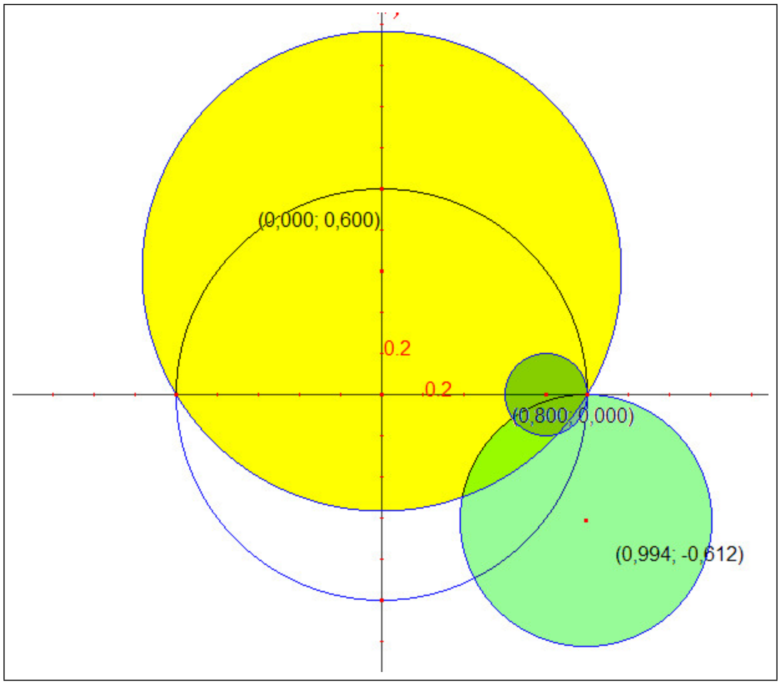

FIGURA 1. I cerchi di convergenza delle serie di $1/(1-z)$

2.1. Le proprietá di base.

La teoria delle funzioni analitiche $w = f(z)$ utilizza alcuni oggetti e/o risultati fondamentali:

- le serie di potenze (i polinomi), come principali $f(z)$ analitiche,
- gli sviluppi di Taylor: ad ogni $f(z)$ associano serie di potenze;
- la distribuzione discreta degli zeri: funzioni analitiche che coincidano in insiemi abbastanza ricchi... coincidono ovunque.

2.2. Gli elementi analitici.

DEFINIZIONE 2.1. *Una serie di potenze f e un suo cerchio di convergenza B costituiscono un elemento analitico*

$$(f, B)$$

elemento detto massimale se il cerchio é l'intero cerchio di convergenza della serie.

ESEMPIO 2.2.

$$\varphi : \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad B : \ |z| < 1 \quad \to \quad (\varphi, B)$$

$$g: \quad \frac{2}{3}+\frac{4}{9}\left(\frac{1}{2}+z\right)+\frac{8}{27}\left(\frac{1}{2}+z\right)^2+\frac{16}{81}\left(\frac{1}{2}+z\right)^3+...,$$
$$G: \quad \left|\frac{1}{2}+z\right|<\frac{3}{2} \quad \to \quad (g,G)$$

Definizione 2.3. *Due elementi analitici* (f_1,B_1) *e* (f_2,B_2) *si dicono contigui, o prolungamento analitico diretto l'uno dell'altro,*

$$(f_1,B_1)\cong(f_2,B_2)$$

se

$$B_1\cap B_2\neq\emptyset, \quad \forall z\in B_1\cap B_2 \quad \to \quad f_1(z)=f_2(z)$$

I due elementi analitici (φ,B) e (g,G) del precedente esempio 2.2 sono contigui.

2.3. La relazione d'equivalenza.

Definizione 2.4. *L'elemento analitico* (b,B) *si dice* ***prolungamento analitico*** *di* (a,A) *se esiste un numero finito* n *di elementi analitici* $(c_k,C_k),\ k=1,..,n$ *tali che*

- $(a,A)=(c_1,C_1)$
- (c_k,C_k) *sia contiguo a* (c_{k+1},C_{k+1}) *per* $k=1,...,n-1$
- (c_n,C_n) *sia contiguo a* (b,B)

Lemma 2.5. *La relazione*

essere contiguo

é una relazione d'equivalenza tra elementi analitici.

