Corso di Combinatoria

A. Machì

Dispensa III

Il principio dei cassetti e la teoria di Ramsey

1 Il caso finito

Il *principio dei cassetti*, o *principio di Dirichlet* (*pigeonhole principle* in inglese) afferma quanto segue:

se $r+1$ *oggetti vengono distribuiti in* r *cassetti, esiste almeno un cassetto che contiene più di un oggetto.*

Si tratta di un principio di esistenza: esso afferma che un cassetto con la proprietà richiesta esiste, ma non fornisce un modo per trovarlo. È equivalente al fatto che dati due insiemi finiti A e B, e $|A| > |B|$, nessuna funzione da A a B può essere iniettiva; devono esistere almeno due elementi di A con la stessa immagine in B (gli elementi di A sono gli oggetti, quelli di B i cassetti).

Per applicare il principio dei cassetti occorre individuare, a seconda della natura del problema, cosa prendere come cassetti e cosa come oggetti.

Esempi. 1. Dato un intero m, i possibili resti della divisione di un intero per m sono $0,1,\ldots,m-1$, e sono quindi in numero di m. Se prendiamo $m+1$ interi e dividiamo ciascuno di essi per m, ve ne sono allora almeno due che danno lo stesso resto. In altri termini, suddividiamo gli interi in m classi (cassetti) mettendo in una stessa classe due interi se divisi per m danno lo stesso resto. Allora di $m+1$ interi (oggetti) almeno due appartengono alla stessa classe.

2. Dimostriamo che in qualunque modo si scelgano nove divisori del numero 120 ve ne sono sempre due il cui prodotto è 120.

Abbiamo nove oggetti (i nove divisori); per applicare il principio dei cassetti occorre determinare otto cassetti nei quali distribuirli. Ora, i divisori di 120 sono sedici: 1,2,3,4,5,6,8,10,12,15,20,24,30,40,60,120; dividiamoli in otto coppie in modo che in ciascuna coppia il prodotto dei due numeri sia 120:

$$\{1,120\},\{2,60\},\{3,40\},\{4,30\},\{5,24\},\{6,20\},\{8,15\},\{10,12\}$$

Queste otto coppie saranno gli otto cassetti. Se ora prendiamo comunque nove divisori di 120, almeno due provengono dalla stessa coppia (dallo stesso cassetto), e dunque il loro prodotto è 120.

Invece di "cassetti" si può parlare di "colori". Il principio dei cassetti si esprime allora come segue:

colorando in qualunque modo $r+1$ oggetti con r colori, si trovano sempre almeno due oggetti con lo stesso colore.

Più in generale:

se $n \geq r(l-1)+1$, comunque si colorino n oggetti con r colori esistono l oggetti che hanno lo stesso colore.

Infatti, se vi sono al più $l-1$ oggetti di ogni colore (al più $l-1$ oggetti in ciascun cassetto), vi sono in tutto al più $r(l-1)$ oggetti, contro l'ipotesi.

Il numero $1+r(l-1)$ è minimo: se infatti il numero degli oggetti è inferiore a questo numero allora essi si possono colorare in modo che nessun sottoinsieme di l oggetti abbia lo stesso colore (infatti, se gli oggetti sono in numero di $r(l-1)$ allora si possono suddividere in r gruppi di $l-1$ oggetti ciascuno).

Enunciamo ora il principio dei cassetti come segue:

dato un intero r, quanto deve essere grande n affinché esista un insieme di cardinalità n tale che, colorandone comunque gli elementi con r colori, vi siano almeno due elementi che hanno lo stesso colore?

Sappiamo che n deve essere "abbastanza grande", cioè almeno uguale a $r+1$. Più in generale, invece di considerare elementi consideriamo coppie di elementi, e invece di richiedere che vi siano almeno 2 elementi (una coppia di elementi) dello stesso colore, cioè che esista un sottoinsieme di cardinalità 2 con tutti gli elementi dello stesso colore, richiediamo che esista un sottoinsieme di cardinalità p con tutte le coppie di elementi dello stesso colore. Questo caso si può interpretare in termini di grafi se si considera come insieme di cardinalità n l'insieme dei vertici del grafo completo K_n, come coppie di vertici gli archi, e come sottoinsieme di cardinalità p un sottografo completo K_p. La domanda è allora:

dati gli interi r, p, quanto deve essere grande n affinché, colorando comunque gli archi del grafo completo K_n con r colori, esso contenga un sottografo completo K_p monocromatico (*cioè con tutti gli archi dello stesso colore*)? Più in generale, se invece di coppie di elementi consideriamo sottoinsiemi di cardinalità $k \geq 2$ quanto deve essere grande n affinché, colorando comunque i $k-$sottoinsiemi di un insieme con n elementi con r colori, si trovi in questo insieme un $p-$ sottoinsieme con tutti i $k-$sottoinsiemi dello stesso colore? (Un $k-$insieme è un insieme di cardinalità k.

Si pone però un problema: questo n esiste sempre? Più in generale, per grandi valori di k e p potrebbero esistere insiemi di cardinalità n arbitrariamente grande nessuno dei quali soddisfa la proprietà richiesta. Il problema potrebbe cioè non essere ben posto. Tuttavia così non è: il teorema di Ramsey (Teorema 1 qui sotto) afferma infatti l'esistenza di n finito in tutti i casi. Dati r, k, p esiste quindi anche un minimo finito tale che ogni insieme con almeno questo numero di elementi ha la proprietà richiesta. Questo minimo, che si denota con $R(r, k, p)$ prende il nome di *numero di Ramsey*.

Teorema 1. *Dati r, k, p interi positivi, esiste un intero positivo n con la proprietà che se i $k-$sottoinsiemi di un insieme con n elementi sono colorati in qualunque modo con r colori si trova sempre un $p-$sottoinsieme monocromatico, cioè tale che tutti i suoi $k-$sottoinsiemi hanno lo stesso colore.*

Dimostreremo questo teorema in una forma più generale (v. Teor. 3 più oltre).

