8. Unicitá del prolungamento

Sia γ un arco di curva regolare da z_0 a z_1

$$z = \gamma(t), \;\; t \in [0,1], \quad z_0 = \gamma(0), \quad z_1 = \gamma(1)$$

(f_0, B_0) sia un elemento analitico di centro z_0 e supponiamo che esso sia prolungabile lungo γ

Teorema 8.1. *Siano*

$$(f_1, B_1), \quad (g_1, G_1)$$

due elementi analitici di centro z_1 ottenuti come prolungamento di (f_0, B_0) lungo γ: riesce

$$(f_1, B_1) \cong (g_1, G_1)$$

Dimostrazione.
Siano (f_t, B_t), e (g_t, G_t) gli elementi analitici che realizzano i due prolungamenti.
Indichiamo con $\Omega \subseteq [0,1]$ l'insieme dei t per i quali riesce

$$(f_t, B_t) \cong (g_t, G_t)$$

- $0 \in \Omega \quad \to \quad \Omega \neq \emptyset$
- **Ω é aperto:** sia $t_0 \in \Omega \quad \to \quad f_{t_0}(z) = g_{t_0}(z) \; \forall z \in B_{t_0} \cap G_{t_0}$ esiste inoltre $\delta > 0$ tale che $|t - t_0| < \delta \quad \to \quad \gamma(t) \in B_{t_0} \cap G_{t_0}$ e quindi

$$(f_t, B_t) \cong (f_{t_0}, B_{t_0}), \;\; (g_t, G_t) \cong (g_{t_0}, G_{t_0}) \quad \to$$

$$\to \quad z \approx \gamma(t) \quad \to \quad f_t(z) = g_t(z)$$

- **Ω é chiuso:** siano $t_n \in \Omega, \; t_n \to t_0$ ne segue $\gamma(t_n) \to \gamma(t_0)$ e quindi, da un certo n in poi,

$$\gamma(t_n) \in B_{t_0} \cap G_{t_0} \quad \to \quad \begin{cases} f_{t_n}(z) = f_{t_0}(z) \\ g_{t_n}(z) = g_{t_0}(z) \end{cases}$$

  tenuto conto che

$$t_n \in \Omega \quad \to \quad f_{t_n}(z) = g_{t_n}(z) \quad \forall z \in B_{t_n} \cap G_{t_n}$$

  ne segue anche $f_{t_0}(z) = g_{t_0}(z)$ in un intorno di $\gamma(t_0)$, ovvero $t_0 \in \Omega$.

Ne segue

$$\{\Omega \subseteq [0,1], \quad \Omega \neq \emptyset, \quad \Omega \quad \text{aperto}, \quad \Omega \quad \text{chiuso}\,\} \quad \to \quad \Omega = [0,1]$$

$\square$

Osservazione 8.2. *Sia A l'aperto unione dei cerchi di convergenza B_t degli elementi analitici (f_t, B_t) che realizzano il prolungamento lungo γ, se $z_0 \in A$ allora z_0 appartiene a qualche cerchio B_t, forse a piú d'uno ! Supponiamo*

$$z_0 \in B_{t_1}, \quad z_0 \in B_{t_2}$$

non é detto che riesca

$$f_{t_1}(z_0) = f_{t_2}(z_0)$$

Si pensi, ad esempio al prolungamento di $\log(z)$ lungo una curva γ che parta da 1 ed esegua un certo numero di giri intorno all'origine: il prolungamento di (f_0, B_0) con f_0 la serie di potenze di $\log(z)$ e $B_0 : |z-1| < 1$ conduce ad un elemento analitico finale unico.
Tuttavia i punti z appartenenti all'unione A dei vari cerchi B_t appartengono a piú d'un cerchio B_{t_k} : ciascuno dei corrispondenti valori $f_{t_k}(z)$ é diverso e corrisponde a diverse determinazioni del logaritmo.

8.1. Prolungamento su curve vicine.

Proposizione 8.3. *Siano*

$$z(t) = \gamma(t), \quad z^*(t) = \lambda(t) \quad t \in [0,1]$$

due curve regolari da z_0 a z_1 entrambe.
Esista il prolungamento di (f_0, B_0) lungo γ e sia $\varepsilon > 0$ il minimo

$$\varepsilon = \min_{t\in[0,1]} \rho(t)$$

essendo $\rho(t)$ il raggio dei cerchi B_t relativi agli elementi del prolungamento lungo γ: allora se

$$|\gamma(t) - \lambda(t)| \leq \frac{1}{3}\,\varepsilon$$

l'elemento (f_0, B_0) é prolungabile anche lungo λ e l'elemento cui si perviene é uguale a quello cui si perviene prolungando (f_0, B_0) lungo γ.

