Corso di Algebra 1 – A. Machì

II Esonero
30/05/2007

1. Costruire un campo con 9 elementi, scriverne gli elementi, e dimostrare che il gruppo moltiplicativo è ciclico.

Soluzione:

i) $Z_3[x]/(x^2+1)$;
ii) polinomi di grado 0 e 1 su Z_3;
iii) $x+1$ è un generatore.

2. Siano $f, g \in Q[x]$, e sia f irriducibile in $Q[x]$. Dimostrare che se f e g hanno una radice in comune α (nel campo complesso), allora f divide g.

Soluzione: se f non divide g, allora essendo f irriducibile, $f(x)h(x) + g(x)k(x) = 1$. Calcolando in α, si ha l'assurdo $0 = 1$.

3. Si consideri nell'anello $Q[x]$ dei polinomi a coefficienti razionali l'insieme I dei polinomi $f(x)$ che si annullano su $\sqrt{2}$ e su $\sqrt{3}$. Dimostrare che:

i) I è un ideale di $Q[x]$;
ii) I non è primo;
iiI) I non è massimale;
iii) si determinino tutti gli ideali massimali contenenti I

Soluzione: *i*) ovvio;
ii) $(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3}) \in I$, ma nessuno dei due polinomi sta in I;
iii) un ideale massimale è primo;
iv) sono i due ideali generati da x^2-2 e da x^2-3.

4. Sappiamo che nell'anello degli interi, ogni sottogruppo è un ideale. Dimostrare che questo fatto non è necessariamente vero nell'anello dei polinomi a coefficienti in un campo.

Soluzione: per ogni $n \geq 0$, i polinomi di grado $\leq n$ formano un sottogruppo ma non un ideale.

5. Determinare i quozienti e i resti della divisione di $3-2i$ per $2+i$ negli interi di Gauss.

Soluzione. Si ha
$$\frac{3-2i}{2+i} = \frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$$
.

Il punto $P = (4/5, -7/5) = (0.8, -1.4)$ si trova nel quadrato di vertici $(0,-2), (0,-1), (1,-1), (1,-2)$;

i) distanza di $(0,-2)$ da P è $\sqrt{(4/5-0)^2 + (-7/5+2)^2} = 1$; quindi $-2i$ non è un quoziente;

ii) la distanza di $(0,-1)$ da P è $\sim 0.89 < 1$, e pertanto $-i$ è un quoziente, con resto 2: $3-2i-(2+i)\cdot -i = 2$;

iii) la distanza di $(1,-1)$ da P è $\sim 0.45 < 1$, e pertanto $1-i$ è un quoziente: $3-2i = (2+i)\cdot(1-i)+(-i)$;

iv) la distanza di $(1,-2)$ da P è $\sim 0.63 < 1$, e pertanto $1-2i$ è un quoziente: $3-2i = (2+i)\cdot(1-i)+(-1+i)$.