Progetto Lauree Scientifiche

Licei Marconi, Meucci, Labriola

Zagarolo, Roma, Aprilia

2007-2008

Dinamica di popolazioni

Laboratorio 3

Quattro etá: i pipistrelli

Consideriamo una popolazione di pipistrelli suddivisa in 4 fasce di etá di 6 mesi ognuna. Supponiamo che la relativa matrice di Leslie sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1.9 & 1.5 & 0.7 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

Indicate con $\overrightarrow{n}(t) = \{n_1(t), n_2(t), n_3(t), n_4(t)\}$ le quattro fasce, l'evoluzione sará la seguente

$$\begin{cases} n_1(t+1) = & 1.9\, n_2(t) + 1.5\, n_3(t) + 0.7\, n_4(t) \\ n_2(t+1) = & 0.5\, n_1(t) \\ n_3(t+1) = & 0.8\, n_2(t) \\ n_4(t+1) = & 0.4\, n_3(t) \end{cases}$$

Per profilo di una popolazione suddivisa in classi di etá intendiamo le percentuali di ciascuna classe rispetto alla popolazione totale. Tale profilo corrisponde, nel caso di 4 fasce di etá a

$$\left\{ \frac{n_1}{n_1+n_2+n_3+n_4}, \frac{n_2}{n_1+n_2+n_3+n_4}, \frac{n_3}{n_1+n_2+n_3+n_4}, \frac{n_4}{n_1+n_2+n_3+n_4} \right\}$$

Il profilo di popolazione tende ad essere proporzionale al seguente

$$\{0.569, 0.231, 0.150, 0.0490\}$$

La popolazione totale cresce di periodo in periodo, cioé ogni 6 mesi, con un fattore 1.23

Cinque etá: i canguri

Consideriamo una popolazione di canguri suddivisa in 5 fasce di etá di 2 anni ciascuna. Supponiamo che la relativa matrice di Leslie sia

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3.9 & 2.7 & 0.9 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

L'evoluzione é quindi:

$$\begin{cases} n_1(t+1) = & 3.9\, n_3(t) + 2.7\, n_4(t) + 0.9\, n_5(t) \\ n_2(t+1) = & 0.5\, n_1(t) \\ n_3(t+1) = & 0.8\, n_2(t) \\ n_4(t+1) = & 0.7\, n_3(t) \\ n_5(t+1) = & 0.4\, n_4(t) \end{cases}$$

Il profilo di popolazione tende ad essere proporzionale al seguente

$$\{0.56875, 0.21875, 0.1375, 0.075, 0.025\}$$

La popolazione totale cresce di periodo in periodo, cioé di due anni in due anni, con un fattore 1.3

Sei fasce d'etá: i bufali

6 fasce di etá di 1 anno ciascuna

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1.5 & 1.7 & 1.2 & 0.4 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} n_1(t+1) = & 1.5\, n_3(t) + 1.7\, n_4(t) + 1.2\, n_5(t) + 0.4\, n_6(t) \\ n_2(t+1) = & 0.6\, n_1(t) \\ n_3(t+1) = & 0.7\, n_2(t) \\ n_4(t+1) = & 0.9\, n_3(t) \\ n_5(t+1) = & 0.5\, n_4(t) \\ n_6(t+1) = & 0.3\, n_5(t) \end{cases}$$

Il profilo di popolazione tende ad essere proporzionale al seguente

$$\{0.43599, 0.233572, 0.146171, 0.117687, 0.0525208, 0.0140592\}$$

La popolazione totale cresce di periodo in periodo, cioé di anno in anno, con un fattore 1.12

L'esempio delle pecore neozelandesi

age(years)	birth rate	survival rate
0-1	0.000	0.845
1-2	0.045	0.975
2-3	0.391	0.965
3-4	0.472	0.950
4-5	0.484	0.926
5-6	0.546	0.895
6-7	0.543	0.850
7-8	0.502	0.786
8-9	0.468	0.691
9-10	0.459	0.561
10-11	0.433	0.370
11-12	0.421	0.000

Cofficienti di fertilitá:

$$
\begin{array}{llll}
f_1 = 0.000 & f_2 = 0.045 & f_3 = 0.391 & f_4 = 0.472 \\
f_5 = 0.484 & f_6 = 0.546 & f_7 = 0.543 & f_8 = 0.502 \\
f_9 = 0.468 & f_{10} = 0.459 & f_{11} = 0.433 & f_{12} = 0.421
\end{array}
$$