Dimostrazione. Definiamo il prolungamento lungo λ al modo seguente: per ogni $t_0 \in [0,1]$ consideriamo il cerchio J_{t_0} di centro $\lambda(t_0)$ e raggio $\varepsilon/3$.
$J_{t_0} \subseteq B_{t_0}$ essendo B_{t_0} il cerchio di centro $\gamma(t_0)$ e raggio $\rho(t_0)$ relativo al prolungamento lungo γ.
Consideriamo gli elementi analitici

$$(f_{t_0}, J_{t_0})$$

costruiti servendosi delle serie di potenze f_{t_0} convergenti in $J_{t_0} \subseteq B_{t_0}$.
La famiglia di elementi analitici

$$(f_{t_0}, J_{t_0}), \quad \forall t_0 \in [0,1]$$

costituisce un prolungamento di (f_0, B_0) lungo λ.
occorre verificare perció che se $\lambda(t) \in J_{t_0}$ $\forall t \in [t_0, t_0 + \delta]$ riesca

$$(f_t, J_t) \cong (f_{t_0}, J_{t_0})$$

ma questo é ovvio perché

$$|\gamma(t) - \gamma(t_0)| \leq |\gamma(t) - \lambda(t)| + |\lambda(t) - \lambda(t_0)| + |\lambda(t_) - \gamma(t_0)| <$$
$$< \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon$$

e quindi

$$(f_t, B_t) \cong (f_{t_0}, B_{t_0})$$

da cui ovviamente

$$(f_t, J_t) \cong (f_{t_0}, J_{t_0})$$

L'elemento cui si perviene a prolungamento lungo λ completato é

$$(f_1, J_1)$$

ovviamente continuo, cioé equivalente a (f_1, B_1)
Infatti □

9. Il teorema di monodromia

Siano

$$z(t) = \gamma(t), \quad z^*(t) = \lambda(t) \quad t \in [0, 1]$$

due curve regolari contenute in Ω, da z_0 a z_1 entrambe.

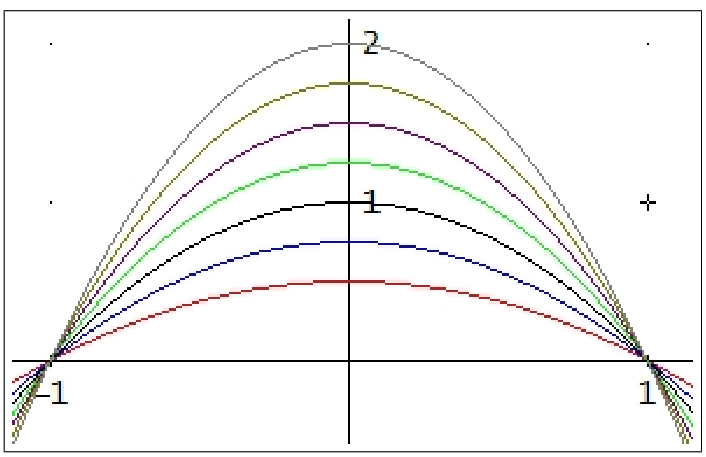

FIGURA 1. Curve omotopiche in $z \neq 0$

Esse si dicono omotopiche tra loro nell'aperto Ω se esiste un'applicazione $z(t, \tau)$ del quadrato chiuso $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ in Ω tale che

- sia continua in Q,

- $z(0,\tau) = z_0, \quad z(1,\tau) = z_1 \quad \forall \tau \in [0,1]$
- $z(t,0) = \gamma(t), \quad z(t,1) = \lambda(t)$

Esempio 9.1. *Le curve* $\gamma: \quad x = t,\, y = \dfrac{1}{2}(1-t^2)$ *e* $\lambda: \quad X0t,\, y = \dfrac{5}{2}(1-t^2)$*, vedi Figura 1, sono omotopiche nell'aperto* $z \neq 0$
L'applicazione $z(t,\tau)$ *in questo caso é*

$$z(t,\tau)u(t,\tau) + iv(t,tau) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} u(t,\tau) = t \\ v(t,\tau) = \dfrac{1}{2}(1+2\tau)(1-t^2) \end{cases}$$

Teorema 9.2. *Se* Ω *é semplicemente connesso allora curve regolari aventi gli stessi estremi sono sempre omotopiche.*

9.1. Il Teorema di monodromia.

Teorema 9.3. *Sia* F *analitica secondo Weierstrass, sia* Ω *il suo dominio: se*

- Ω *é semplicemente connesso,*
- F *non ha punti critici,*

allora é monodroma.

Osservazione 9.4. *La condizione é naturalmente sufficiente ma é molto lontana dall'essere necessaria: tutte le funzioni razionali, ad esempio, hanno dominio non semplicemente connesso, hanno punti critici e, tuttavia, sono monodrome.*

Dimostrazione. Sia $z(t,\tau)$ la funzione che esprime l'omotopia tra le due curve da z_0 a z_1: indichiamo con γ_τ le curve parametrizzate da $z(t,\tau)$ per ogni $\tau \in [0,1]$.
L'ipotesi che F sia priva di punti critici assicura che é possibile eseguire il prolungamento di un qualsiasi elemento analitico $(f_0, B_0) \in F$ lungo γ_τ.
La possibilitá del prolungamento lungo ogni γ_τ equivale a riconoscere che una corrispondenza

$$(t,\tau) \quad \rightarrow \quad (f_{t,\tau}, B_{t,\tau})$$

Proviamo che

$$\varepsilon = \inf_{(t,\tau)\in Q} \rho(t,\tau) \quad > \quad 0$$

avendo indicato al solito con $\rho(t,\tau)$ il raggio del cerchio $B_{t,\tau}$.
Se per assurdo fosse $\varepsilon = 0$ allora esisterebbe una successione (t_n, τ_n) tale che

$$\lim_{n\to\infty} \rho(t_n,\tau_n) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau^*$$

