DINAMICA DI POPOLAZIONI

A.S. 2007/2008

Liceo scientifico

“G. Marconi”

Quest'anno ci occuperemo della parte teorica vista con un esempio pratico l'anno scorso.

Supponiamo di avere una popolazione di 3 fasce, con una relativa matrice 3x3:

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix}$$

In cui sono noti soltanto i coefficienti di fertilità e le probabilità di passare alla fascia successiva.

In una determinata popolazione $\underset{\varphi}{\rightarrow}$ al crescere del tempo qualunque sia il vettore iniziale tende a diventare parallelo all'autovettore della matrice.

È proprio questa una caratteristica della matrice di Leslie che analizziamo nel problema:

Quindi $\underset{\varphi}{\rightarrow}_{(t+1)}$ è parallelo a $\underset{\varphi}{\rightarrow}_{(t)}$ SE E SOLO SE

$$\underset{\varphi}{\rightarrow}_{(t+1)} = \lambda \underset{\varphi}{\rightarrow}_{(t)}$$

Dove λ è l'autovalore della matrice A e

$$\underset{\varphi}{\rightarrow}_{(t+1)} = A \underset{\varphi}{\rightarrow}_{(t)}$$

$$A \underset{\varphi}{\rightarrow}_{(t)} = \lambda \underset{\varphi}{\rightarrow}_{(t+1)}$$

Ovvero

$$(A - \lambda I) \underset{\varphi}{\rightarrow} = 0$$

Il che equivale a dire che il polinomio caratteristico generato dal calcolo del determinante deve essere uguale a zero.

Procediamo al calcolo dell'autovettore.

Scriviamo in forma esplicita la relazione

$$(A - \lambda I) \underset{\varphi}{\rightarrow} = 0$$

Ovvero

$$A \underset{\varphi}{\rightarrow} = \lambda \underset{\varphi}{\rightarrow}$$

Trovati gli auto valori della matrice, nel caso di Leslie uno sarà sempre positivo.

Svolgendo i calcoli quindi avremo che, posto:

$$\underset{\varphi}{\rightarrow} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha \\ \lambda\beta \\ \lambda\gamma \end{pmatrix}$$

Ovvero il sistema omogeneo a 3 equazioni:

$$\begin{cases} f_1\alpha + f_2\beta + f_3\gamma = \lambda\alpha \\ p_1\alpha = \lambda\beta \\ p_2\beta = \lambda\gamma \end{cases}$$

Dove le nostre incognite saranno proprio le componenti di $\underset{\varphi}{\rightarrow}$

Per comodità ricavo β (seconda componente di $\underset{\varphi}{\rightarrow}$) dalla seconda equazione del sistema:

$$\beta = \frac{p_1\alpha}{\lambda}$$

e γ (terza componente di $\underset{\varphi}{\rightarrow}$) dalla terza equazione del sistema:

$$\gamma = \frac{p_2\beta}{\lambda}$$

dove β lo conosciamo e per sostituzione:

$$\gamma = \frac{p_1 p_2 \alpha}{\lambda^2}$$

Trattandosi di un sistema omogeneo ogni incognita dipende dalle altre non appena ne fissiamo una a nostra scelta.

Per comodità fissiamo α, e scegliamo come suo valore 1, in questo modo l'autovettore è dato da:

$$\underset{\varphi}{\rightarrow} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \dfrac{p_1 \alpha}{\lambda} \\ \dfrac{p_2 p_2 \alpha}{\lambda^2} \end{pmatrix}$$

Posto $\alpha = 1$:

$$\underset{\varphi}{\rightarrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{p_1}{\lambda} \\ \dfrac{p_2 p_2}{\lambda^2} \end{pmatrix}$$

La periodicità.

La nostra popolazione evolve nel tempo. Ora capiamo bene in che modo.

Torniamo ad un esempio di popolazione a 3 fasce:

$$\underset{\varphi}{\rightarrow} = \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{matrix} \qquad\qquad A = \begin{matrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{matrix}$$

dove $\underset{\varphi}{\rightarrow}$ è la popolazione iniziale e A la sua matrice di Leslie allegata.