Nota. 1. Colorare un sottoinsieme non significa colorarne gli elementi, ma appunto l'insieme costituito da questi elementi, cosí come si fa nel caso di un grafo quando colorare una coppia (u, v) significa colorare l'arco che congiunge i vertici u e v e non i due vertici. Nella Fig. 1 si vede un possibile modo di rappresentare i 3–sottoinsiemi di un insieme con 4 elementi (i 4 vertici) e una loro colorazione con due colori.

2. Il teorema di Ramsey si presenta come una profonda generalizzazione del principio dei cassetti. Ad esso si può attribuire il seguente significato: una struttura di una certa classe (ad esempio il grafo completo K_n colorato con r colori) contiene sempre una sottostruttura appartenente alla stessa classe (il grafo completo K_p), di cardinalità elevata (p assegnato grande a piacere), e con un grado di regolarità superiore a quello della struttura data (K_p monocromatico). In altri termini, vi sono regolarità inevitabili: un completo disordine è impossibile. Un esempio di regolarità inevitabile tratto dall'Analisi e che rientra, come vedremo, nella teoria di Ramsey per insiemi infiniti, è il seguente: una successione di numeri reali contiene sempre una sottosuccessione monotona. Un altro è il teorema di Bolzano-Weierstrass: una successione limitata di numeri reali contiene sempre una sottosuccessione convergente.

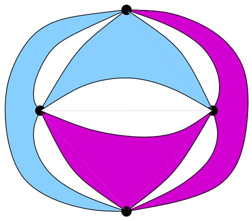

Fig. 1

Esempio. Siano $r = k = 2, p = 3$. Ci chiediamo: esiste n tale che colorando comunque gli archi di K_n con due colori si trovi sempre un K_3 monocromatico? Intanto dovrà essere $n > 5$. Esiste infatti una colorazione con 2 colori degli archi di K_5, il grafo completo con 5 vertici, senza che vi siano triangoli monocromatici. Siano 0,1,2,3,4 i vertici; coloriamo l'arco (i, j) di un colore (linee piene) se $i - j \equiv \pm 1 \bmod 5$, e dell'altro (linee tratteggiate) se $i - j \equiv \pm 2 \bmod 5$ (Fig. 2).

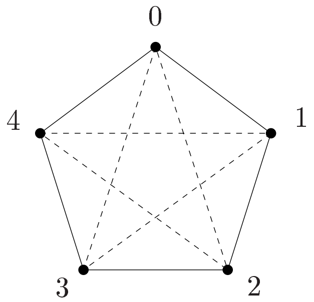

Fig. 2

Proviamo con 6 vertici (Fig. 3). Fissiamo un vertice v di K_6; da questo partono 5 archi, e di questi (per il principio dei cassetti con $r = 2$ e $l = 3$) almeno tre sono di uno stesso colore, diciamo rosso (segmenti pieni in figura).

Se due dei vertici di arrivo sono congiunti da un arco rosso abbiamo, assieme a v, un triangolo rosso; se tutti e tre sono congiunti da archi blu abbiamo un triangolo blu. Il minimo è dunque $R(2, 2, 3) = 6$. Questo

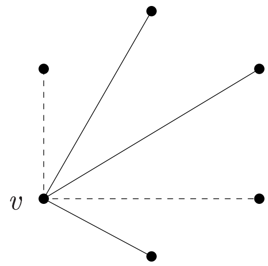

Fig. 3

risultato si può anche esprimere dicendo che in un qualunque grafo con almeno sei vertici vi sono o tre vertici a due a due adiacenti, oppure tre vertici a due a due non adiacenti. In un grafo con cinque vertici non è detto che ciò accada.

In questo esempio, i due sottoinsiemi sono entrambi dei K_p, $p = 3$. Si possono considerare anche più interi p, e più in generale, invece di coppie, $k-$sottoinsiemi, con $k \geq 2$. Il Teor. 1 si enuncia allora nel modo seguente.

Teorema 2. *Dati r, k e $p_1, p_2, \ldots, p_r$ esiste un intero positivo n con la proprietà che se i $k-$sottoinsiemi di un insieme con n elementi sono colorati in qualunque modo con r colori si trova sempre, per qualche i, un p_i-sottoinsieme monocromatico.*

Denotiamo il numero di Ramsey corrispondente con $R(p_1, p_2, \ldots, p_r; k)$. Dimostriamo ora il teorema in questa forma nel caso dei grafi ($k = 2$; per $k \geq 3$ si veda il Teor. 4). Consideriamo dapprima il caso $r = 2$, cioè di due interi p e q, scrivendo $R(p, q)$ invece di $R(p_1, p_2; 2)$. È chiaro intanto che $R(p, q) = R(q, p)$, per $p, q \geq 2$ (il nome dei colori è irrilevante), e che $R(s, 2) = R(2, s) = s$ (colorando gli archi di K_s di blu e rosso, se non vi sono archi blu (rossi) c'è almeno un arco rosso (blu)).

Teorema 3. *Siano dati due interi $p, q \geq 2$. Allora $R(p, q)$ esiste finito e inoltre, se $p, q \geq 3$, si ha:*

$$R(p, q) \leq R(p-1, q) + R(p, q-1), \tag{1}$$

e:

$$R(p, q) \leq \binom{p+q-2}{p-1}. \tag{2}$$

Dim. La dimostrazione è per induzione su $p+q$. Per $p = 2$ o $q = 2$ sappiamo che $R(2, q) = q$ ed $R(p, 2) = p$, valori finiti. Siano allora $p, q > 2$, e supponiamo il risultato vero per valori inferiori a $p+q$; in particolare, esso sarà vero per $(p-1)+q$ e $p+(q-1)$. Supponiamo cioè che $R(p-1, q)$ e $R(p, q-1)$ esistano finiti, e dimostriamo che allora anche $R(p, q)$ esiste finito. Sia $n = R(p-1, q)+R(p, q-1)$, e consideriamo una bicolorazione degli archi di K_n in blu e rosso. Se dimostriamo che in questa colorazione di K_n si ha o un K_p blu o un K_q rosso avremo il risultato in quanto, essendo $m = R(p, q)$ il minimo intero per cui K_m ha questa proprietà, si avrà $R(p, q) \leq n$.

