1. Punti singolari

Sia z_0 un punto singolare, $a_0(z_0) = 0$, allora ridotta l'equazione differenziale (lineare del secondo ordine) per $z \neq z_0$ alla forma

$$a_0(z)w'' + a_1(z)w' + a_2(z)w = 0 \quad \rightarrow \quad w'' = p(z)w' + q(z)w$$

si incontrano coefficienti $p(z)$ e/o $q(z)$ che hanno in z_0 una singolaritá di tipo polare.
Se z_0 é uno **zero semplice** per $a_0(z)$ allora $p(z)$ e/o $q(z)$ avranno in z_0 un polo di primo ordine

$$p(z) = \frac{p_{-1}}{z} + p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + ...$$

$$q(z) = \frac{q_{-1}}{z} + q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + ...$$

Imponendo a

$$w(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$$

di soddisfare l'equazione si ha

$$2b_2+6b_3z+12b_4z^2+... = (\frac{p_{-1}}{z}+p_0+p_1z+p_2z^2+....)(b_1+2b_2z+3b_2z^2+..)+$$

$$+(\frac{q_{-1}}{z} + q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + ...)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + ...)$$

La prima condizione, annullare il coefficiente di z^{-1}, conduce alla condizione,

$$0 = p_{-1}b_1 + q_{-1}b_0$$

che giá riduce (prevedibilmente) la libertá di scelta dei due primi coefficienti b_0 e b_1.
La seconda condizione, uguagliare i termini costanti, conduce a

$$2b_2 = 2b_2 p_{-1} + b_1 p_0 + b_1 q_{-1} + b_0 q_0$$

ovvero portando b_2 a primo membro,

$$2b_2(1 - p_{-1}) = b_1 p_0 + b_1 q_{-1} + b_0 q_0$$

presenta l'ulteriore sorpresa circa la possibile non risolvibilitá - se fosse $1 - p_{-1} = 0$.

2. Le equazioni di tipo Fuchs

Numerose equazioni lineari del secondo ordine... storiche, rientrano nello schema seguente:

- punto singolare $z_0 = 0$
- $w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$
- coefficiente $p(z)$ con, al piú, polo di primo ordine in $z = 0$,
- coefficiente $q(z)$ con, al piú, polo di secondo ordine in $z = 0$

Le equazioni che hanno tali requisiti si dicono

equazioni di tipo Fuchs

L'espressione piú comoda per un'equazione di tipo Fuchs é la seguente

$$z^2w'' + P(z)zw' + Q(z)w = 0 \tag{1}$$

avendo posto

$$P(z) = z\,p(z) = p_0 + p_1z + ..., \quad |p_k| \leq \frac{M}{r^k}$$

$$Q(z) = z^2q(z) = q_0 + q_1z + ... \quad |q_k| \leq \frac{M}{r^k}$$

essendo $r > 0$ il raggio di un cerchio $|z| \leq r$ nel quale le due serie convergono.

Soluzioni di tali equazioni si possono trovare, per $0 < |z| < \rho$, nella forma

$$w(z) = z^\lambda \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k\right) = z^\lambda u(z)$$

nella quale il fattore z^λ recepisce la singolaritá che l'equazione incontra per $z = 0$.

Tenuto conto che

$$w(z) = z^\lambda u(z) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} w' = \lambda z^{\lambda-1}u + z^\lambda u' \\ w'' = \lambda(\lambda-1)z^{\lambda-2}u + 2\lambda z^{\lambda-1}u' + z^\lambda u'' \end{cases}$$

riesce quindi

$$\begin{cases} zw' = \lambda z^\lambda u + z^\lambda zu' \\ z^2w'' = \lambda(\lambda-1)z^\lambda u + 2\lambda z^\lambda zu' + z^\lambda z^2u'' \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale (1) si ha pertanto, semplificando il fattore z^λ

$$\lambda(\lambda-1)u + 2\lambda zu' + z^2u'' + P(z)(\lambda u + zu') + Q(z)u = 0$$

equazione quest'ultima che coinvolge solo serie di potenze.