Il numero di individui al tempo $(t+1)$,si è detto l'anno scorso, che è dato dal sistema:

$$\begin{cases} \alpha_{(t+1)} = \alpha_{(t)} f_1 + \beta_{(t)} f_2 + \gamma_{(t)} f_3 \\ \beta_{(t+1)} = p_1 \alpha_{(t)} \\ \gamma_{(t+1)} = p_2 \beta_{(t)} \end{cases}$$

Ma altro non è che:

$$\underset{\rightarrow}{\varphi}_{(t+1)} = A \ \underset{\rightarrow}{\varphi}_{(t)}$$

Per conoscere l'evoluzione al tempo $(t+2)$ devo moltiplicare il vettore $\underset{\varphi}{\rightarrow}_{(t+1)}$ di nuovo alla matrice A:

$$\underset{\rightarrow}{\varphi}_{(t+2)} = A \ \underset{\rightarrow}{\varphi}_{(t+1)}$$

Ma io so che $\underset{\varphi}{\rightarrow}_{(t+1)} = A \ \underset{\varphi}{\rightarrow}_{(t)}$ e per sostituzione:

$$\underset{\rightarrow}{\varphi}_{(t+2)} = A^2 \ \underset{\rightarrow}{\varphi}_{(t)}$$

In sostanza l'evoluzione nel tempo di una popolazione equivale a:

$$\underset{\rightarrow}{\varphi}_{(n)} = A^n \ \underset{\rightarrow}{\varphi}_{(0)}$$

Sempre nel contesto della periodicità collochiamo il discorso sulle equazioni alle differenze.

Nel caso di una popolazione a 3 fasce:

$$\begin{cases} \alpha_{(t+1)} = \alpha_{(t)} f_1 + \beta_{(t)} f_2 + \gamma_{(t)} f_3 \\ \beta_{(t+1)} = p_1 \alpha_{(t)} \\ \gamma_{(t+1)} = p_2 \beta_{(t)} \end{cases}$$

Possiamo scrivere il sistema in forma lineare, attraverso alcuni passaggi:

$$\begin{cases} \alpha_{(t+1)} = \alpha_{(t)} f_1 + \beta_{(t)} f_2 + \gamma_{(t)} f_3 \\ \beta_{(t)} = p_1 \alpha_{(t-1)} \\ \gamma_{(t)} = p_2 \beta_{(t-1)} \end{cases}$$

L'ultima equazione si può scrivere anche come:

$$\gamma_{(t)} = p_2 p_1 \alpha_{(t-2)}$$

Poiché:

$$\beta_{(t-1)} = p_1 \alpha_{(t-2)}$$

Sostituendo nella prima ottengo l'equazione alle differenze finita:

$$\alpha_{(t+1)} = \alpha_{(t)} f_1 + p_1 \alpha_{(t-1)} + p_1 \alpha_{(t-2)}$$

La quale consente di determinare i valori $\alpha_{(t)}$ appena siano noti i primi 3.

$\alpha_{(t)}$ rappresenta una funzione, ma quale soddisfa la relazione posta? Procedendo per tentativi troviamo che la funzione cercata è del tipo:

$$\alpha_{(t)} = \lambda^t$$

Ovvero l'esponenziale. In questo modo possiamo trovare la base che soddisfa la nostra equazione alle differenze:

$$\lambda^{t+1} = f_1\lambda^t + f_2p_2\lambda^{t-1} + f_3p_1p_2\lambda^{t-2}$$

Dividendo per il fattore comune λ^t ottengo il polinomio

$$\lambda^3 = f_1\lambda^2 + f_2p_1\lambda + f_3p_1p_2$$

ovvero lo stesso che trovo nel calcolo dell'autovalore della matrice.

Entrambe infatti sono processi iterativi che lavorano su successioni le quali unità appartengono al caso particolare dei numeri naturali.

Inoltre il sistema utilizzato per ricavare l'equazione può essere scritto anche come:

$$\underset{\rightarrow}{\varphi}_{(t+1)} = A\,\underset{\rightarrow}{\varphi}_{(t)}$$

L'incremento della successione procede per unità naturali, perciò possiamo ritenere il caso di Leslie un caso particolare delle equazioni differenziali.

Come abbiamo già detto in precedenza, l'equazione alle differenze consente di determinare i valori di $\alpha_{(t)}$ appena siano noti i primi 3, ora presi 3 coefficienti c_1, c_2, c_3 a scelta varrà sempre la combinazione lineare:

$$\alpha_{(t)} = c_1{\lambda_1}^t + c_2{\lambda_2}^t + c_3{\lambda_3}^t$$

Dove $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono le basi trovate con il polinomio

$$\lambda^3 = f_1\lambda^2 + f_2p_1\lambda + f_3p_1p_2$$

$$\begin{cases} \alpha_{(1)} = c_1 + c_2 + c_3 \\ \alpha_{(2)} = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + c_3\lambda_3 \\ \alpha_{(3)} = c_1{\lambda_1}^2 + c_2{\lambda_2}^2 + c_3{\lambda_3}^2 \\ \alpha_{(4)} = c_1{\lambda_1}^3 + c_2{\lambda_2}^3 + c_3{\lambda_3}^3 \end{cases}$$