Fissiamo un vertice v di K_n; esso ha grado $n-1$, cioè $R(p-1, q)+R(p, q-1)-1$. Allora (principio dei cassetti) vi sono almeno $n_1 = R(p-1, q)$ archi blu oppure almeno $n_2 = R(p, q-1)$ archi rossi incidenti a v (altrimenti vi sarebbero in tutto n_1+n_2-2 archi). Nel primo caso, consideriamo il K_{n_1} su v e sui vertici estremi degli archi blu incidenti a v. Se questo K_{n_1} contiene un K_q rosso siamo arrivati; altrimenti esso contiene un K_{p-1} blu, e questo assieme a v dà un K_p blu. L'altro caso si ottiene per simmetria.

Per quanto riguarda la (2), se p o q sono uguali a 2 si ha l'uguaglianza. Per induzione su $p+q$, la (2) sussiste con $q-1$ al posto di q e $p-1$ al posto di p; dalla (1) abbiamo allora:

$$R(p, q) \leq R(p, q-1) + R(p-1, q) \leq \binom{p+q-3}{p-1} + \binom{p+q-3}{p-2} = \binom{p+q-2}{p-1}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla formula $\binom{m-1}{k} + \binom{m-1}{k-1} = \binom{m}{k}$, per $m = p+q-2$ e $k = p-1$. $\diamondsuit$

Nota. 1. Nell'esempio precedente si aveva uguaglianza:

$$R(3, 3) = \binom{3+3-2}{3-1} = \binom{4}{2} = 6.$$

Ma ciò non è sempre vero. Ad esempio, per $R(3, 4)$ la (1) dà $R(3, 4) \leq R(2, 4) + R(3, 3) = 4 + 6 = 10$, e come vedremo nell'esempio qui sotto, $R(3, 4) = 9$.

2. Per $q = p$, cioè un caso particolare e quindi apparentemente più semplice (si tratta del Teor. 1 con $r = k = 2$) non sembra possibile una dimostrazione lungo le linee di quella ora vista. L'esistenza di $R(r, 2, p)$ finito si può comunque dimostrare in altro modo, sempre per induzione, ma con una maggiorazione diversa dalla (2), oppure, senza usare l'induzione, con una dimostrazione diretta. Il Teor. 1 è comunque una conseguenza del teorema di Ramsey infinito.

Corollario. *Se* $n_1 = R(p-1, q)$ *ed* $n_2 = R(p, q-1)$ *sono entrambi pari, allora nella* (1) *si ha disuguaglianza.*

Dim. Dimostriamo che nell'ipotesi detta, posto $n = n_1 + n_2 - 1$ nel grafo K_n colorato con due colori, e siano blu e rosso, si ha un K_p blu oppure un K_q rosso. Poiché $R(p, q)$ è il minimo intero m tale che K_m ha questa proprietà, si avrà

$$R(p, q) = m \leq n < n_1 + n_2 = R(p-1, q) + R(p, q-1).$$

Se un vertice di K_n è incidente ad almeno n_1 archi di un dato colore, e sia blu, allora, come si è visto nella dimostrazione del teorema, si ha il risultato. Supponiamo allora che ogni vertice sia incidente ad al più $n_1 - 1$ archi blu. Analogamente, possiamo supporre che ogni vertice sia incidente ad al più $n_2 - 1$ archi rossi. Ma allora ogni vertice è incidente ad esattamente $n_1 - 1$ archi blu, e ad esattamente $n_2 - 1$ archi rossi, perché altrimenti vi sarebbe un vertice incidente a meno di $n_1 + n_2 - 2 = n - 2$ archi. Consideriamo allora il grafo che consta degli n vertici e degli archi blu. Si tratta di un grafo su un numero dispari ($n = n_1 + n_2 - 1$) di vertici, nel quale ogni vertice ha grado dispari. La somma dei gradi dei vertici sarebbe dunque dispari ($= n(n_1 - 1)$), mentre sappiamo che questa somma, in qualunque grafo, è pari. L'ipotesi che ogni vertice sia incidente ad al più $n_1 - 1$ archi di un colore e ad al più $n_2 - 1$ archi dell'altro porta dunque a una contraddizione. Ne segue che un vertice di K_n è incidente ad almeno n_1 archi di un dato colore, o ad almeno n_2 dell'altro, da cui la tesi. $\diamondsuit$

Dal Teor. 3 segue facilmente il Teor. 2 (sempre per $k = 2$). Infatti, per induzione su r, noto il risultato per $r - 1$ colori e data una $r-$colorazione di K_n, sostituiamo i primi due colori con un nuovo colore. Allora, se n è abbastanza grande, o c'è un K_{p_i} di colore i, $3 \leq i \leq r$, o un K_m, $m \geq R(p_1, p_2)$ colorato con il nuovo colore, cioè con i primi due colori originari. Nel primo caso siamo arrivati; nel secondo abbiamo in K_m o un K_{p_1} del primo colore o un K_{p_2} del secondo.

Esempi.1. Calcoliamo $R(3, 4)$. Per il teorema, $R(3, 4) \leq 10$. Consideriamo K_9. Facciamo vedere che se non ci sono K_3 blu c'è un K_4 rosso. Fissiamo un vertice v. Vi sono vari casi.

i) Da v partono 0, 1 o 2 archi blu, e dunque 8, 7 o 6 archi rossi. Poiché i vertici di arrivo degli archi rossi sono in numero maggiore o uguale a 6, si tratta dei vertici di un grafo completo su un numero di vertici maggiore o uguale a 6, e dunque in questo grafo si ha un K_3 monocromatico. Se questo K_3 è blu, siamo arrivati. Se è rosso, assieme a tre degli archi rossi uscenti da v, dà luogo a un K_4 rosso.

ii) Da v partono 4 archi blu, e dunque 4 rossi. Se due vertici di arrivo degli archi blu sono congiunti da un arco blu, abbiamo un K_3 blu; altrimenti questi vertici sono tutti congiunti da un arco rosso, e quindi si ha un K_4 rosso.

iii) Non tutti i vertici possono avere esattamente 3 archi blu uscenti. Se così fosse, cancellando da K_9 gli archi rossi si otterrebbe un grafo con un numero dispari di vertici nel quale ogni vertice ha grado 3. Ma un tale grafo non esiste: la somma dei gradi dei vertici di grado dispari è pari, mentre qui sarebbe $9 \cdot 3 = 27$.

