Progetto Lauree Scientifiche

Licei Marconi, Meucci, Labriola

ZAGAROLO, ROMA, APRILIA

2007-2008

Dinamica di popolazioni

AUTOVALORI E AUTOVETTORI

Un modello a tre etá

Una prima generalizzazione: da due sole fasce di etá a tre

$$\overrightarrow{n}(t) = \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \end{pmatrix}$$

La matrice di Leslie che determina l'evoluzione é di ordine 3

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} n_1(t+1) = f_1 n_1(t) + f_2 n_2(t) + f_3 n_3(t) \\ n_2(t+1) = p_1 n_1(t) \\ n_3(t+1) = p_2 n_2(t) \end{cases}$$

ovvero, posto

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{n}(t) = \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n}(t+1) = A\,\overrightarrow{n}(t)$$

Le distribuzioni di etá d'equilibrio.

$$\overrightarrow{n}(t+1) = A\,\overrightarrow{n}(t)$$

Dalla teoria dei sistemi lineari si riconosce che gli unici numeri λ per cui puó succedere che

$$A\,\overrightarrow{v} \quad // \quad \overrightarrow{v} \quad \Leftrightarrow \quad A\,\overrightarrow{v} = \lambda\,\overrightarrow{v}$$

sono quelli che verificano l'equazione:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

In due dimensioni:

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ p_1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1-\lambda & f_2 \\ p_1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = -(f_1-\lambda)\lambda - f_2 p_1$$

$$\lambda^2 - f_1\lambda - f_2 p_1 = 0$$

$$q(\lambda) = \frac{f_1}{\lambda} + \frac{f_2\, p_1}{\lambda^2} \quad \rightarrow \quad q(\lambda) = 1$$

$$\begin{cases} f_1 x_1 + f_2 x_2 & = \lambda x_1 \\ p_1 x_1 & = \lambda x_2 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{f_1}{\lambda} x_1 + f_2 \dfrac{p_1}{\lambda^2} x_1 & = x_1 \\ x_2 & = \dfrac{p_1}{\lambda} x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q(\lambda) x_1 & = x_1 \\ x_2 & = \dfrac{p_1}{\lambda} x_1 \end{cases} \quad \longrightarrow \quad x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{p_1}{\lambda}$$

Autovalori per tre etá:

Si puó calcolare esattamente il polinomio caratteristico associato alla matrice di Leslie 3×3

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 \left\{ 1 - \frac{f_1}{\lambda} - \frac{f_2\, p_1}{\lambda^2} - \frac{f_3\, p_1\, p_2}{\lambda^3} \right\}$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{f_1}{\lambda} + \frac{f_2\, p_1}{\lambda^2} + \frac{f_3\, p_1\, p_2}{\lambda^3} = 1$$

Posto

$$q(\lambda) = \frac{f_1}{\lambda} + \frac{f_2\, p_1}{\lambda^2} + \frac{f_3\, p_1\, p_2}{\lambda^3}$$

si riconosce che

$$\det(\lambda\, I - A) = 0 \Leftrightarrow q(\lambda) = 1$$

Tenuto presente che al variare di $\lambda \in (0, +\infty)$ $q(\lambda)$ decresce da $+\infty$ a 0, si riconosce che prende il valore 1 una e una sola volta.

Ovvero che ogni matrice di Leslie 3×3 possiede uno ed un solo autovalore positivo.

Autovettori

$$A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 & = \lambda x_1 \\ p_1x_1 & = \lambda x_2 \\ p_2x_2 & = \lambda x_3 \end{cases}$$

Deve riuscire $x_1 \neq 0$ e quindi un autovettore é

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \frac{p_1}{\lambda} \\ \\ \frac{p_2 p_1}{\lambda^2} \end{pmatrix}$$

Risultati:

Le radici λ delle equazioni precedenti si chiamano autovalori della matrice A.

- Nel caso delle matrici di Leslie c'é sempre un autovalore positivo λ maggiore in modulo di tutti gli altri,
- In corrispondenza ad esso c'é sempre un autovettore

$$A\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}$$

  a componenti positive.
- I vettori $\overrightarrow{n}(t)$
  - tendono a divenire paralleli a $\overrightarrow{v}$ al crescere di t
  - essi hanno modulo che aumenta (o diminuisce) come λ^t

Il caso[1] di matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & f \\ p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix}$$

$$q(\lambda) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f\,p\,q}{\lambda^3} = 1$$

$$\lambda = \sqrt[3]{f\,p\,q}$$

$$f\,p\,q > 1 \quad \Uparrow$$

$$f\,p\,q < 1 \quad \Downarrow$$

[1] Fertilitá solo nell'ultima etá: molti insetti (farfalle,...)

La periodicitá:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & f \\ p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & f\,q & 0 \\ 0 & 0 & f\,p \\ p\,q & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} f\,p\,q & 0 & 0 \\ 0 & f\,p\,q & 0 \\ 0 & 0 & f\,p\,q \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & f^2\,p\,q \\ f\,p^2\,q & 0 & 0 \\ 0 & f\,p\,q^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f\,p\,q = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A^3 = Id$$

Il caso (analogo) di 4 etá:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & f \\ p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & f\,r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f\,p \\ p\,q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q\,r & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & f\,q\,r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f\,p\,r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f\,p\,q \\ p\,q\,r & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix}$$

$$s = f\,p\,q\,r$$

Un esempio numerico-naturalistico:
immaginiamo una popolazione di insetti per la quale

- supponiamo che vivano 4 anni, un anno per ogni fascia d'etá,
- supponiamo che la fertilitá spetti solo all'ultima fascia di etá,
- supponiamo che $f\,p\,q\,r = 1$
- supponiamo che gli individui delle prime tre etá siano poco visibili (ad esempio facciano vita di larve sottoterra...)

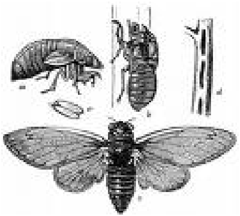

Figura: Lo sviluppo delle cicale

Sia ad esempio

$$f = 1000, \quad p = q = r = \frac{1}{10}$$

Supponiamo che la popolazione iniziale sia

$$\{100, 100, 100, 100\}$$

Le popolazioni negli anni successivi saranno:

$$\begin{array}{llllll} 1 & (100000, & 10, & 10, & 10 &) \\ 2 & (10000, & 10000, & 1, & 1 &) \\ 3 & (1000, & 1000, & 1000, & 0.1 &) \\ 4 & (100, & 100, & 100, & 100 &) \end{array}$$

...dopo 4 anni si vedono ricomparire le farfalle....