Annullando il termine costante si ottiene

$$\lambda^2 + (p_0 - 1)\lambda + q_0 = 0$$

equazione in λ detta *equazione indiciale.*
Indicato con
$$f(x) = x^2 + (p_0 - 1)x + q_0$$
l'annullamento dei coefficienti delle varie potenze z^n produce, per ogni n le seguenti relazioni

$$f(\lambda + n)\, b_n + \sum_{k=1}^{n-1} [(\lambda + k)p_{n-k} + q_{n-k}]\, b_k + \lambda p_n + q_n = 0$$

Si riconoscono alcuni problemi:

- l'equazione indiciale, di secondo grado in λ fa pensare a due soluzioni,
- tenuto conto dei coefficienti $f(\lambda + n)$ dei vari b_n non é detto che il sistema sia risolvibile...
- potrebbe esserlo per entrambe le radici λ della prima equazione o solo per una (o peggio...)
- occore comunque verificare che i coefficienti b_n trovati in corrispondenza ad uno o a due λ diano luogo a una serie con raggio di convergenza positivo !

Si noti che, dette
$$\lambda_1, \quad \lambda_2$$
le soluzioni della prima equazione, e detta λ_1 quella di parte reale maggiore, é ovvio che i coefficienti
$$f(\lambda_1 + 1),\ f(\lambda_1 + 2),\ f(\lambda_1 + 3), ...$$
saranno tutti diversi da zero: quindi, almeno per una delle due radici il sistema che determina i b_n é compatibile.
Tenuto conto inoltre del tipo di espressione f si riconosce anche che, definitivamente, si ha
$$|f(\lambda_1 + k)| \geq L\, k^2$$
Ammesso che riesca
$$|b_k| \leq \frac{M}{r^k}, \quad k = 0, 1, 2, ..n - 1$$
dobbiamo, per riconoscere che tale maggiorazione sia rispettata per ogni indice riconoscere che la disuguaglianza si conserva anche per $k = n$ (dimostrazione per induzione).
Si ha

$$|b_n| \leq \frac{\sum_{k=1}^{n-1} |(\lambda + k)p_{n-k} + q_{n-k}|\, |b_k| + |\lambda p_n + q_n|}{L\, n^2} \leq$$

$$\leq \frac{\left[(n-1)(|\lambda|+1)+\frac{n(n-1)}{2}\right] M^2 r^{-n+1}+(|\lambda|+1) M r^{-n}}{L\, n^2}$$

da cui

$$|b_n| \leq \left\{ \frac{\left[(n-1)(|\lambda|+1)+\frac{n(n-1)}{2}\right] M r+(|\lambda|+1)}{L\, n^2} \right\} \frac{M}{r^n}$$

La tesi induttiva circa le maggiorazioni per i coefficienti b_n é conseguita non appena

$$\left\{ \frac{\left[(n-1)(|\lambda|+1)+\frac{n(n-1)}{2}\right] M r+(|\lambda|+1)}{L\, n^2} \right\} \leq 1$$

cosa certamente vera almeno per r sufficientemente piccolo...!

OSSERVAZIONE:

Se l'equazione indiciale

$$f(\lambda) = \lambda^2 + (p_0 - 1)\lambda + q_0 = 0$$

ammette due radici distinte $\lambda_1, \quad \lambda_2$ e se per entrambe riesce

$$f(\lambda_k + n) \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

il procedimento descritto produce due soluzioni definite (non necessariamente monodrome) in un intorno incompleto dell'origine

$$0 < |z| < r.$$

OSSERVAZIONE 2.1. *Alcune equazioni di tipo Fuchs storiche sono illustrate con semplicitá agli indirizzi*

`http://it.wikipedia.org/wiki/Polinomi_di_Legendre`
`http://it.wikipedia.org/wiki/Funzioni_di_Bessel`

3. Le equazioni differenziali di Bessel

Si dicono equazioni di Bessel le seguenti equazioni di tipo Fuchs

$$z^2w'' + zw' + (z^2 - \alpha^2)w = 0$$

L'applicazione seguente é tratta da un argomento tradizionalmente proposto nei corsi di Analisi a fisica.

La trattazione offerta é piú elementare di quella generale precedente: il coefficiente α incontrato é un intero.

