CAPITOLO 15

Equazioni differenziali lineari

1. Il problema

Assegnata l'equazione differenziale lineare

$$a_0(z)w^{[n]} + a_1(z)w^{[n-1]} + ... + a_n(z)w = b(z)$$

dove le funzioni $a_0(z), ..., \ a_n(z), \ b(z)$

- sono analitiche in tutto il piano[1]
- non contemporaneamente nulle in alcun punto[2],

una soluzione é una funzione analitica secondo Weierstrass F tale che per ogni $(f, B) \in F$ riesca

$$a_0(z)f^{[n]} + a_1(z)f^{[n-1]} + ... + a_n(z)f = b(z), \quad \forall z \in B$$

Nel caso $b(z) = 0$ si parla di un'equazione omogenea.

1.1. Forma normale. Se $a_0(z_0) \neq 0$ il punto z_0 si dice *punto ordinario* per l'equazione differenziale: in un intorno di un punto ordinario z_0 si puó dividere per $a_0(z)$ e ridursi ad un'equazione *di forma normale*

$$w^{[n]} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k(z)}{a_0(z)} w^{[n-k]} + \frac{b(z)}{a_0(z)}$$

2. L'approccio con i metodi reali

Supponiamo, per semplicitá $n = 1$ e scriviamo l'equazione differenziale

$$(1) \qquad w' = p\,w + f \quad \to \quad u' + iv' = (\alpha + i\beta)(u + iv) + (\varphi + i\psi)$$

avendo evidenziato parti reali e parti immaginarie.
Affinché $u + iv$ sia analitica occorre e basta che soddisfi le relazioni di Cauchy Riemann

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

[1]La maggior parte di quanto segue puó adattarsi anche a coefficienti analitici in un aperto Ω

[2]Se accadesse basterebbe semplificare il fattore comune $(z - z_0)$

analoghe relazioni soddisfano, essendo per ipotesi analitici sia p che f, cioé supponiamo che

$$\begin{array}{ll} \alpha_x = \beta_y, & \alpha_y = -\beta_x \\ \varphi_x = \psi_y, & \varphi_y = -\psi_x \end{array}$$

Tenuto presente che per le funzioni analitiche

$$w' = u' + iv' = u_x + iv_x$$

l'equazione (1) diventa

$$\begin{array}{l} u_x + iv_x = \{\alpha u - \beta v + \varphi\} + i\{\alpha v + \beta u + \psi\} \\ v_y = u_x \\ u_y = -v_x \end{array}$$

ovvero il sistema reale di primo ordine

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = \alpha u - \beta v + \varphi \\ v_x = \alpha v + \beta u + \psi \\ u_y = -\alpha v - \beta u - \psi \\ v_y = \alpha u - \beta v + \varphi \end{array} \right. \tag{2}$$

Separatamente per i due sistemi

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = \alpha u - \beta v + \varphi \\ v_x = \alpha v + \beta u + \psi \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_y = -\alpha v - \beta u - \psi \\ v_y = \alpha u - \beta v + \varphi \end{array} \right.$$

esistono soluzioni locali per il classico teorema d'esistenza e unicitá delle soluzioni del problema di Cauchy per le equazioni differenziali di forma normale: non é ovvio che esistano soluzioni per il sistema (2). La non ovvietá consiste nel convivere delle due coppie di equazioni

$$u_x = \alpha u - \beta v + \varphi, \quad u_y = -\alpha v - \beta u - \psi$$

$$v_x = \alpha v + \beta u + \psi, \quad v_y = \alpha u - \beta v + \varphi$$

per le quali servono le note condizioni di compatibilitá

$$\frac{\partial}{\partial y}\{\alpha u - \beta v + \varphi\} = \frac{\partial}{\partial x}\{-\alpha v - \beta u - \psi\}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\{\alpha v + \beta u + \psi\} = \frac{\partial}{\partial x}\{\alpha u - \beta v + \varphi\}$$

Le difficoltá osservate contribuiscono a far apprezzare un teorema d'esistenza di soluzioni (analitiche) della (1) ottenuto in modo semplice servendosi direttamente di serie di potenze.