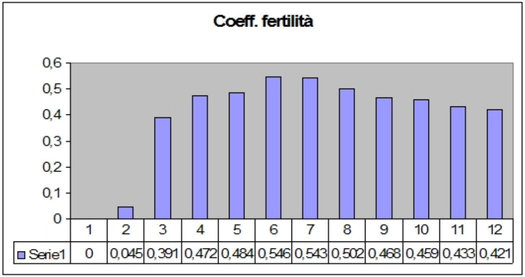

Figura: Coefficienti f_1, f_2, ..., f_{12}

Coefficienti di sopravvivenza:

$$
\begin{array}{llll}
p_1 = 0.845 & p_2 = 0.975 & p_3 = 0.965 & p_4 = 0.950 \\
p_5 = 0.926 & p_6 = 0.895 & p_7 = 0.850 & p_8 = 0.786 \\
p_9 = 0.691 & p_{10} = 0.561 & p_{11} = 0.370 & p_{12} = 0.000
\end{array}
$$

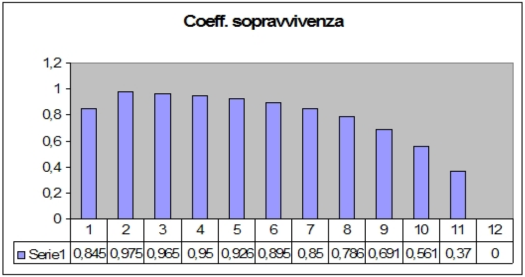

Figura: Coefficienti p_1, p_2, ..., p_{12}

$$\begin{pmatrix}
0 & 0.045 & 0.391 & 0.472 & 0.484 & 0.546 & 0.543 & 0.502 & 0.468 & 0.459 & 0.433 & 0.421 \\
0.845 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.975 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.965 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.92 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.895 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.85 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.786 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.691 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.561 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.37 & 0
\end{pmatrix}$$

Figura: La matrice di Leslie

Il profilo di popolazione tende ad essere proporzionale al seguente

$$\{0.241325, 0.173552, 0.144014, 0.118278,$$

$$0.0956308, 0.0748788, 0.0570367,\ \ 0.0412613,$$

$$0.0276015, 0.0162322, 0.00775008, 0.00244045\}$$

La popolazione totale cresce di periodo in periodo, cioé di anno in anno, con un fattore 1.175

Tre etá: $\{B,\ G,\ M\}$

Indichiamo con

$$B(t), \quad G(t), \quad M(t)$$

i neonati, i giovani e i maturi al tempo t.
Supponendo che l'evoluzione segua il modello di Leslie con coefficienti di fertilitá e sopravvivenza

$$f_1,\ f_2,\ f_3, \quad p_1,\ p_2$$

Si ha

$$\begin{cases} B(t+1) = f_1\, B(t) + f_2 G(t) + f_3\, M(t) \\ G(t+1) = p_1\, B(t) \\ M(t+1) = p_2\, G(t) \end{cases}$$

ovvero anche ponendo nella seconda e terza riga l'espressione di $G(t)$ e $M(t)$

$$\begin{cases} B(t+1) = f_1\, B(t) + f_2 G(t) + f_3\, M(t) \\ G(t) = p_1\, B(t-1) \\ M(t) = p_2\, G(t-1) \end{cases}$$

da cui usando nella terza l'espressione $G(t-1) = p_1\, B(t-2)$ si ha

$$\begin{cases} B(t+1) = f_1\, B(t) + f_2 G(t) + f_3\, M(t) \\ G(t) = p_1\, B(t-1) \\ M(t) = p_2\, p_1\, B(t-2) \end{cases}$$

Da cui

$$B(t+1) = f_1\, B(t) + f_2\, p_1\, B(t-1) + f_3\, p_2\, p_1\, B(t-2) \qquad (1)$$

L'equazione verificata per $t \in \mathbb{N}$ da $B(t)$ si dice

equazione alle differenze

Il motivo si riconosce scrivendo la forma equivalente

$$B(t+1) - B(t) = (f_1 - 1)\, B(t) + f_2\, p_1\, B(t-1) + f_3\, p_2\, p_1\, B(t-2)$$

in cui, a primo membro, figura esplicitamente la differenza

$$B(t+1) - B(t).$$

Eseguiamo una prova riferendoci a scelte concrete dei coefficienti di fertilitá e sopravvivenza:

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0,\ f_3 = 12, \quad p_1 = 1/3, p_2 = 1/4$$

L'equazione che $B(t)$ dovrebbe soddisfare é, in questo caso,

$$B(t+1) = B(t-2)$$

Torna la periodicitá che avevamo osservato.

