Corso di Algebra 1 – A. Machì
a.a. 2006–2007

Programma d'esame

Insiemi e operazioni tra insiemi.
Funzioni, relazioni e relazioni di equivalenza.
Insieme delle parti.
Funzioni inverse.
Conservazione delle operazioni booleane.
Non equipotenza di un insieme e dell'insieme delle sue parti.
Induzione e principio del minimo intero.
MCD e mcm.
Identità di Bézout.
Teorema fondamentale dell'aritmetica.
Congruenze e classi resto.
Operazioni tra classi.
Il piccolo teorema di Fermat.
Teorema cinese.
Funzione di Eulero.
Definizione di gruppo.
Sottogruppi e sottogruppi normali.
Gruppi quoziente.
Teoremi di omomorfismo e di isomorfismo.
Ordine di un elemento in un gruppo.
Gruppi abeliani.
Gruppi ciclici
Gruppi di ordine primo.
Gruppi di ordine 4.
Gruppi diedrali.
Permutazioni pari e dispari.
Gruppo simmetrico e alterno.
Centro di un gruppo.
Azione di un gruppo su un insieme.
Orbite e stabilizzatori.
Esempi di azione.
Il coniugio.
Permutazioni coniugate.
La rappresentazione regolare.
Anelli e sottoanelli.

L'anello delle matrici sopra un campo.
L'anello dei polinomi sopra un campo.
Divisori dello zero.
Domini di integrità e campi.
Un dominio di integrità finito è un campo.
Caratteristica di un campo.
Campo dei quozienti di un dominio di integrità.
Ideali destri, sinistri e bilateri (esempi).
Anelli a ideali principali.
Omomorfismi tra anelli.
Anelli quoziente e relazioni tra elementi.
Anello delle classi resto negli interi e nei polinomi.
Gruppo degli elementi invertibili di Z_n.
Z_n è un campo se e solo se n è un numero primo.
Un corpo ha solo ideali banali.
Anelli commutativi.
Ideali primi e massimali.
Ideale delle funzioni reali che si annullano in un punto.
R commutativo, $R \ni 1$, R/I è un campo se e solo se I è massimale.
R come sopra, R/I è un dominio di integrità se e solo se I è primo.
Anelli con valutazione.
Anello $Z[i]$ degli interi di Gauss.
Divisione euclidea in $Z[i]$.
Elementi invertibili (unità) ed elementi associati.
Fattorizzazione. Domini a fattorizzazione unica.
Elementi primi e irriducibili.
In un dominio di integrità, un elemento primo è irriducibile.
Esempi di elementi irriducibili ma non primi.
In un dominio a ideali principali, un elemento irriducibile è primo.
Condizione della catena ascendente in un dominio a ideali principali.
Un dominio a ideali principali è a fattorizzazione unica.
Polinomi a coefficienti razionali.
Polinomi irriducibili.
Ampliamenti algebrici.
Ampliamenti di campi come spazi vettoriali sul campo base.
Dimensione finita ed elementi algebrici.
Ampliamenti dei razionali con una radice di un polinomio irriducibile.
Costruzione della radice di un polinomio irriducibile.
Costruzioni di campi finiti.
Teorema fondamentale dell'algebra (enunciato).

Un polinomio di grado n su un campo ha al più n radici.
Un polinomio di grado n a coefficienti complessi ha esattamente n radici.
Un polinomio irriducible a coefficienti reali ha grado al più 2.
Un polinomio di grado n è determinato dai valori su $n + 1$ punti.
Polinomi primitivi.
Lemma di Gauss.
Criterio di Eisenstein.
Per ogni n, esistono polinomi di grado n sui razionali che sono irriducibili.
Polinomi ciclotomici.
Grado dei polinomi ciclotomici.
Il polinomio ciclotomico è a coefficienti interi.

Oltre alle dispense che coprono alcuni degli argomenti svolti nel corso, i testi consigliati sono i seguenti:

1. Rita Procesi Ciampi, *Lezioni di Algebra, un primo modulo*, Ed. Accademia

2. I. N. Herstein, *Algebra*, Editori Riuniti (parte dei primi tre capitoli).

3. L. Childs, *A concrete introduction to higher algebra*, Ed. Springer (disponibile in biblioteca).

4. G. Campanella, *Appunti di Algebra*, Ed. Nuova cultura.