3. Il caso di primo ordine

$$w' = w \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$$

Cerchiamo la soluzione nella forma di una serie di potenze

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} w_k z^k$$

Si sostituisce e si impone l'uguaglianza

$$w_1 + 2w_2 z + 3w_3 z^2 + .. = (w_0 + w_1\, z + ...)(p_0 + p_1 z + ...) + f_0 + f_1 z + ...$$

Ne segue

$$\begin{array}{l} w_1 = w_0 p_0 + f_0 \\ 2w_2 = w_1 p_0 + w_0 p_1 + f_1 \\ 3w_3 = w_2 p_0 + w_1 p_1 + w_0 p_2 + f_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n w_n = w_{n-1} p_0 + ... + w_0 p_{n-1} + f_{n-1} \end{array}$$

Gli incogniti coefficienti w_k sono determinabili con un grado di libertá: il primo w_0 é libero !
Cosa che corrisponde alla naturale attesa di poter soddisfare problemi

$$\begin{cases} w' = w \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \\ w(0) = K \end{cases}$$

di Cauchy diversi.
Resta da provare che la serie di potenze determinata dai coefficienti w_k calcolati

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k z^k$$

converga in un cerchio effettivo, cioé per $|z| < r$ con $r > 0$.
Supponiamo che le serie dei due coefficienti

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$$

convergano per $|z| \leq r$ allora

$$|p_k z^k| + |f_k z^k| < M \quad \to \quad |p_k| < M r^{-k}, \quad |f_k| < M r^{-k}$$

Supponiamo che riesca

$$|w_k| < M r^{-k}, \quad k = 0, 1, ..., n-1$$

e deduciamone, per induzione che in conseguenza della

$$n w_n = w_{n-1} p_0 + ... + w_0 p_{n-1} + f_{n-1}$$

riesce anche

$$|w_n| < M r^{-n}$$

Infatti

$$\begin{aligned} n|w_n| &\leq |w_{n-1}||p_0| + ... + |w_0||p_{n-1}| + |f_{n-1}| \quad \to \\ \to \quad &\leq nM^2 r^{-n+1} + M r^{-n+1} \leq [(M+1)r]\ M\, r^{-n} \end{aligned}$$

Basta quindi scegliere r tanto piccolo che

$$(M+1)r \leq 1$$

per ottenere la disuguaglianza $|w_n| < M r^{-n}$ e, quindi, per induzione

$$|w_n| < M r^{-n}, \quad \forall n$$

Maggiorazione che implica per la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty} |w_k|\,|z^k| \leq M\, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z^k|}{r^k}$$

da cui la convergenza assoluta della serie nel cerchio

$$|z| < r$$

e quindi la convergenza in un cerchio di raggio positivo.

3.1. La formula integrale. La notevole somiglianza formale tra

- calcolo differenziale in una variabile reale
- e calcolo differenziale in una variabile complessa

si ritrova nella determinazione delle soluzioni (analitiche) dell'equazione lineare di primo ordine

$$w' = p\,w + f$$

Si tratta prima il caso omogeneo

$$w' = p\,w$$

Detta $P(z)$ una primitiva di $p(z)$ la funzione

$$w_0(z) = e^{P(z)}$$

soddisfa l'equazione omogenea: soluzioni dell'equazione completa si trovano nella forma (usuale)

$$w(z) = u(z).w_0(z) \quad \to \quad u'w_0 + uw_0 = puw_0 + f \quad \to \quad u'w_0 = f$$

da cui basta scegliere u una primitiva di f/w_0.
Ne segue per il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} w' = p\,w + f \\ w(0) = w_0 \end{cases} \qquad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad w(z) = \left\{ w_0 + \int_0^z f(\zeta)\, e^{-\int_0^\zeta p(s)ds} d\zeta \right\} e^{\int_0^z p(s)ds}$$

La formula risolutiva é identica a quella ben nota del caso reale: le integrazioni che vi figurano sono fatte lungo curve qualsiasi da 0 a z, naturalmente interne al disco in cui i due coefficienti p ed f sono analitici.

4. Il caso di secondo ordine omogeneo

TEOREMA 4.1. *Se z_0 é un punto ordinario per l'equazione*

$$a_0(z)w'' + a_1(z)w' + a_2(z)w = 0 \tag{3}$$

allora per ogni b_0 e b_1 esiste ed é unico un elemento analitico (f, B) che soddisfa l'equazione per $z \in B$ e tale che $f(z_0) = b_0,\ \ f'(z_0) = b_1$.