$$B(3) = B(0), \quad B(4) = B(1), \quad B(5) = B(2), \ldots$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & f_3 \\ p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & f_3 p_2 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 p_1 \\ p_1 p_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} f_3 p_1 p_2 & 0 & 0 \\ 0 & f_3 p_1 p_2 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 p_1 p_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \{B(1), G(1), M(1)\} = A\,\{B(0), G(0), M(0)\} \\ \{B(2), G(2), M(2)\} = A^2\,\{B(0), G(0), M(0)\} \\ \{B(3), G(3), M(3)\} = A^3\,\{B(0), G(0), M(0)\} \end{cases}$$

Consideriamo altre scelte dei coefficienti:

$$f_1 = 0,\ f_2 = 4,\ f_3 = 3, \quad p_1 = 1/2,\ p_2 = 1/4$$

$$B(t+1) = f_1\, B(t) + f_2\, p_1\, B(t-1) + f_3\, p_2\, p_1\, B(t-2)$$

$$B(t+1) = 2\, B(t-1) + \tfrac{3}{8}, B(t-2)$$

$$f_1 = 0,\ f_2 = 1,\ f_3 = 3, \quad p_1 = 1/2,\ p_2 = 1/3$$

$$B(t+1) = f_1\, B(t) + f_2\, p_1\, B(t-1) + f_3\, p_2\, p_1\, B(t-2)$$

$$B(t+1) = \tfrac{1}{2}\, B(t-1) + \tfrac{1}{2}\, B(t-2)$$

L'equazione alle differenze

$$B(t+1) = f_1\, B(t) + f_2\, p_1\, B(t-1) + f_3\, p_2\, p_1\, B(t-2)$$

consente di determinare, ricorsivamente, i valori $B(t) \quad \forall t \in \mathbb{N}$ non appena siano noti i primi tre

$$B(0), \quad B(1), \quad B(2)$$

infatti

$$\begin{aligned} B(3) &= f_1\, B(2) + f_2\, p_1\, B(1) + f_3\, p_2\, p_1\, B(0) \\ B(4) &= f_1\, B(3) + f_2\, p_1\, B(2) + f_3\, p_2\, p_1\, B(1) \\ B(5) &= f_1\, B(4) + f_2\, p_1\, B(3) + f_3\, p_2\, p_1\, B(2) \\ B(6) &= \ldots.. \end{aligned}$$

La forma lineare dell'equazione (1)

$$B(t+1) = f_1\, B(t) + f_2\, p_1\, B(t-1) + f_3\, p_2\, p_1\, B(t-2)$$

implica che se due, o piú, espressioni

$$b_1(t), \qquad b_2(t)$$

la verificano

$$\begin{cases} b_1(t+1) = f_1\, b_1(t) + f_2\, p_1\, b_1(t-1) + f_3\, p_2\, p_1\, b_1(t-2) \\ b_2(t+1) = f_1\, b_2(t) + f_2\, p_1\, b_2(t-1) + f_3\, p_2\, p_1\, b_2(t-2) \end{cases}$$

allora la verifica anche ogni loro combinazione lineare

$$\alpha\, b_1(t) + \beta\, b_2(t)$$

É interessante immaginare che tipo di espressione puó avere $B(t)$ per soddisfare tali equazioni (1).

Proviamo con

$$B(t) = \lambda^t$$

riservandoci di scegliere la base λ in modo opportuno.
Sostituendo nel primo esempio a $B(t)$ l'espressione λ^t si ha

$$B(t+1) = 2\,B(t-1) + \frac{3}{8}, B(t-2) \quad \rightarrow \quad \lambda^{t+1} = 2\,\lambda^{t-1} + \frac{3}{8}\,\lambda^{t-2}$$

da cui, semplificando il fattore comune λ^{t-2}

$$\lambda^3 = 2\,\lambda + \frac{3}{8} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{3}{2} \\ \lambda_2 = \frac{1}{4}(-3+\sqrt{5}) \\ \lambda_3 = \frac{1}{4}(-3-\sqrt{5}) \end{cases}$$

Le tre basi $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ trovate offrono tre funzioni

$$B_1(t) = \left(\frac{3}{2}\right)^t,\ B_2(t) = \left(\frac{1}{4}(-3+\sqrt{5})\right)^t,\ B_3(t) = \left(\frac{1}{4}(-3-\sqrt{5})\right)^t$$

che verificano l'equazione $B(t+1) = 2\,B(t-1) + \frac{3}{8}\,B(t-2)$.

