**Corso di Algebra 1 – A. Machì**

**Prova scritta 27 Settembre 2007**

**1.** *i*) Dare esempi di gruppi ciclici nei quali i generatori sono esattamente due.

*ii*) Quali sono gli ordini possibili per un gruppo ciclico che ha esattamente due generatori?

**2.** Negli anelli $Z[x], Q[x]$ e $Z_{11}[x]$, determinare:

*i*) gli associati di $2x - 7$;

*ii*) la fattorizzazione in fattori irriducibili del polinomio $6x^2 - 6x + 12$.

**3.** Nell'anello $F[x]$ dei polinomi su un campo $F$:

*i*) dimostrare che i polinomi nei quali la somma dei coefficienti è uguale a zero formano un ideale $I$;

*ii*) determinare un generatore di $I$ (*Suggerimento*: la somma dei coefficienti di un polinomio è il valore del polinomio calcolato in 1: $f(x) \in I$ se, e solo se, $f(1) = 0$);

*iii*) questo ideale $I$ è il nucleo di un omomorfismo: quale?

**3.** Nell'anello $F[x]$ dei polinomi su un campo $F$:

*i*) dimostrare che i polinomi nei quali la somma dei coefficienti è uguale a zero formano un ideale $I$;

*ii*) determinare un generatore di $I$ (*Suggerimento*: la somma dei coefficienti di un polinomio è il valore del polinomio calcolato in 1: $f(x) \in I$ se, e solo se, $f(1) = 0$);

*iii*) questo ideale $I$ è il nucleo di un omomorfismo: quale?

* * *

**Soluzioni.**

**1.** *i*) Il gruppo degli interi e i gruppi ciclici di ordine 3, 4 e 6;
*ii*) sono gli interi $n$ per i quali $\varphi(n) = 2$, e ciò accade solo per $n = 3$, $n = 4$ ed $n = 6$.

**2.** *i*) le unità di Z[x] sono quelle di Z, cioè $\pm 1$, e quindi i soli associati di $2x - 7$ sono $2x - 7$ e $-2x + 7$. Le unità di $Q[x]$ sono tutti gli elementi non nulli di $Q$, e lo stesso accade per $Z_{11}$.

*ii*) in $Z[x]$, $2 \cdot 3 \cdot (x^2 - x + 2)$;

in $Q[x]$ abbiamo la stessa fattorizzazione, con la differenza che ora 2 e 3 sono unità, e dunque $6x^2 - 6x + 12$ è associato di $x^2 - x + 2$ ed è irriducibile (non ha radici in $Q$);

in $Z_{11}$ cerchiamo le radici, e troviamo 5 e 7, per cui $6x^2 - 6x + 12 = 6(x-5)(x-7) = 6(x+6)(x+4) = (6x+3)(x+4)$.

**3.** La somma dei coefficienti di un polinomio $f(x)$ è zero se e solo se $f(1) = 0$, e si ha $f(1) = 0$ se e solo se $f(x)$ è multiplo di $x - 1$. Ma i multipli di $x - 1$ formano un ideale, generato appunto da $x - 1$. Questo ideale è il nucleo dell'omomorfismo $F[x] \to F$ che manda un polinomio nella somma dei suoi coefficienti.