Possiamo allora concludere che $R(3,4) \leq 9$. Consideriamo K_8; denotiamo i vertici con 0,1,2,...,7 e coloriamo gli archi con la seguente regola: blu se $i - j \equiv \pm 1, \pm 4 \bmod 8$ e rosso se $i - j \equiv \pm 2, \pm 3 \bmod 8$ (ciò corrisponde a colorare in K_8 –un ottagono– i lati e le quattro diagonali di blu, e gli altri archi di rosso). È facile vedere che con questa colorazione non vi sono né triangoli blu né K_4 rossi. Dunque $R(3,4) > 8$, e pertanto $R(3,4) = 9$.

2. Utilizzando il fatto che $R(3,4) = R(4,3) = 9$, dimostriamo che $R(4,4) \leq 18$. Sia v un vertice di K_{18}. Da esso escono 17 archi, e di questi 9 hanno un dato colore. Due casi:

i) Questo colore è blu. Nel grafo completo K_9 sui 9 vertici di arrivo degli archi blu esiste, per quanto visto in **1.**, un K_3 blu o un K_4 rosso. Nel secondo caso non c'è altro da dimostrare. Nel primo, gli archi di questo K_3 assieme a quelli uscenti da v danno un K_4 blu.

ii) Il colore è rosso. Se in K_9 c'è un K_3 rosso, assieme agli archi uscenti da v abbiamo un K_4 rosso. Se non ci sono K_3 rossi c'è un K_4 blu, e siamo arrivati. (Si può dimostrare che $R(4,4) = 18$).

La finitezza del numero di Ramsey segue dalla (1) e da valori noti anche senza far uso della (2). Sappiamo che $R(5,2) = 5$; dalla (1), $R(5,3) \leq R(5,2) + R(4,3) = 5 + 9 = 14$, e dunque anche $R(5,3)$ è finito. $R(5,4) \leq R(5,3) + R(4,4)$, entrambi finiti, e dunque anche $R(5,4)$ è finito ($\leq 14 + 18 = 32$). $R(5,5) \leq R(5,4) + R(4,5)$, finito ($\leq 2 \cdot 32 = 64$). Abbiamo dunque la finitezza di tutti i numeri $R(p,q)$ con $p, q \leq 5$. Analogamente, a partire da $R(6,2) = 6$ otteniamo la finitezza di $R(p,q)$ con $p, q \leq 6$. In generale, nota la finitezza di $R(p,q)$ con $p, q \leq k$, questo procedimento permette di dimostrare la finitezza di $R(k+1,q)$. (Si tratta in realtà di un procedimento per induzione fatto passo per passo).

Si può anche dare una minorazione per $R(p,q)$. Dimostriamo che $R(p,q) > (p-1)(q-1)$, cioè che esiste una bicolorazione di $K_{(p-1)(q-1)}$ che non contiene né un K_p blu né un K_q rosso. Disponiamo i vertici di $K_{(p-1)(q-1)}$ in una griglia a $p-1$ righe e $q-1$ colonne, e uniamo tutte le coppie di vertici su una stessa riga con archi rossi e su righe diverse con archi blu. Abbiamo così $p-1$ grafi completi K_{q-1} colorati di rosso; poiché non vi sono altri archi rossi non abbiamo K_q rossi. Per quanto riguarda un K_p blu, se consideriamo p vertici sulle $p-1$ righe abbiamo che almeno due si trovano sulla stessa riga (principio dei cassetti), e dunque sono uniti da un arco rosso, e perciò non fanno parte di un K_p blu.

Assieme alla (2) abbiamo quindi:

$$(p-1)(q-1)+1 \leq R(p,q) \leq \binom{p+q-2}{p-1}. \tag{3}$$

Molto poco si sa del valore effettivo dei numeri di Ramsey. Abbiamo visto che $R(3,3)=6$ e che $R(3,4)=9$. Oltre a questi, a tutt'oggi (2005) sono noti soltanto $R(3,5)=14$, $R(3,6)=18$, $R(3,7)=23$, $R(3,9)=36$ e $R(4,4)=18$, $R(4,5)=25$. Per altre coppie p,q, oltre alle maggiorazioni e minorazioni date dalla (3), che sono spesso grossolane, esistono stime un po' più precise. Ad esempio, per $R(4,6)$ la (3) dà un valore compreso tra 16 e 56, mentre si può dimostrare che il valore è compreso tra 35 e 41.

Diamo ora, per $p=q$, una minorazione migliore della $(p-1)^2+1$ data dalla (3), dimostrando che $R(p,p) \geq 2^{(p-2)/2}$, $p \geq 3$. Sia n un intero e coloriamo gli archi di K_n con due colori. Vi sono in tutto $2^{\binom{n}{2}}$ colorazioni. Quante di queste danno luogo a un K_p monocromatico? Fissato un K_p, tra tutte $2^{\binom{p}{2}}$ colorazioni di questo due sole sono monocromatiche, e dunque tra tutte le $2^{\binom{n}{2}}$ di K_n, ve ne sono $2^{\binom{n}{2}}\frac{2}{2^{\binom{p}{2}}}$ per le quali il fissato K_p è monocromatico. Poiché vi sono $\binom{n}{p}$ grafi K_p in K_n, abbiamo al più $\binom{n}{p}2^{\binom{n}{2}}\frac{2}{2^{\binom{p}{2}}}$ colorazioni che danno luogo a un K_p monocromatico. Ne segue che se:

$$\binom{n}{p}2^{\binom{n}{2}}\frac{2}{2^{\binom{p}{2}}} < 2^{\binom{n}{2}}$$

esiste una colorazione priva di K_p monocromatici. In altri termini, se esiste n tale che

$$\binom{n}{p}\frac{2}{2^{\binom{p}{2}}} < 1$$

il corrispondente K_n ammette una colorazione senza K_p monocromatici. Prendiamo $n = \lfloor 2^{\frac{p-2}{2}} \rfloor$. Ricordando che $\binom{n}{p} < n^p$ e poiché $1-p(p-1)/2 < -p(p-2)/2$ si ha:

$$\binom{n}{p}\frac{2}{2^{\binom{p}{2}}} < n^p 2^{1-\frac{p(p-2)}{2}} < \lfloor 2^{\frac{p-2}{2}} \rfloor^p 2^{\frac{-p(p-2)}{2}} \leq 2^{\frac{p^2-2p-p^2+2p}{2}} = 2^0 = 1.$$

Ne segue $R(p,p) \geq 2^{\frac{p-2}{2}}$.