Per la linearitá osservata saranno quindi soluzioni anche le tante loro combinazioni lineari

$$B(t) = \sum_{k=1}^{3} c_k\, B_k(t) = c_1\,\lambda_1^t + c_2\,\lambda_2^t + c_3\,\lambda_3^t$$

determinate da coefficienti $c_1,\ c_2,\ c_3$ qualsiasi.

Tenuto conto che i primi tre valori $B(0)$, $B(1)$, $B(2)$ determinano tutti gli altri successivi valori $B(t)$ si possono scegliere i coefficienti c_1, c_2, c_3 tali da soddisfare il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 & = B(0) \\ c_1\,\lambda_1 + c_2\,\lambda_2 + c_3\,\lambda_3 & = B(1) \\ c_1\,\lambda_1^2 + c_2\,\lambda_2^2 + c_3\,\lambda_3^2 & = B(2) \end{cases}$$

Di conseguenza l'espressione

$$B(t) = c_1\,\lambda_1^t + c_2\,\lambda_2^t + c_3\,\lambda_3^t$$

da essi prodotta fornisce automaticamente tutti i restanti valori $B(t)$.

$$\{B(t),\, G(t),\, M(t)\} = \{B(t),\, p_1\, B(t-1),\, p_1 p_2\, B(t-2)\}$$

Tenuto conto che delle tre basi λ_1, λ_2, λ_3 la prima $\lambda_1 = 3/2$ ha modulo maggiore riuscirá, con approssimazione via via migliore per i tempi successivi,

$$\{B(t),\, G(t),\, M(t)\} \,//\, \left\{ \left(\frac{3}{2}\right)^2,\, \frac{3}{2}\, p_1,\; p_1 p_2 \right\}$$

ovvero, con i valori $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/4$ si ha

$$\{B(t),\, G(t),\, M(t)\} \,//\{18,\, 6,\, 1\}$$

Equazioni difficili:

La determinazione della base λ affinché

$$B(t) = \lambda^t$$

soddisfacesse l'equazione alle differenze, é costata la soluzione di un'equazione di terzo grado, un'equazione difficile !

É quasi sempre molto difficile determinare le soluzioni di equazioni di grado non banale: esistono tuttavia per approssimarle algoritmi numerici molto efficaci, implementati in quasi tutti i software di calcolo.

La soluzione di equazioni in *DERIVE* é affidata al comando SOLVE.

Una strana coincidenza:

Le radici λ dell'equazione

$$\lambda^3 = f_1\,\lambda^2 + f_2\,p_1\,\lambda + f_3\,p_2\,p_1$$

ottenuta sostituendo a $B(t)$ l'espressione λ^t nell'equazione alle differenze, é la stessa equazione in λ che avremmo studiato per determinare gli autovalori della matrice di Leslie.

$$\det\begin{pmatrix} f_1-\lambda & f_2 & f_3 \\ p_1 & -\lambda & 0 \\ 0 & p_2 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Le basi λ che cerchiamo sono.... nient'altro che gli autovalori della matrice di Leslie !

I numeri di Fibonacci

Si chiamano numeri di Fibonacci una successione $\{a_n\}$ ottenuta di passo in passo con la formula

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \tag{2}$$

avendo assunto $a_0 = a_1 = 1$
Si osservi che la (2) é un'equazione alle differenze.
Provate a cercarne soluzioni nella forma

$$\lambda^n$$

scegliendo bene le basi λ_1, λ_2 soluzioni dell'equazione

$$\lambda^2 = \lambda + 1$$

Quindi

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}), \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$$

da cui

$$a_n = c_1 \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^n + c_2 \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^n$$

Per soddisfare le condizioni $a_0 = a_1 = 1$ i due coefficienti $c_1, \ c_2$ devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = 1 \\ c_1 \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) + c_2 \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & = 1 \end{cases} \longrightarrow \quad \begin{matrix} c_1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \\[2ex] c_2 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \end{matrix}$$

Infatti, provare per credere, l'espressione (complicatissima)

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^{n}+\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^{n}$$

produce, al variare di $n \in \mathbb{N}$ esattamente i corrispondenti numeri di Fibonacci

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13, \ldots.$$

La sorpresa che un'espressione con tante radici produca valori addirittura interi é.... sorprendente.

L'espressione

$$a_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^n + \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^n$$

consente di riconoscere, tenuto conto che il primo dei due addendi cala rapidamente verso zero, che

$$a_n \approx \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^n$$

e quindi, ad esempio ricavare che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \approx \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$$

risultato nientaffatto banale (i Fibonacci quasi una progressione geometrica)