Progetto Lauree Scientifiche

Licei Labriola, Marconi, Meucci

ROMA, ZAGAROLO, APRILIA

2007-2008

Dinamica di popolazioni

LABORATORIO 1

Due sole etá

Consideriamo una popolazione ripartita in due soli classi di etá

$$\{n_1(t),\, n_2(t)\}$$

giovani e adulti, maturi e immaturi,
Supponiamo l'unitá di tempo pari alla durata di ciascuna classe di etá:

- vive 2, (ad esempio giorni)
- il primo giorno appartiene alla prima fascia di etá (infanzia...),
- il secondo alla seconda (maturitá...),
- quindi muore.

É fertile, cioé é in grado di rirodursi, in entrambe le fasce di etá, con coefficienti di fertilitá

$$f_1, \quad f_2$$

diversi.

$p_1 \in (0, 1)$ é la probabilitá che un individuo della prima classe di etá sopravviva e raggiunga la seconda.

Il modello

$$\begin{cases} n_1(t+1) = f_1\, n_1(t) + f_2\, n_2(t) \\ n_2(t+1) = p_1\, n_1(t) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ p_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \end{pmatrix}$$

Definizione

La tabella 2×2

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ p_1 & 0 \end{pmatrix}$$

si chiama matrice di Leslie del modello di popolazione a due fasce di etá.

Esempi:

$$\begin{pmatrix} n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ p_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} n_1(0) = 10 \\ n_2(0) = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} n_1(1) = 10\, f_1 \\ n_2(1) = 10\, p_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_1(0) = 0 \\ n_2(0) = 10 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} n_1(1) = 10\, f_2 \\ n_2(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_1(0) = 5 \\ n_2(0) = 5 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} n_1(1) = 5\, f_1 + 5\, f_2 \\ n_2(1) = 5\, p_1 \end{cases}$$

Una lettura alternativa:

$$\begin{cases} n_1(t+1) = f_1\, n_1(t) + f_2\, n_2(t) \\ n_2(t+1) = p_1\, n_1(t) \end{cases}$$

$$n_2(t+1) = p_1\, n_1(t) \quad \to \quad n_2(t) = p_1\, n_1(t-1)$$

$$n_1(t+1) = f_1\, n_1(t) + f_2\, p_1\, n_1(t-1)$$

moltiplicando membro a membro per p_1 si ha

$$p_1\, n_1(t+1) = f_1\, p_1\, n_1(t) + f_2\, p_1\, p_1\, n_1(t-1)$$

ovvero $$n_2(t+2) = f_1\, n_2(t+1) + f_2\, p_1\, n_2(t)$$

Una lettura alternativa: ricorsiva...

$$\begin{cases} n_1(t+1) = f_1\, n_1(t) + f_2\, p_1\, n_1(t-1) \\ n_2(t+1) = f_1\, n_2(t) + f_2\, p_1\, n_2(t-1) \end{cases}$$

Assegnati $n_1(0)$ e $n_1(1)$ sono determinati tutti gli $n_1(t)$ successivi...
Analoga osservazione per $n_2(t)$.

Osservazione

Il caso

$$f_1 = 1, \qquad f_2\, p_1 = 1$$

si incontra nelle successioni di Fibonacci...

Coefficienti possibili

- discussione sui valori ragionevolmente attribuibili ai parametri f_1, f_2, p_1 (positivitá, appartenenza a $(0, 1)$ o meno, ecc.)
- Proposte di situazioni $\{n_1(0), n_2(0)\}$ iniziali e determinazione delle numerositá seguenti.
- Esplorazione di possibili *similitudini*, proporzionalitá, tra le coppie $\{n_1(0), n_2(0)\}$ iniziali e le coppie $\{n_1(t), n_2(t)\}$ seguenti.

Le coppie $\{n_1(t),\, n_2(t)\}$ si rappresentano facilmente come vettori del piano, vettori applicati nell'origine.

Come sono diretti ?

Restano paralleli tra loro ?

Come cambiano di direzioni in relazione al tempo e alle condizioni $\{n_1(0),\, n_2(0)\}$ iniziali ?

Come evolve la popolazione totale $n(t) = n_1(t) + n_2(t)$

Come evolvono le percentuali

$$\eta(t) = \frac{n_1(t)}{n_1(t) + n_2(t)}, \quad \nu(t) = \frac{n_2(t)}{n_1(t) + n_2(t)} \quad ?$$

Il parallelismo

$$\overrightarrow{n}(t+1) = A\overrightarrow{n}(t)$$

quindi

$$\overrightarrow{n}(t+1) \; // \; \overrightarrow{n}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{n}(t+1) = \lambda\,\overrightarrow{n}(t)$$

ovvero

$$A\overrightarrow{n}(t) = \lambda\,\overrightarrow{n}(t)$$

ovvero ancora

$$(A - \lambda\, I)\overrightarrow{n}(t) = 0 \Rightarrow \det(A - \lambda\, I) = 0$$

Gli autovalori

$$\det(A - \lambda\, I) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} f_1 - \lambda & f_2 \\ p_1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

che da luogo all'equazione di secondo grado in λ

$$\lambda^2 - f_1\, \lambda - f_2\, p_1 = 0$$

detta equazione caratteristica di A

Le radici λ di questa equazione si chiamano autovalori della matrice A.

Un esempio:

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

ha equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 4\,\lambda - 5 = 0$$

ed ha pertanto autovalori

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = -1$$

Gli autovettori:

Per ciascuno dei due numeri $\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = -1$ si trovano vettori che verificano la relazione

$$A\,\overrightarrow{v} = 5\,\overrightarrow{v} \quad A\overrightarrow{w} = -1\,\overrightarrow{w}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una sorpresa:

- Assegnata una matrice di Leslie determinate il suo autovalore maggiore,
- cercate l'autovettore $\overrightarrow{w}$ corrispondente a tale autovalore,
- i vettori $\overrightarrow{n}(t) = \{n_1(t), n_2(t)\}$ al crescere di t tendono a divenire[1] paralleli a $\overrightarrow{w}$

[1] Indipendentemente da come siano al tempo iniziale !