L'argomento ora usato si presta a una interpretazione probabilistica (e per questo motivo si chiama anche "metodo probabilistico"). Più precisamente, si colorino gli archi di K_n in modo casuale: dato un arco, si lancia una moneta e se il risultato è testa si colora l'arco di blu, se è croce si colora di rosso, e si ripete l'operazione per tutti gli archi. Un arco acquista dunque uno dei due colori con probabilità $\frac{1}{2}$; le colorazioni dei vari archi sono tra loro indipendenti. Si consideri ora un K_p; esso ha $\binom{p}{2}$ archi, quindi le colorazioni possibili sono $2^{\binom{p}{2}}$. La probabilità che tutti gli archi siano blu è allora $1/2^{\binom{p}{2}}$, e la stessa che siano tutti rossi. La probabilità di una colorazione monocromatica è allora $2/2^{\binom{p}{2}}$. In K_n vi sono $\binom{n}{p}$ grafi K_p, e dunque la probabilità che in una colorazione di K_n vi sia un K_p monocromatico è $P = \binom{n}{p}\frac{2}{2^{\binom{p}{2}}}$. Affermare che in qualunque colorazione di K_n esiste un K_p monocromatico, significa affermare che la probabilità di trovare un K_p monocromatico in ogni colorazione di K_n è uguale a 1. Se dunque per un certo n si ha $P < 1$, esiste almeno una colorazione del K_n corrispondente senza K_p monocromatici.

Per $n = \lfloor 2^{\frac{p-2}{2}} \rfloor$, si ha, prendendo il logaritmi dei due membri, $\log_2 n = \frac{p-2}{2}$ e $p = 2\log_2 n + 2$. In termini probabilistici ciò significa che una colorazione casuale di K_n è molto probabile che non contenga un $K_{2\log_2 n+2}$ monocromatico. Se ad esempio si vuole costruire una 2–colorazione degli archi di K_{1024} ($1024 = 2^{10}$), avendosi $2\log_2 2^{10} + 2 = 20 + 2 = 22$ si può colorare K_{1024} senza che vi siano K_{22} monocromatici lanciando una moneta $\binom{1024}{2}$ volte. La probabilità che la colorazione ottenuta contenga un K_{22} monocromatico è inferiore a $\frac{2^{11}}{20!}$.

Il numero di Ramsey $R(p,p)$ cresce dunque esponenzialmente al crescere di p. (La minorazione si può migliorare a $2^{p/2}$).

Esempi. 1. *Sia $a_1, a_2, \ldots, a_N$ una successione di numeri reali distinti, e sia $N \geq R(n,n)$. Allora esiste o una sottosuccessione crescente oppure una decrescente di lunghezza n* (il significato è il seguente: una successione di numeri reali, per quanto arbitraria, se è abbastanza lunga contiene sempre una sottosuccessione che presenta una certa regolarità). Infatti, sia $X = \{1, 2, \ldots, N\}$ l'insieme degli indici dei termini della successione; coloriamo le coppie $i, j \in X$ (gli archi di K_N), con $i < j$, in blu se $a_i < a_j$ e in rosso se $a_i > a_j$. Poiché $N \geq R(n,n)$, per il teorema, esiste in K_N o un K_n blu oppure un K_n rosso. Ma i vertici di un K_n blu sono gli indici di una successione crescente: se infatti $i_1 < i_2 < \ldots$ e gli archi sono blu, allora

$a_{i_1} < a_{i_2} < \dots$. Analogamente, i vertici di un K_n rosso sono gli indici di una successione decrescente.

Questo risultato si può precisare come segue. Sia $N = n^2 + 1$; allora in ogni successione di N numeri distinti $a_1, a_2, \dots, a_N$ esiste una sottosuccessione crescente o una descrescente di lunghezza $n + 1$. Infatti, poniamo:

c_i: numero di termini della più lunga successione crescente che termina in a_i;

d_i: numero di termini della più lunga successione decrescente che comincia in a_i.

A due numeri distinti a_h e a_k, $h < k$, della successione non può corrispondere una stessa coppia (c_i, d_i). Infatti, se $a_h < a_k$, allora $c_k > c_h$ (si può aggiungere almeno a_k in fondo alla successione crescente che termina in a_h); se $a_h > a_k$, allora $d_h > d_k$ (si può aggiungere almeno a_k in testa alla successione decrescente che inizia in a_h). I numeri c_i e d_i sono compresi tra 1 e N; se $N > n^2$, essi non possono essere tutti compresi tra 1 e n, altrimenti darebbero al massimo n^2 coppie, e dunque la successione data avrebbe al più $N \leq n^2$ termini, contro l'ipotesi. Per almeno un i si ha allora, $c_i > n$ o $d_i > n$, e dunque il termine corrispondente a_i è l'ultimo termine di una successione crescente di almeno $n + 1$ termini, o il primo di una successione decrescente lunga $n + 1$. Si osservi che, per la (3), $n^2 + 1$ è il valore minimo per $R(n + 1, n + 1)$.

Ad esempio, con $n = 3$, disponendo i numeri da 1 a 10 ($10 = 3^2 + 1$) come segue: 6,5,9,3,7,4,1,10,2,8, non vi sono successioni crescenti di quattro numeri, ma ce ne sono di decrescenti, come la 6,5,3,1 o la 9,7,4,2.

Con meno di $n^2 + 1$ numeri il risultato non è più vero. Sempre con $n = 3$, prendiamo i numeri da 1 a 9: nella successione 3,6,9,2,5,8,1,4,7, la massima lunghezza delle successioni crescenti o decrescenti è 3. Più in generale, nella successione dei numeri da 1 a n^2:

$$n, 2n, \dots, n^2, n-1, 2n-1, \dots, n^2-1, \dots, 1, n+1, \dots, (n-1)n+1$$

la massima lunghezza delle successioni crescenti o decrescenti è n (si veda anche l'*es.* 3).