In altri termini:

Se z_0 é un punto ordinario per l'equazione (3) allora esiste $\rho > 0$ tale che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} a_0(z)w'' + a_1(z)w' + a_2(z)w = 0 \\ w(z_0) = b_0 \\ w'(z_0) = b_1 \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione $w(z)$ analitica per $|z - z_0| < \rho$

DIMOSTRAZIONE. Diviso membro a membro per $a_0(z)$, tenuto conto della condizione $a_0(z_0) \neq 0$ la (3) si riduce a

$$w'' = p(z)w' + q(z)w$$

con $p(z)$ e $q(z)$ analitiche in un intorno di z_0, valore che supponiamo essere l'origine stessa

$$\begin{aligned} p(z) &= p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + ... \\ q(z) &= q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + ... \end{aligned}$$

Supponiamo che entrambe le serie convergano in un cerchio chiuso di raggio r e quindi che riesca

$$\begin{aligned} |p_k r^k| \leq M \quad &\rightarrow \quad |p_k| \leq M r^{-k}, \\ |q_k r^k| \leq M \quad &\rightarrow \quad |q_k| \leq M r^{-k} \end{aligned}$$

La costruzione dell'elemento analitico (f, B) si fa formalmente al modo seguente

$$f(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + ...$$

Le condizioni sui coefficienti incogniti:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) b_n z^{n-2} = \sum_{h=0}^{\infty} p_h z^h \sum_{n=0}^{\infty} n\, b_n z^{n-1} + \sum_{h=0}^{\infty} q_h z^h \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

ovvero

$$2b_2 + 3.2.b_3 z + 4.3.b_4 z^2 + ... =$$
$$= (b_1 + 2b_2 z + 3b_3 z^2 + ..)\,(p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + ...) +$$
$$+\ (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + ...)\,(q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + ...)$$

Uguagliando i termini corrispondenti a primo e a secondo membro si ottiene

n	equazione in b_n	
2	$2b_2$	$= p_0 b_1 + q_0 b_0$
3	$3\,.\,2b_3$	$= p_0 2b_2 + p_1 b_1 + q_0 b_1 + q_1 b_0$
4	$4\,.\,3\,b_4$	$= p_0 3b_3 + p_1 2b_2 + p_2 b_1 + q_0 b_2 + q_1 b_1 + q_2 b_0$
..	...	....
n	$n(n-1)\,b_n$	$= p_0(n-1)b_{n-1} + ... + p_{n-2}b_1 + q_0 b_{n-2} + ... + q_{n-2}b_0$

I primi due coefficienti $b_0,\ b_1$ sono liberi (corrispondono ai gradi di libertá del problema di Cauchy per un'equazione del secondo ordine): gli altri si ricavano dal precedente sistema
Resta da verificare che la serie di potenze determinata da tali coefficienti sia convergente in un cerchio di raggio ρ positivo.
La convergenza si ottiene non appena si riconosca che

$$|b_k| \leq M r^{-k}$$

per M e r positivi opportuni, naturalmente non dipendenti da k.

$\boxed{\text{Dimostrazione per induzione}}$

Supponiamo che M ed r siano tali che la disuguaglianza

$$|b_k| \leq M r^{-k}$$

sia soddisfatta per $k = 0, 1, 2, ...n-1$ e vediamo di provarla per il posto n.
Dall'equazione che determina b_n sfruttando a secondo membro le disuguaglianze

$$|p_k| \leq M r^{-k}, \quad |q_k| \leq M r^{-k}, \quad |b_k| \leq M r^{-k}, \quad k = 0, 1, ...n-1$$

si ottiene

$$n(n-1)|b_n| \leq M^2 r^{-(n-1)}((n-1)+...+1)+(n-1)M^2 r^{-(n-2)}$$

Ne segue

$$n(n-1)|b_n| \leq M\left(r\frac{n(n-1)}{2}+(n-1)r^2\right)\frac{M}{r^n}$$

da cui

$$|b_n| \leq M\left(\frac{r}{2}+\frac{r^2}{n}\right)\frac{M}{r^n}$$

La maggiorazione

$$|b_k| \leq M r^{-k}$$

valida per $k = 0, 1, ..., n-1$ continua a valere anche per $k = n$, cioé per b_n, se

$$M\left(\frac{r}{2}+\frac{r^2}{n}\right) \leq 1$$

Cosa certamente vera per r abbastanza piccolo...! □

5. Esempi

5.1. Esercizio. Determinare le serie di potenze che rappresentano soluzioni dell'equazione differenziale (oscillatore armonico)

$$w'' + \omega^2 w = 0$$

essendo ω un parametro reale assegnato.

5.2. Esercizio. Determinare le serie di potenze che rappresentano soluzioni dell'equazione differenziale

$$w'' + z\,w = 0$$