In altri termini si tratta di una relazione

- riflessiva (ovvio...)
- simmetrica (ovvio...)
- transitiva.

Osservazione 2.6. *É sempre possibile sostituire un elemento analitico con un altro ad esso contiguo e con il centro in un punto a coordinate razionali.*

2.4. Le funzioni analitiche.

Definizione 2.7. *Una funzione analitica secondo Weierstrass é l'insieme* F *di tutti gli elementi analitici prolungamenti di uno stesso elemento analitico iniziale.*

Definizione 2.8. *Il dominio, o insieme di definizione, di una funzione analitica* F *é l'aperto* Ω *unione dei cerchi degli elementi analitici appartenenti ad* F

Definizione 2.9. *Per ogni $z \in \Omega$ sia F_z l'insieme degli elementi analitici $(f, B) \in F$ tali che $z \in B$ l'insieme*

$$\{f(z)\}$$

dei valori che le serie di potenze degli elementi $(f, b) \in F_z$ producono in z si dice insieme dei valori della funzione analitica F in z

Una funzione analitica secondo Weierstrass pertanto fa corrispondere a z sottinsiemi $\{f(z)\}$ di $\mathcal{C}$, non necessariamente formati da un solo valore.

Definizione 2.10. *F si dice monodroma se $F(z)$ é costituito da un solo elemento, polidroma negli altri casi.*

Le funzioni analitiche secondo Weierstrass sono pertanto in generale funzioni polidrome (o plurivoche).

Osservazione 2.11. *La precedente osservazione 2.6 consente di riconoscere un importante limite superiore alla polidromia di una funzione analitica: l'insieme $F(z)$ é in ogni caso numerabile.*

3. Esempi

3.1. Una funzione intera.

Sia $f(z) = 1 + 2z + 3z^2$: la coppia

$$(1 + 2z + 3z^2, \mathcal{C})$$

una serie di potenze (un polinomio) e un cerchio (tutto il piano complesso) costituisce un elemento analitico.
Elementi ad esso contigui sono, ad esempio,

$$(1 + 2z + 3z^2, |z - 1| < 3), \quad (6 + 8(z - 1) + 3(z - 1)^2, \mathcal{C}), ...$$

3.2. Una funzione razionale.

Sia $f(z) = \dfrac{1}{1 + z^2}$: la coppia

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}, |z| < 1 \right)$$

costituisce un elemento analitico.
Un elemento ad esso contiguo é, ad esempio,

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1 - z}{2} + \frac{(-1 + z)^2}{4} - \frac{(-1 + z)^4}{8} + ..., |z - 1| < \sqrt{2} \right), ...$$

ottenuto dalla serie di Taylor di $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ e punto iniziale $z_0 = 1$. Si noti che il raggio di convergenza é prevedibile: la distanza di $z_0 = 1$ dai due (equidistanti) punti singolari isolati $z_1 = i,\ z_2 = -i$.

3.3. Una radice.

Sia $f(z) = \sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\,\log(z)}$: lo sviluppo di Taylor di punto iniziale $z_0 = 1$ é

$$\left(1 + \frac{-1+z}{2} - \frac{(-1+z)^2}{8} + \frac{(-1+z)^3}{16} - \frac{5\,(-1+z)^4}{128} + ..., |z-1| < 1\right)$$

coppia che offre un elemento analitico.