Teorema 4. (Schur) *Per ogni r, esiste $N = N(r)$ tale che se i primi N numeri naturali sono ripartiti in r classi (sono colorati con r colori), vi sono due numeri a e b (non necessariamente distinti) tali che a,b e $a + b$ appartengono alla stessa classe (hanno lo stesso colore).*

Dim. Sia $N \geq R(3, 3, \dots, 3; 2)$ (r volte 3). Una r–colorazione degli interi $1, 2, \dots, N$ induce una $r-$colorazione degli archi di K_N con r colori secondo la seguente regola: dare all'arco $\{i,j\}$ il colore dell'intero $|i-j|$. Per definizione di N esiste, per il teorema di Ramsey più generale, un triangolo monocromatico $\{x,y,z\}$, cioè tre interi $x<y<z$ tali che $z-x, z-y$ e $y-x$ hanno lo stesso colore. Allora con $a=z-y$ e $b=y-x$ si ha $a+b=z-x$, e il risultato. $\diamondsuit$

Vediamo ora come estendere il teorema di Ramsey dalla colorazione delle coppie a quella dei sottoinsiemi con più di due elementi. Consideriamo il caso dei 3–sottoinsiemi e di 2 colori.

Teorema 5. *Siano $p,q \geq 3$. Allora esiste un intero positivo n tale che, colorando con due colori blu e rosso i $3-$sottoinsiemi un $n-$insieme, questo contiene o un $p-$sottoinsieme con tutti i $3-$sottoinsiemi di colore blu, oppure un $q-$sottoinsieme con tutti i $3-$sottoinsiemi di colore rosso.*

Dim. Per induzione su $p+q$. Per $p=3$ il risultato è ovvio: se non esistono 3–sottoinsiemi blu vuol dire che tutti i 3–sottoinsiemi sono rossi, e dunque si ha il risultato con $n=q$. Analogamente per $q=3$ con $n=p$. Supponiamo allora $p,q \geq 3$, e il risultato vero per $(p-1)+q$; esiste cioè n_1 tale che se un insieme con n_1 elementi viene colorato con due colori blu e rosso, allora o esiste un $(p-1)-$sottoinsieme, tutti i 3–sottoinsiemi del quale sono blu, oppure un $q-$sottoinsieme tutti i 3–sottoinsiemi del quale sono rossi. Analogamente per $p+(q-1)$: esiste n_2 tale che se un insieme con n_2 elementi viene colorato con due colori blu e rosso, allora esiste o un $p-$sottoinsieme, tutti i 3–sottoinsiemi del quale sono blu, oppure un $(q-1)-$sottoinsieme tutti i 3–sottoinsiemi del quale sono rossi.

Consideriamo ora il numero di Ramsey $R=R(n_1,n_2;2)$ e sia $n=R+1$. Dimostriamo che questo n è l'intero cercato. Coloriamo l'insieme $V=\{1,2,\ldots,R,R{+}1\}$ con due colori, e a partire da questa colorazione coloriamo il grafo completo K_R dando all'arco (i,j) il colore del 3–s.i $\{i,j,R+1\}$. Per definizione di R, esistono o un K_{n_1} con tutti gli archi blu o un K_{n_2} con tutti gli archi rossi. Per fissare le idee supponiamo che esista un tale K_{n_2}, e sia V_2 il relativo insieme di vertici. In particolare, se $i,j \in V_2$, la terna $\{i,j,R{+}1\}$ di elementi di V è blu. Ma per l'ipotesi induttiva, in V_2 esiste o un $p-$sottoinsieme con tutti i 3–sottoinsiemi blu, o un $(q-1)-$sottoinsieme con tutti i 3–sottoinsiemi rossi. Nel primo caso abbiamo un $p-$sottoinsieme di V con tutte le terne gialle, e il teorema è dimostrato. Supponiamo allora che esista un $(q-1)-$sottoinsieme W di V_2 con tutti i 3–sottoinsiemi rossi; per ogni $i,j \in W$ il 3–sottoinsieme $\{i,j,R{+}1\}$ è rosso, e dunque i 3–sottoinsiemi del $q-$sottoinsieme $W \cup \{R+1\}$ sono rossi. $\diamondsuit$

Scriviamo $R_k(p,q)$ per $R(p,q;k)$. Dalla dimostrazione del teorema segue:

$$R_3(p,q) \leq R_2(R_3(p-1,q), R_3(p,q-1)) + 1$$

che permette di dimostrare l'esistenza dei numeri di Ramsey R_3 per induzione, a partire da quella degli R_2. In generale, per $k-$sottoinsiemi, $1 < k <$min(p,q), si può dimostrare, in modo analogo,

$$R_k(p,q) \leq R_{k-1}(R_k(p-1,q), R_k(p,q-1)) + 1.$$

(Dati X di cardinalità il secondo membro della precedente disuguaglianza, e $x \in X$, colorare un $(k-1)-$sottoinsiemi $\sigma \in Y = X \setminus \{x\}$ con il colore del $k-$sottoinsieme $\sigma \cup \{x\}$; per induzione Y ha un sottoinsieme di cardinalità $R_k(p-1,q)$ con tutti i $(k-1)-$sottoinsiemi blu, ecc.).

Nota. Teoremi di tipo Ramsey si hanno non solo per insiemi ma anche per strutture, ad esempio quella di spazio vettoriale. Si ha il seguente risultato: *dati un campo finito K e tre interi r,k e p, esiste n tale che, colorando con r colori i sottospazi di dimensione k dello spazio vettoriale di dimensione n su K, esiste un sottospazio di dimensione p i cui sottospazi di dimensione k hanno tutti lo stesso colore.*

Nota. Il teorema di Ramsey si può generalizzare come segue ($k = 2$). Supponiamo che gli n vertici del grafo completo K_n dato dal teorema siano numerati $1, 2, \ldots, n$; allora si può trovare un insieme di p vertici, uno dei quali porta un numero minore di p, e tale che il K_p corrispondente sia monocromatico. Se l'esistenza di $R(r,p)$ (il minimo n) si può dimostrare per tutte le coppie r, p nell'aritmetica di Peano (AP) (cioè con metodi finitistici), per il nuovo minimo $R^*(r,p)$ ciò non è più possibile (si può dimostrare per ogni fissata coppia r, p ma non in generale per tutte le coppie). Si tratta di un risultato di Paris e Harrington (1977), ed è dovuto alla crescita estremamente rapida di $R^*(r,p)$ come funzione di r e p. Si ha così un risultato di tipo Gödel, cioè di una proposizione che si può enunciare in AP, che è vera, ma non è dimostrabile in AP.

