Progetto Lauree Scientifiche

Licei Marconi, Meucci, Labriola
ZAGAROLO, ROMA, APRILIA
2007-2008

Dinamica di popolazioni

LABORATORIO 2

Un modello a tre etá

Una prima generalizzazione: da due sole fasce di etá a tre

$$\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \end{pmatrix}$$

La matrice di Leslie che determina l'evoluzione é di ordine 3

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} n_1(t+1) = f_1 n_1(t) + f_2 n_2(t) + f_3 n_3(t) \\ n_2(t+1) = p_1 n_1(t) \\ n_3(t+1) = p_2 n_2(t) \end{cases}$$

ovvero, posto

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{n}(t) = \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n}(t+1) = A\,\overrightarrow{n}(t)$$

Esempio 1: Salmoni

Tre fasce di etá:

- n_1 : neonati *(uova appena fecondate)*
- n_2 : giovani *(i piccoli, sterili)*
- n_3 : adulti *(i pesci in grado di riprodursi)*

Coefficienti(realistici):

- lo 0.5% dei neonati sopravvive (sono cibo di altri pesci)
- il 10% dei giovani raggiunge l'etá adulta,
- solo gli adulti sono fertili e depongono circa 2000 uova ciscuno.

La corrispondente matrice di Leslie:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2000 \\ 0.005 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esplorazioni interessanti si hanno riferendosi alle condizioni iniziali:

$$\overrightarrow{n}(0) = \{1000,\ 1000,\ 1000\}$$

$$\overrightarrow{n}(0) = \{1,\ 0.005,\ 0.0005\}$$

$$\overrightarrow{n}(0) = \{1,\ 2,\ 3\}$$

Esempio 2 (solo teorico):

Una semplificazione della matrice: $f_1 = f_2 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} n_1(t+1) & = 12\, n_3(t) \\ n_2(t+1) & = \frac{1}{3}\, n_1(t) \\ n_3(t+1) & = \frac{1}{4}\, n_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} n_1(0) = & 12 \\ n_2(0) = & 4 \\ n_3(0) = & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} n_1(1) = & 12 \\ n_2(1) = & 4 \\ n_3(1) = & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusioni:

Con questi coefficienti di fertilitá e di sopravvivenza la distribuzione d'etá

$$\overrightarrow{n}(0) = \{12, \quad 4, \quad 1\}$$

risulta d'equilibrio, cioé non varia nel tempo.

Altri equilibri ?

Se in luogo della distribuzione

$$\overrightarrow{n}(0) = \{12, \quad 4, \quad 1\}$$

partissimo da

$$\overrightarrow{n}(0) = \{120, \quad 40, \quad 10\}$$

cosa succederebbe ?

... e se partissimo da

$$\overrightarrow{n}(0) = \{300, \quad 100, \quad 25\} \quad ?$$

o addirittura da

$$\overrightarrow{n}(0) = \{12\,\lambda, \quad 4\,\lambda, \quad \lambda\}, \quad \lambda \geq 0 \quad ?$$

Altri equilibri ?

Se in luogo della distribuzione

$$\overrightarrow{n}(0) = \{12, \quad 4, \quad 1\}$$

partissimo da

$$\overrightarrow{n}(0) = \{120, \quad 40, \quad 10\}$$

cosa succederebbe ?

... e se partissimo da

$$\overrightarrow{n}(0) = \{300, \quad 100, \quad 25\} \quad ?$$

o addirittura da

$$\overrightarrow{n}(0) = \{12\,\lambda, \quad 4\,\lambda, \quad \lambda\}, \quad \lambda \geq 0 \quad ?$$

Un problema:

...e se invece di

$$\overrightarrow{n}(0) = \{12, \quad 4, \quad 1\}$$

prendessimo

$$\overrightarrow{n}(0) = \{11, \quad 4, \quad 1\}$$

oppure

$$\overrightarrow{n}(0) = \{12, \quad 5, \quad 1\}$$

ecc.

cosa succederebbe ?

Stabilitá degli equilibri.

Un problema:

...e se invece di

$$\overrightarrow{n}(0) = \{12, \quad 4, \quad 1\}$$

prendessimo

$$\overrightarrow{n}(0) = \{11, \quad 4, \quad 1\}$$

oppure

$$\overrightarrow{n}(0) = \{12, \quad 5, \quad 1\}$$

ecc.

cosa succederebbe ?