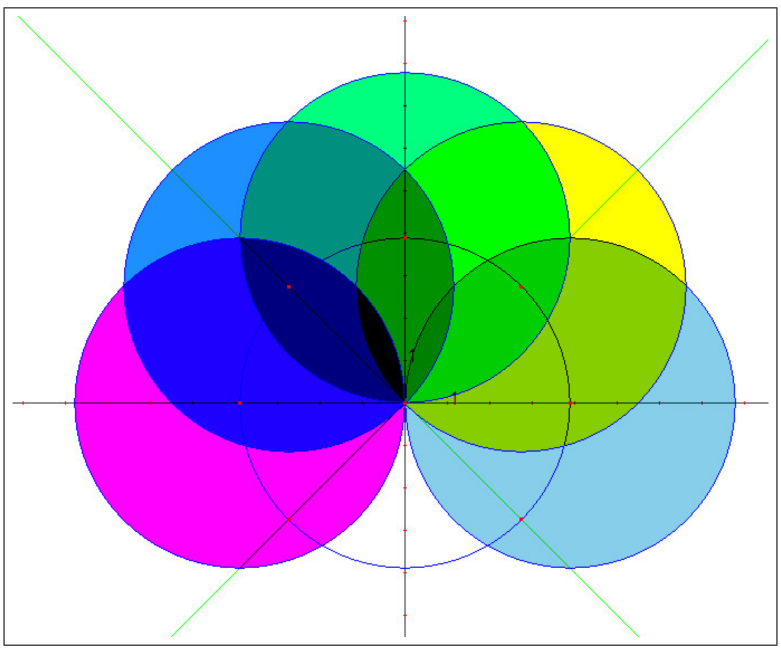

FIGURA 2. $f(z) = \sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\,\log(z)}$

Se ne possono costruire altri riferendosi a punti iniziali z_k presi sulla circonferenza unitaria $|z| = 1$:

- dalla funzione espressa dalla prima serie nel primo cerchio

$$(f_0, |z-1| < 1)$$

- si passa ad una seconda espressione nel secondo cerchio,

$$(f_1, |z-z_1| < 1)$$

- ad una terza nel terzo,

$$(f_2, |z - z_2| < 1)$$

- ecc.

Ciascuna coppia (serie, cerchio) rappresenta un elemento analitico prolungamento diretto del precedente.
Di cerchio in cerchio si finisce per tornare, nel settimo cerchio riferendosi alla Figura 2, a coprire il primo punto iniziale $z_0 = 1$.
La prevedibile sorpresa é quella di ottenere dalla settima serie un valore

$$f_7(1) \neq f_0(1)$$

valore $f_7(1) = -1$ a motivo di quell'$\arg(z)/2$....
In altri termini detta F la funzione analitica determinata dalla prima serie di potenze nel cerchio $|z - 1| < 1$, riesce

$$F(1) = \{1,\ -1\}$$

La sorpresa consiste nel ritrovare quella polidromia delle radici quadrate che perseguita ed angoscia il $99,9\%$ dei cittadini....
....polidromia che trova (troverá) ragionevole sistemazione proprio nella teoria delle funzioni analitiche secondo Weierstrass.

4. Prolungamento lungo un arco

Sia Ω il dominio della funzione analitica secondo Weierstrass F e sia $z = \gamma(t),\ t \in [0, 1]$ un arco di curva regolare da $a = \gamma(0)$ a $b = \gamma(1)$ contenuto in Ω.
Siano (f_0, B_0) e (f_1, B_1) due elementi analitici appartenenti ad F, di centri $a = \gamma(0)$ e $b = \gamma(1)$ si dice che F é prolungabile lungo γ ovvero che (f_0, B_0) é prolungabile lungo γ fino a (f_1, B_1) se ad ogni $t \in [0, 1]$ puó associarsi un elemento analitico (f_t, B_t) tale che

- $$(f_t, B_t) = \begin{cases} (f_0, B_0) & \textit{se} \quad t = 0 \\ (f_1, B_1) & \textit{se} \quad t = 1 \end{cases}$$
- se $t \in [\alpha, \beta] \quad \to \quad \gamma(t) \in B_\alpha$ allora $(f_\beta, B_\beta) \cong (f_\alpha, B_\alpha)$

4.1. Unicitá del prolungamento.

Proposizione 4.1. *Due elementi analitici (f_1, B_1) e (g_1, G_1) ottenuti per prolungamento lungo $z = \gamma(t)$ da uno stesso elemento analitico (f_0, B_0) sono contigui.*

Dimostrazione. Siano (f_t, B_t) gli elementi analitici che prolungano (f_0, B_0) fino a (f_1, B_1) e (g_t, G_t) quelli che prolungano (f_0, B_0) fino a (g_1, G_1).