Le configurazioni di vibrazione di una membrana circolare di raggio 1 fissata al bordo, si pensi ad un tamburo, raggiunte in seguito a vibrazioni conducono [1] all'equazione differenziale di Laplace

$$\triangle\, v(x,y) = -\lambda v(x,y), \quad v(x,y) = 0 \quad se \quad x^2 + y^2 = 1 \tag{2}$$

intendendo con $v(x,y)$ la quota raggiunta dalla membrana in corrispondenza al punto (x,y)e con $\triangle\, v(x,y) = v_{xx}(x,y) + v_{yy}(x,y)$.
Espressa $v(x,y)$ in coordinate polari, l'equazione di Laplace diventa

$$v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\vartheta\vartheta} = -\lambda v$$

Se cerchiamo la v nella forma

$$v(r,\vartheta) = f(r).g(\vartheta)$$

si arriva alla formula

$$f''.g + \frac{1}{r}f'.g + \frac{1}{r^2}f.g'' = -\lambda f.g$$

ovvero

$$\left(f'' + \frac{1}{r}f' + \lambda f\right) g = -\frac{1}{r^2}f.g''$$

ovvero ancora

$$r^2\frac{\left(f'' + \frac{1}{r}f' + \lambda f\right)}{f} = -\frac{g''}{g}$$

Tenuto conto che il primo membro dipende da r e il secondo da ϑ la loro uguaglianza implica che siano entrambi uguali alla stessa costante. Le uniche funzioni periodiche di periodo 2π che rendano costante il quoziente a secondo membro sono $\sin(n\vartheta)$ e $\cos(n\vartheta)$ con n intero.

[1]

R.COURANT, D.HILBERT *Methods of mathematical Phisics,*
Vol. I, Cap. V §5 The vibrating Membrane

Quindi il quoziente a secondo membro vale n^2.
Ci sono funzioni $f(r)$ che verifichino l'equazione

$$f'' + \frac{1}{r}f' + \lambda f = \frac{n^2}{r^2}f$$

ovvero

$$f'' + \frac{1}{r}f' + (\lambda - n^2\frac{1}{r^2})f = 0 \quad ? \tag{3}$$

L'equazione puó essere riscritta, cambiando variabile $\rho = r\sqrt{\lambda}$ e avendo tenuto conto che

$$\frac{d}{dr} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{d}{d\rho},$$

nella forma

$$y_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}y_\rho + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right)y = 0$$

ovvero

$$\rho^2\, y_{\rho\rho} + \rho\, y_\rho + \left(\rho^2 - n^2\right)y = 0 \tag{4}$$

detta equazione di Bessel.
Proviamo a risolvere l'equazione (4) con una serie di potenze che cominci con la potenza $n-$esima

$$y(\rho) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k\, \rho^k$$

sostituendo formalmente si ha

$$\sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)a_k\rho^k + \sum_{k=n}^{\infty} ka_k\rho^k + \sum_{k=n}^{\infty} a_k\rho^{k+2} - n^2\sum_{k=n}^{\infty} a_k\rho^k = 0$$

Raccogliendo i coefficienti delle stesse potenze di ρ si ottiene:

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left\{(k^2 - n^2)a_k\rho^k + a_k\rho^{k+2}\right\} = 0$$

ecc.
Risulta abbastanza evidente il legame tra i coefficienti a_k con indice della stessa paritá:

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k^2 - n^2}$$

$$\begin{array}{ll} a_n & = 1 \\ a_{n+1} & = 0 \quad \text{essendo} \quad a_{n-1} = 0 \\ a_{n+2} & -\frac{1}{2(2n+2)} \\ a_{n+3} & = 0 \\ a_{n+4} & \frac{1}{2(2n+2)4(2n+4)} \\ a_{n+5} & = 0 \\ a_{n+6} & -\frac{1}{2(2n+2)4(2n+4)6(2n+6)} \end{array}$$