Consideriamo la curve intermedia

$$\gamma_{\tau^*} : \; z(t, \tau^*)$$

su di essa é, come sulle altre possibile il prolungamento: indichiamo con

$$\varepsilon_{\tau^*} = \inf_{t \in [0,1]} \rho(t, \tau^*), \quad \varepsilon_{\tau^*} > 0$$

il minimo dei raggi dei cerchi B_{t,τ^*} relativi a tale prolungamento.
Per l'uniforme continuitá della funzione $z(t, \tau)$ del resto riesce, da un certo n in poi

$$|z(t, \tau_n) - z(t, \tau^*)| < \frac{1}{3}\varepsilon_{\tau^*}$$

quindi, per la Proposizione 8.3, su tali curve γ_{τ_n} esistono prolungamenti on cerchi di raggi almeno $\frac{1}{3}\varepsilon_{\tau^*}$.
Affermazione che nega l'ipotesi accolta per assurdo che riesca

$$\lim_{n \to \infty} \rho(t_n, \tau_n) = 0$$

Riconosciuto pertanto che $\varepsilon > 0$ si passa dal prolungamento lungo la

$$\gamma_0 : z(t, 0)$$

ai prolungamenti lungo curve

$$z(t, \tau_1), \quad z(t, \tau_2), ...$$

ciascuna vicina alla precedente nel senso della Proposizione 8.3.
Si riconosce quindi che il prolungamento da un punto z_0 ad un altro z_1 é unico, qualunque sia la curva che si segua. □

La monodromia deriva quindi dal seguente semplice ragionamento:

- assegnato un punto $z_0 \in \Omega$ esso apparterrá al cerchio di convergenza di un elemento analitico $(f_1, B_1) \in F$: $f_1(z_0)$ sará uno dei valori di F,
- gli altri (eventuali) valori derivano dagli altri elementi analitici

  $$f_2, B_2), (f_3, B_3), ... \in F$$

  tali che $z_0 \in B_k k = 2, 3, ...$
- ma $(f_k, B_k) \in F$ sono W-equivalenti a (f_1, B_1), quindi sono ottenuti da esso per prolungamento
- il teorema di monodromia dice che il risultato del prolungamento non dipende dalla curva: ma allora

  $$(f_k, B_k) \cong (f_1, B_1), \quad k = 2, 3, ...$$

- $f_k(z_0) = f_1(z_0)$ ovvero $F8z_0)$ é costituito da un solo valore.

9.2. Le funzioni monodrome. Sono le ordinarie funzioni analitiche o funzioni olomorfe.
Tenuto conto del teorema di monodromia si puó del resto parlare di

rami olomorfi

o determinazioni olomorfe, di funzioni analitiche polidrome tutte le volte che ci si restringe ad un aperto semplicemente connesso.
Non esiste una funzione olomorfa *logaritmo* in $z \neq 0$ ma esistono *logaritmi olomorfi* in ogni aperto semplicemente connesso.

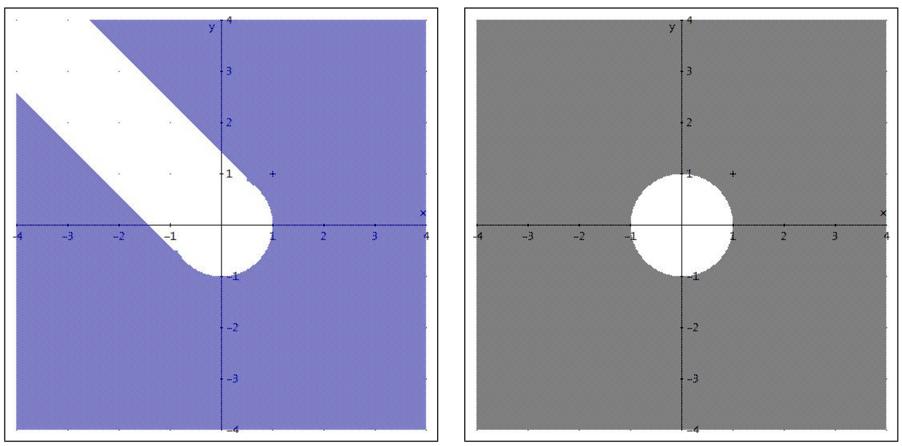

FIGURA 2. Regioni di olomorfia per il logaritmo: sí a sinistra, no a destra.

Non esiste una funzione olomorfa

$$\arcsin(z) = i \log(iz + \sqrt{1 - z^2})$$

definita in tutto il piano ma esistono rami olomorfi in ogni aperto semplicemente connesso che non contenga né $z = 1$ né $z = -1$, punti critici di $\arcsin(z)$.