Per le proprietá del prolungamento riusciranno certamente

$$(f_t, B_t) \cong (g_t, G_t)$$

contigui per $t \approx 0$.
Se $(f_t, B_t) \cong (g_t, G_t)$ per $t \in [0, \beta]$ allora riesce ancora $(f_t, B_t) \cong (g_t, G_t)$ per $t \in [0, \beta + \varepsilon]$
É facile riconoscere quindi che l'insieme Q dei valori t per i quali $(f_t, B_t), \cong (g_t, G_t)$ é aperto e chiuso: quindi dal momento che contiene $t = 0$ é necessariamente tutto $[0, 1]$. □

Teorema 4.2. *I valori della funzione analitica F lungo qualsiasi prolungamento dipendono esclusivamente*

- *dall'elemento analitico iniziale,*
- *dalla curva γ.*

4.2. Il raggio dei cerchi lungo un prolungamento. I raggi $\rho(t)$ dei cerchi di convergenza degli elementi analitici (f_t, B_t) di un prolungamento lungo una curva possono essere

- tutti $\rho(t) = +\infty$
- oppure dipendere da t con continuitá.

É chiaro che se uno di essi ha raggio di convergenza infinito anche tutti gli altri....
Se invece $\rho(t)$ é limitata....

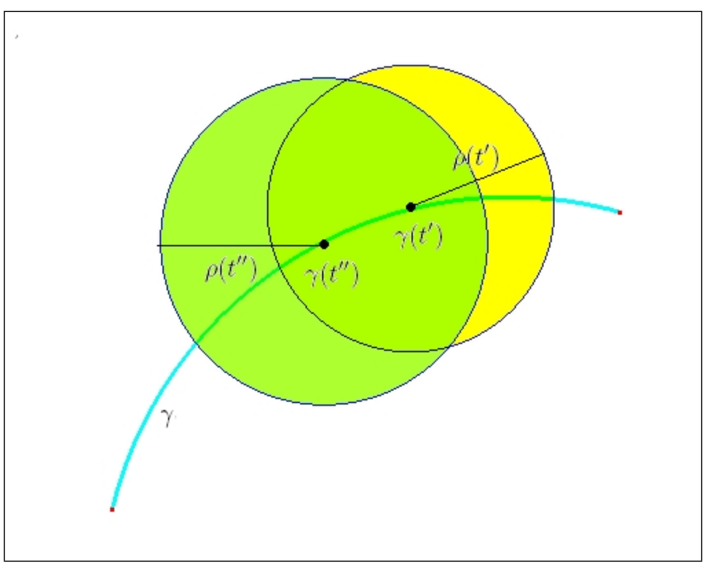

Figura 3. Il confronto tra i raggi di convergenza.

.... sia $\delta > 0$ tale che

$$|t' - t''| < \delta \quad \to \quad \gamma(t') \in B_{t''}$$

allora riesce

$$\begin{cases} \rho(t') \geq \rho(t'') - |\gamma(t') - \gamma(t'')| \\ \rho(t') \leq \rho(t'') + |\gamma(t') - \gamma(t'')| \end{cases} \quad \to \quad |\rho(t') - \rho(t'')| \leq |\gamma(t') - \gamma(t'')|$$

4.3. Unicitá del prolungamento su curve vicine. Siano γ e λ due curve da z_0 a z_1 vicine: allora il prolungamento di un elemento analitico (f, B) di centro z_0 conduce sia lungo una che lungo l'altra ad uno stesso elemento di centro z_1.
Sia

$$\varepsilon(\gamma) = \min \rho(t)$$

essendo $\rho(t)$ i raggi degli elementi analitici prolungamento lungo γ: l'osservata continuitá di $\rho(t)$ implica che tale minimo esiste ed é positivo.
Detta $\zeta = \lambda(t)$ la rappresentazione parametrica della curva λ il concetto di curve vicine corrisponde a

$$|\lambda(t) - \gamma(t)| < \frac{1}{2}\varepsilon(\gamma)$$

Sostanzialmente basta che λ appartenga ad un tubo intorno a γ abbastanza sottile...!

