Corso di Algebra 1 – A. Machì

II Esonero
30-05-2007

1. Costruire un campo con 9 elementi, scriverne gli elementi, e dimostrare che il gruppo moltiplicativo è ciclico.

2. Siano $f, g \in Q[x]$, e sia f irriducibile in $Q[x]$. Dimostrare che se f e g hanno una radice in comune α (nel campo complesso), allora f divide g.

3. Si consideri nell'anello $R[x]$ dei polinomi a coefficienti reali l'insieme I dei polinomi $f(x)$ che si annullano su $\sqrt{2}$ e su $\sqrt{3}$. Dimostrare che:

i) I è un ideale di $R[x]$;
ii) I non è primo; *ii*) I non è massimale;
iii) si determini un ideale massimale contenente I. (L'ideale J di *iii*)

4. Sappiamo che nell'anello degli interi, ogni sottogruppo è un ideale. Dimostrare che questo fatto non è necessariamente vero nell'anello dei polinomi a coefficienti in un campo.

5. Determinare i quozienti e i resti della divisione di $3-2i$ per $2+i$ negli interi di Gauss.