La serie di potenze che sta nascendo é pertanto, la seguente

$$\rho^n - \frac{1}{2(2n+2)}\rho^{n+2} + \frac{1}{2(2n+2)4(2n+4)}\rho^{n+4}$$
$$-\frac{1}{2(2n+2)4(2n+4)6(2n+6)}\rho^{n+6} + ...$$

ovvero

$$\rho^n \left\{ 1 - \frac{1}{2(2n+2)}\rho^2 + \frac{1}{2(2n+2)4(2n+4)}\rho^4 + ... \right\}$$

tutti termini della stessa paritá di n
Per accettare tale serie formale come una funzione $J_n(\rho)$ legittima occorre decidere se converge ovvero per quali ρ sia convergente.
Una semplicissima applicazione del criterio del rapporto conduce a

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{\frac{\rho^{2k}}{2^2 4^2 ...(2k)^2}}{\frac{\rho^{2k-2}}{2^2 4^2 ...(2k-2)^2}} = \frac{\rho^2}{(2k)^2} \to 0, \quad \forall \rho$$

Quindi le funzioni $J_n(\rho)$ sono funzioni C^∞ definite per ogni ρ
Nel caso $n = 0$ l'espressione (formale) é

$$J_0(\rho) = 1 - \frac{1}{2^2}\rho^2 + \frac{1}{2^2 4^2}\rho^4 + ...$$

Le soluzioni della equazione (3) sono pertanto

$$f(r) = J_n(\sqrt{\lambda}r)$$

Per quali λ riesca $f(1) = 0$ conduce a determinare i λ per i quali riesca

$$J_n(\sqrt{\lambda}) = 0$$

Conclusione: se $J_n(k_n) = 0$ allora le funzioni

$$y_{n,k_n}(r, \vartheta) = J_n(k_n r) \left[A. \cos(n\vartheta) + B \sin(n\vartheta)\right]$$