STABILITÁ DEGLI EQUILIBRI.

Una sorpresa:

$$\begin{pmatrix} n_1(0) = & 1 \\ n_2(0) = & 4 \\ n_3(0) = & 10 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} n_1(1) = & 120 \\ n_2(1) = & \frac{1}{3} \\ n_3(1) = & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} n_1(2) = & 12 \\ n_2(2) = & 40 \\ n_3(2) = & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} n_1(3) = & 1 \\ n_2(3) = & 4 \\ n_3(3) = & 10 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{n}(3) = \overrightarrow{n}(0)$$

....periodicitá !

Una sorpresa ancora maggiore...

Chiamiamo x, y, z le numerositá iniziali e calcoliamo, in modo letterale le numerositá nei tempi successivi con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} n_1(0) = & x \\ n_2(0) = & y \\ n_3(0) = & z \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} n_1(1) = & 12\,z \\ n_2(1) = & x/3 \\ n_3(1) = & y/4 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} n_1(2) = & 3y \\ n_2(2) = & 4z \\ n_3(2) = & x/12 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} n_1(3) = & x \\ n_2(3) = & y \\ n_3(3) = & z \end{pmatrix}$$

....periodicitá !

Riassumendo:

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

induce evoluzioni del profilo d'etá periodiche di periodo 3 ...o minore !

Periodi minori vuol dire

- periodo 1
- periodo 2

Ma *é facile riconoscere* che non ci possono essere periodi 2: quindi o si resta in equilibrio su profili

$$e = \{12\lambda,\, 4\lambda,\, \lambda\} \quad \lambda \geq 0$$

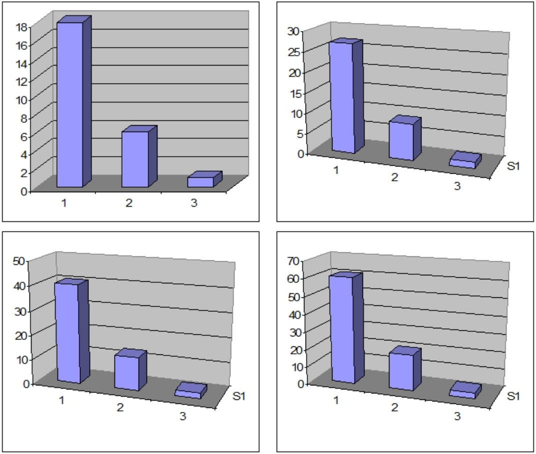
o si torna nel profilo iniziale ogni 3 anni.

Esempio 3:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ .5 & 0 & 0 \\ 0 & .25 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} n_1(t+1) & = 4\, n_2(t) + 3\, n_3(t) \\ n_2(t+1) & = 0.5\, n_1(t) \\ n_3(t+1) & = 0.25\, n_2(t) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} n_1(0) = & 10 \\ n_2(0) = & 10 \\ n_3(0) = & 10 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} n_1(1) = & 70 \\ n_2(1) = & 5 \\ n_3(1) = & 2.5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}(0) = \{18,\ 6,\ 1\} \qquad \vec{n}(1) = \{27,\ 9,\ 1.5\}$$
$$\vec{n}(2) = \{40.5, 13.5, 2.25\} \qquad \vec{n}(3) = \{60.75, 20.25, 3.375\}$$



Infatti...

la somiglianza dei quattro istogrammi corrisponde al fatto che

$$A.\{18,\,6,\,1\} = \frac{3}{2}\{18,\,6,\,1\}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{n}(1) &= \frac{3}{2}\,\overrightarrow{n}(0) \\
\overrightarrow{n}(2) &= \frac{3}{2}\,\overrightarrow{n}(1) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \overrightarrow{n}(0) \\
\overrightarrow{n}(3) &= \frac{3}{2}\,\overrightarrow{n}(2) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \overrightarrow{n}(0) \\
\overrightarrow{n}(4) &= \frac{3}{2}\,\overrightarrow{n}(3) = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \overrightarrow{n}(0)
\end{aligned}$$

La matrice di Bernardelli:

Le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

sono attribuite da Leslie stesso a Bernardelli.
Si tratta di modelli di evoluzione molto simili:

- hanno gli stessi coefficienti di sopravvivenza,
- sembrano produrre lo stesso numero di figli
  - la prima 6 figli per individuo di etá 3
  - la seconda 1 figlio nell'etá 2 e 3 ancora nella etá 3,
  - ma tenuto presente che gli individui della etá 2 sono circa il triplo di quelli dell'etá 3....

