

Corso di Algebra 1

Esonero bianco n. 2

1. *i*) In un anello, definire un elemento irriducibile e un elemento primo.
ii) Dimostrare che in un dominio di integrità un elemento primo è irriducibile, e dare un esempio che dimostri come il viceversa non sia necessariamente vero.

2. Nell'anello $Z[\sqrt{3}]$ si definisca la norma di un elemento $a + b\sqrt{3}$ come $a^2 - 3b^2 = (a + b\sqrt{3})(a - b\sqrt{3})$ e trovare un elemento invertibile dell'anello.

3. Dimostrare che le matrici $\begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix}$, $x, y \in Q$, formano un campo isomorfo a $Q(\sqrt{-3})$.

4. Dire quali di questi polinomi sono irriducibili sui razionali e motivare la risposta:

$$x^4 + 18x + 24, \quad x^3 + x^2 + x + 1, \quad x^4 + x^3 + x + 1.$$

5. Determinare i quozienti e i resti della divisione di $3 - i$ per $-2i$ negli interi di Gauss.