2 Il caso infinito

Enunciamo, senza dimostrazione, un famoso teorema di van der Waerden, dimostrato nel 1927, dunque prima del teorema di Ramsey, ma che rientra nello stesso ordine di idee di questo:

Teorema 6. *Dati due numeri naturali r ed l esiste un numero naturale $W(r,l)$ tale che, se si colorano i numeri $1, 2, \ldots, W(r,l)$ con r colori, esiste una progressione aritmetica monocromatica $a, a+d, \ldots, a+(l-1)d$ di lunghezza l.* $\diamondsuit$

Ad esempio, $W(2,3) \geq 9$. Infatti, colorando i numeri da 1 a 8 con due colori B ed R come segue: $BRRBBRRB$ non vi sono tre interi in progressione aritmetica. (Si può dimostrare che $W(2,3) = 9$).

La forma originaria del teorema (forma "infinita"), equivalente a quella ora vista , è la seguente:

Teorema 6'. *Se gli interi positivi sono ripartiti in un numero finito r di classi* (*il numero r del* Teor. 6)*, una delle classi contiene una progressione aritmetica arbitrariamente lunga.* ♢

Non è però immediato verificare l'equivalenza dei due enunciati. Non si può richiedere invece che una delle classi contenga una progressione aritmetica infinita. Basta infatti prendere $r = 2$ e ripartire gli interi in due classi, blu e rossa, colorando 1 di blu, 2 e 3 di rosso, 4,5 e 6 di blu, 7,8,9 e 10 di rosso, e così via. Se la differenza costante della progressione è d, a un certo punto la progressione incontrerà un intero blu, e a un certo punto anche uno rosso, e cioè non appena i blocchi blu e rossi raggiungono la lunghezza d. Non si può quindi chiedere che vi sia una progressione aritmetica infinita monocromatica. Il teorema di van der Waerden afferma che se ne può ottenere una monocromatica che pur non essendo infinita è però arbitrariamente lunga.

Se non si richiedono altre proprietà (come ad esempio, nel caso degli interi, che l'insieme infinito monocromatico sia una progressione aritmetica) ma solo che esista semplicemente un insieme infinito monocromatico, allora si ottiene una forma "infinita" del teorema di Ramsey (che è poi la versione originaria) della quale ora ci occupiamo. Come nel caso finito, il prototipo è il principio dei cassetti:

se gli elementi di un insieme infinito sono colorati con un numero finito di colori, allora esiste un sottoinsieme infinito monocromatico.

Teorema 7. (RAMSEY) *Siano k,r interi positivi, e supponiamo che i k–sottoinsiemi di un insieme infinito X siano colorati con r colori. Allora esiste un sottoinsieme infinito Y di X con tutti i k–sottoinsiemi dello stesso colore.*

Dim. Dimostriamo il teorema nel caso $k = 2$, e un insieme numerabile $\mathbf{N}$ contenuto in X (basta scegliere una successione di elementi di X). Dimostriamo cioè che se le coppie di numeri naturali sono colorate con r colori, allora esiste almeno un sottoinsieme monocromatico infinito di queste coppie (ovvero, in termini di grafi, colorando con r colori gli archi di un grafo completo K_N, dove N è l'insieme degli interi, esiste un $K_M \subseteq K_N$, con M infinito, tutti gli archi del quale hanno lo stesso colore). Definiamo una successione di elementi (vertici) $a_1, a_2, \ldots$ e una di sottoinsiemi $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ come segue: sia $a_0 \in \mathbf{N}$ e poniamo $A_1 = \mathbf{N} \setminus \{a_0\}$. Le coppie (gli archi) $(a_0, b), b \in A_1$ sono infinite perché tale è A_1, e dunque ne esistono infinite di uno stesso colore; siano queste $(a_0, b),\ b \in B_1 \subseteq A_1$. Sia $a_1 \in B_1$, $A_2 = B_1 \setminus \{a_1\}$; allora A_2 contiene un sottoinsieme infinito B_2 tale che le coppie (a_1, b), $b \in B_2$, hanno lo stesso colore, uguale o diverso dal precedente. Continuando in questo modo otteniamo una successione $a_0, a_1, a_2, \ldots$ di interi e una di sottoinsiemi $B_0 = N \supseteq B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$ con $a_i \in B_i$ tali che per ogni a_i le coppie $(a_i, b),\ b \in B_{i+1}$ hanno uno stesso colore (si osservi che per ogni $i = 0, 1, 2 \ldots$ il colore delle coppie (a_i, b) dipende solo da a_i):

$$
\begin{gathered}
\{(a_0, b),\ b \in B_1\},\ \text{colore } c_0; \\
\{(a_1, b),\ b \in B_2\},\ \text{colore } c_1; \\
\vdots \\
\{(a_i, b),\ b \in B_{i+1}\}\,\text{colore } c_i; \\
\vdots
\end{gathered}
$$

Poiché i colori sono in numero finito, un colore, e sia c, deve comparire infinite volte in questa lista; siano allora:

$$
\begin{gathered}
\vdots \\
(a_{i_1}, b),\ b \in B_{i_1+1},\quad \text{colore } c; \\
\vdots \\
(a_{i_2}, b),\ b \in B_{i_2+1},\quad \text{colore } c; \\
\vdots \\
(a_{i_s}, b),\ b \in B_{i_s+1},\quad \text{colore } c; \\
\vdots
\end{gathered}
$$

infinite coppie tutte dello stesso colore c. Dico che l'insieme

$$S = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots\}$$

è l'insieme cercato. Infatti, S è infinito; inoltre, le coppie (a_{i_j}, a_{i_t}) di elementi di S sono coppie che si trovano nella lista precedente, hanno cioè tutte il colore c. Infatti, sia $i_j < i_t$; allora $a_{i_t} \in B_{i_t} \subseteq B_{i_t-1} \subseteq \ldots \subseteq B_{i_j+1}$, e perciò la coppia (a_{i_j}, a_{i_t}) è una delle coppie dell'insieme $\{(a_{i_j}, b),\ b \in B_{i_j+1}\}$ che fa parte della lista di sopra, e dunque ha il colore c. $\diamondsuit$

Come applicazione del Teor. 7 dimostriamo la seguente versione infinita del teorema di Schur:

se si colorano i numeri naturali con r colori esistono due numeri a e b tali che a,b e $a+b$ hanno lo stesso colore.