Per la prima riesce

$$A^3 = I$$

quindi qualunque distribuzione di popolazione é periodica (d'equilibrio o di periodo 3).
L'altra non produce periodicitá (verificare..!)
La prima produce orbite periodiche, quindi non ci puó essere un comportamento asintotico indipendente dal dato iniziale.
La seconda ha l'autovalore positivo $\lambda = 1$ e gli altri due di modulo minore. Un autovettore corrispondente a $\lambda = 1$ é

$$\overrightarrow{v} = \{6,\ 3,\ 1\}$$

quindi le percentuali

$$\left\{ \frac{n_1(t)}{n_1(t) + n_2(t) + n_3(t)},\ \frac{n_1(t)}{n_1(t) + n_2(t) + n_3(t)},\ \frac{n_1(t)}{n_1(t) + n_2(t) + n_3(t)}, \right\}$$

tendono a divenire parallele a $\overrightarrow{v}$

Le distribuzioni di etá d'equilibrio.

$$\overrightarrow{n}(t+1) = A\,\overrightarrow{n}(t)$$

Dalla teoria dei sistemi lineari si riconosce che gli unici numeri λ per cui puó succedere che

$$A\,\overrightarrow{v} \quad // \quad \overrightarrow{v} \quad \Leftrightarrow \quad A\,\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v}$$

sono quelli che verificano l'equazione:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

In due dimensioni:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ p_1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 - \lambda & f_2 \\ p_1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = -(f_1 - \lambda)\lambda - f_2 p_1$$

$$\lambda^2 - f_1 \lambda - f_2 p_1 = 0$$

Autovalori per tre etá:

Si puó calcolare esattamente il polinomio caratteristico associato alla matrice di Leslie 3×3

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 \left\{ 1 - \frac{f_1}{\lambda} - \frac{f_2\, p_1}{\lambda^2} - \frac{f_3\, p_1\, p_2}{\lambda^3} \right\}$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{f_1}{\lambda} + \frac{f_2\, p_1}{\lambda^2} + \frac{f_3\, p_1\, p_2}{\lambda^3} = 1$$

Posto

$$q(\lambda) = \frac{f_1}{\lambda} + \frac{f_2\, p_1}{\lambda^2} + \frac{f_3\, p_1\, p_2}{\lambda^3}$$

si riconosce che

$$\det(\lambda\, I - A) = 0 \Leftrightarrow q(\lambda) = 1$$

Tenuto presente che al variare di $\lambda \in (0, +\infty)$ $q(\lambda)$ decresce da $+\infty$ a 0, si riconosce che prende il valore 1 una e una sola volta.

Ovvero che ogni matrice di Leslie 3×3 possiede uno ed un solo autovalore positivo.

Autovettori

$$A\,\overrightarrow{x} = \lambda\,\overrightarrow{x} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 & = \lambda x_1 \\ p_1x_1 & = \lambda x_2 \\ p_2x_2 & = \lambda x_3 \end{cases}$$

Deve riuscire $x_1 \neq 0$ e quindi un autovettore é

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \dfrac{p_1}{\lambda} \\ \\ \dfrac{p_2 p_1}{\lambda^2} \end{pmatrix}$$

Risultati:

Le radici λ delle equazioni precedenti si chiamano autovalori della matrice A.

- Nel caso delle matrici di Leslie c'é sempre un autovalore positivo λ maggiore in modulo di tutti gli altri,
- In corrispondenza ad esso c'é sempre un autovettore

  $$A\,\overrightarrow{v} = \lambda\,\overrightarrow{v}$$

  a componenti positive.
- I vettori $\overrightarrow{n}(t)$
  - tendono a divenire paralleli a $\overrightarrow{v}$ al crescere di t
  - essi hanno modulo che aumenta (o diminuisce) come λ^t