verificano l'equazione

$$\triangle v = -k_n^2 v$$

3.1. Un po' di disegni. Scegliamo $n = 0$, $n = 1$ i grafici di $J_0(\rho)$ e di $J_1(\rho)$ sono riportat1 in Figura 1.

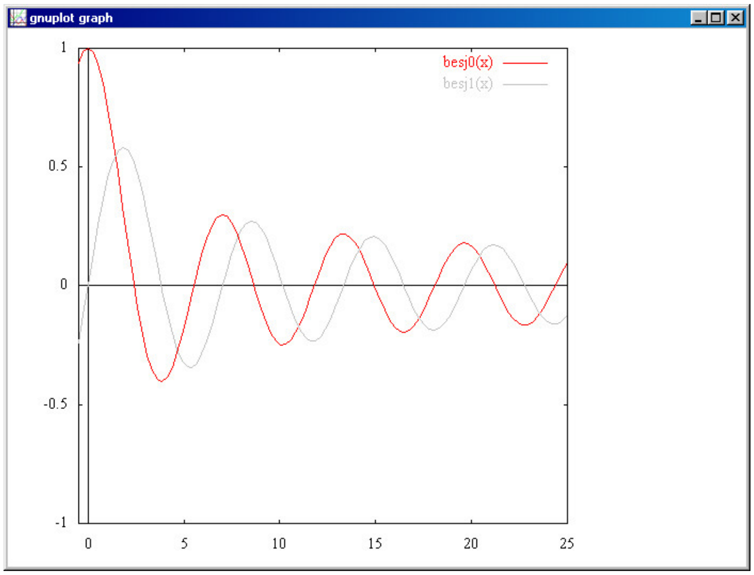

FIGURA 1. $J_0(\rho)$, $J_1(\rho)$

I primi 3 zeri della funzione $J_0(\rho)$ sono, calcolati da *Mathematica*,

$$\{2.40483,\ 5.52008,\ 8.65373\},$$

quindi le funzioni

$$J_0(2.40483\rho), \quad J_0(5.52008\rho), \quad J_0(8.65373\rho)$$

soddisfano l'equazione (2).
I loro grafici sono riportati nelle figure 2 e 3

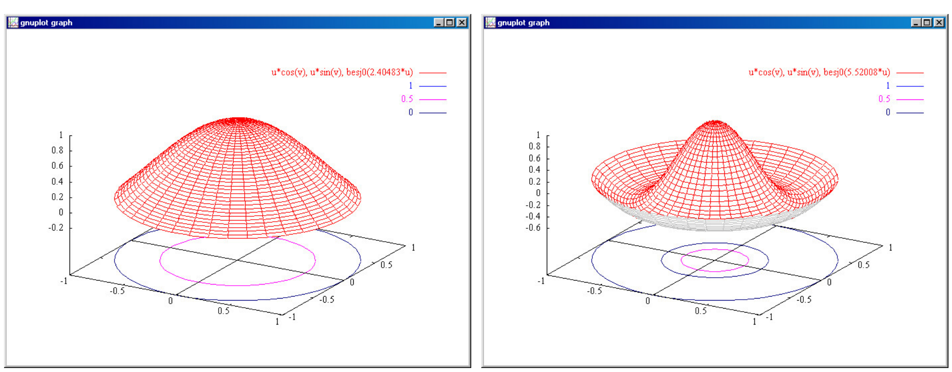

FIGURA 2. $J_0(2.40483\rho)$, $J_0(5.52008\rho)$

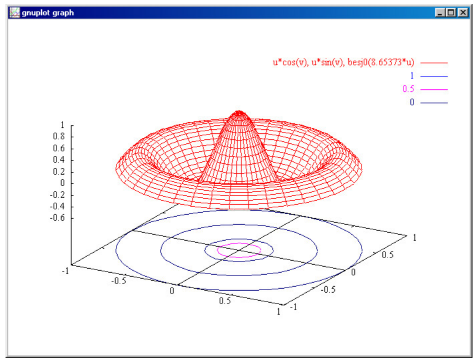

Figura 3. $J_0(8.65373\rho)$

I primi tre zeri della funzione $J_1(\rho)$ sono

$$3.83171, \quad 7.01559, \quad 10.1735$$

quindi le funzioni

$$\begin{array}{c} J_1(3.83171\rho)\cos(\theta) \\ J_1(7.01559\rho)\cos(\theta) \\ J_1(10.1735\rho)\cos(\theta) \end{array}$$

soddisfano l'equazione (2).
I grafici sono riportati nelle figure (4) e 5), Altre 3 funzioni si ottengono naturalmente moltiplicando per $\sin(\theta)$.

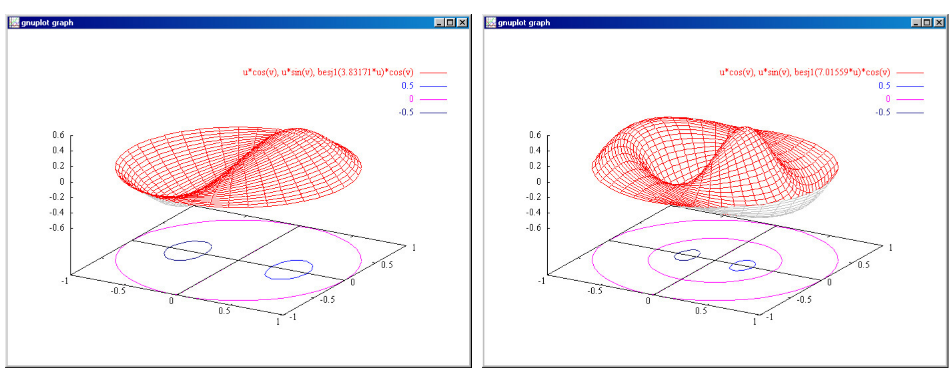

Figura 4. Le configurazioni del tamburo: $J_1(3.83171\rho)\cos(\theta), \quad J_1(7.01559\rho)\cos(\theta)$

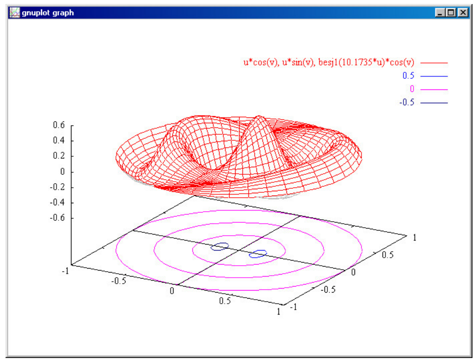

FIGURA 5. Altre configurazioni del tamburo: $J_1(10.1735\rho)\cos(\theta)$