Un cenno di dimostrazione

L'elemento (g_1, G_1) sia prolungamento diretto di (f_0, B_0) lungo λ e (f_1, B_1) sia prolungamento diretto di (f_0, B_0) lungo γ.
Allora

- f_1 e g_1 sono funzioni olomorfe in $G_1 \cap B_1$
- $g_1 = f_0$ in $G_1 \cap B_0$
- $f_1 = f_0$ in $B_1 \cap B_0$

Tenuto conto che

$$\Omega = G_1 \cap B_0 \cap B_1 \neq \emptyset$$

e che $g_1 = f_1$ in Ω ne segue che $f_1 = g_1$ in tutto $G_1 \cap B_1$.
Quindi (g_1, G_1) e (f_1, B_1) sono contigui.

5. Funzioni monodrome o polidrome

DEFINIZIONE 5.1. *Una funzione analitica si dice monodroma nell'aperto A se il prolungamento di un suo qualsiasi elemento (f_0, B_0) lungo una curva chiusa contenuta in A termina in un elemento analitico (f_n, B_n) contiguo a (f_0, B_0).*

Ne segue che se f é monodroma in A allora il suo valore in ogni punto $z \in A$ non dipende dal cammino seguito nel prolungamento da z_0 a z. Le funzioni monodrome sono identificabili con le ordinarie funzioni analitiche.

6. Punti critici

Si parla di punti critici in situazioni di impossibilitá di prolungamento.

DEFINIZIONE 6.1. *Un punto z_1 si dice punto critico per la funzione analitica F definita in Ω se*

- *esistono curve regolari*
$$z = \gamma(t) \subset \Omega \;\; t \in [0,1), \;\; \gamma(0) = z_0, \;\; \gamma(1) = z_1$$
tali che F sia prolungabile lungo $\gamma(t)$, $t \in [0,1)$, cioé lungo ogni sottocurva $z_0\,\zeta$ di γ che termini prima di z_1,
- *riesce*
$$\lim_{t \to !^-} \rho(t) = 0$$

TEOREMA 6.2. *Sia (f, B) un elemento analitico, con B il cerchio di convergenza della serie di potenze f: se $B \neq \mathcal{C}$ allora sulla sua frontiera cade almeno un punto critico della funzione analitica determinata da (f, B).*

DIMOSTRAZIONE. Sia, per semplicitá, $\zeta = R\,e^{i\theta}$ la frontiera di B: se nessuno dei suoi punti fosse critico potremmo prolungare (f, B) lungo ciascun raggio dall'origine al punto $R\,e^{i\theta}$. Si arriverebbe su tale punto con un cerchio di raggio positivo $\rho(\theta)$.
Ma allora, per compattezza, basta un numero finito di tali cerchietti a ricoprire la frontiera: il minimo dei raggi di tali cerchietti é positivo,.... Quindi avremmo trovato che la serie di partenza convergerebbe in un cerchio piú ampio....
.... del suo cerchio di convergenza !

□

ESEMPIO 6.3. *Consideriamo la serie di potenze*
$$f(z) = z + z^2 + z^4 + z^{16} + ... + z^{(2^n)} + ...$$
convergente nel disco $|z| < 1$

Tutti i punti della frontiera sono punti critici: infatti la serie diverge in tutti i punti

$$z_{k,m} = e^{i\frac{2\pi k}{2^m}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

infatti i termini della serie diventano da m in poi tutti uguali ad 1. Tenuto conto che i punti $z_{k,m}$ costituiscono un insieme denso su $|z| = 1$ si riconosce che tutti[1] *i punti di tale circonferenza sono critici.*

[1] Anche quelli diversi dai $z_{k,m}$...