Diamo alla coppia (x, y) il colore di $|x - y|$ (come nel caso finito). Per il Teor. 7, con k=3, esiste un triangolo monocromatico e come nel caso finito si ha il risultato.

Il teorema di Ramsey finito si può dedurre da quello infinito utilizzando il seguente lemma di König sui grafi orientati. Un grafo si dice *orientato* se i suoi archi sono orientati, cioè se le coppie di vertici (u, v) che danno gli archi sono coppie ordinate; diremo che l'arco (u, v) *esce* da u ed *entra* in v. Un *cammino orientato* infinito è una successione infinita di vertici distinti $v_0, v_1, v_2, \ldots$ tale che (v_i, v_{i+1}) è un arco orientato per $i = 0, 1, 2, \ldots$

Lemma. (König) *Sia dato un albero infinito orientato nel quale da ogni vertice escono solo un numero finito di archi, e sia u un vertice tale che, per ogni n, esiste un cammino di lunghezza n il cui vertice iniziale è u. Allora esiste un cammino infinito il cui vertice iniziale è u.*

Dim. Poiché esistono solo un numero finito di archi uscenti da u, almeno uno di questi, e sia (u, u_1), è tale che per ogni n, u_1 è il punto d'inizio di un cammino di lunghezza n. Il vertice u_1 si trova allora nelle condizioni di u, e proseguendo come con u troviamo un cammino infinito $u_0 = u, u_1, \ldots$ $\diamondsuit$

Ci serviremo di questo lemma per dimostrare la versione finita del teorema di Ramsey (Teor. 1, generalizzazione con $k \geq 2$ e $p_1 = p_2 = \ldots = p_r = p$) a partire da quella infinita (Teor. 7). Enunciamo di nuovo il teorema.

Teorema. *Dati r, k, p interi positivi, esiste un intero positivo n con la proprietà che se i $k-$sottoinsiemi di un insieme con n elementi sono colorati con r colori, esiste un sottoinsieme con p elementi monocromatico.*

Dim. Consideriamo l'insieme infinito di vertici $v_1, v_2, \ldots$, e i corrispondenti grafi completi K_1 su v_1, K_2 su v_1 e v_2, $\ldots$, K_n su $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ Ci limitiamo al caso $k = 2$ (gli archi dei K_n). Supponiamo che il Teor. 1 sia falso per due interi r, p. Ciò significa che per ogni intero positivo n esiste una $r-$colorazione c_n degli archi di K_n che non crea un K_p monocromatico. Data una colorazione di questo tipo c_{n+1} di K_{n+1}, sopprimendo gli archi che uniscono il vertice v_{n+1} di K_{n+1} ai vertici di K_n si ottiene un K_n anch'esso colorato con una c_n del tipo richiesto (altrimenti K_n, e quindi anche K_{n+1}, conterrebbe un K_p monocromatico). Possiamo considerare allora l'albero i cui vertici sono colorazioni c_n di K_n che non creano K_p monocromatici, e c'è un arco che unisce c_n a c_{n+1} se c_n è una restrizione della c_{n+1} agli archi di K_n. Le ipotesi del lemma di König sono soddisfatte: le colorazioni sono in numero finito e dunque anche i gradi dei vertici; inoltre per ogni n si ha un cammino di lunghezza n da c_1 a c_n (basta prendere una c_n di K_n e considerarne le restrizioni fino a c_1). Esiste allora un cammino infinito $C = \{c_1, c_2, \ldots\}$. Colorando i sottoinsiemi con 2 elementi dell'insieme infinito $N = \{v_1, v_2, \ldots\}$ nel modo indicato dalle colorazioni $c_n \in C$ dei K_n, gli archi di K_N, cioè le coppie dell'insieme infinito N, vengono ripartiti nelle r classi date dai colori senza creare K_p monocromatici; ma ciò contraddice il teorema di Ramsey infinito (Teor. 7). $\diamondsuit$

In modo analogo dimostriamo, sempre utilizzando il lemma di König, che è possibile ottenere il teorema di van der Waerden finito (Teor. 6) da quello infinito (Teor. 6'). Come sopra, la dimostrazione è per assurdo. Supponiamo che esistano r e l, tali che per ogni n esista una partizione p_n (colorazione) di $\{1, 2, \ldots, n\}$ in r classi (r colori) senza che vi siano progressioni aritmetiche di lunghezza l in alcuna delle parti (progressioni monocromatiche di lunghezza l). Prendiamo come vertici dell'albero del lemma di König le partizioni p_n; c'è un arco tra p_n e p_{n+1} se le due partizioni coincidono su $\{1, 2, \ldots, n\}$. Un cammino infinito, che esiste per il lemma di König, insegna come ripartire gli interi in r classi senza che vi siano progressioni aritmetiche di lunghezza l monocromatiche in alcuna classe, in contraddizione con il teorema di van der Waerden infinito.

Esempi. 1. Dimostriamo, facendo uso del Teor. 7, che ogni successione $\{a_i\}$ di numeri reali contiene una sottosuccessione monotona (crescente, decrescente o costante). La dimostrazione è analoga a quella già vista nel caso finito. Sia $\{a_i\}$ la successione data. Con X uguale all'insieme degli interi, coloriamo le coppie di interi (i, j), con $i < j$, in blu se $a_i < a_j$, in rosso se $a_i > a_j$ e in verde se $a_i = a_j$. Per il teorema esiste un sottoinsieme infinito Y degli interi tutte le coppie del quale hanno uno stesso colore. Se questo colore è blu, gli elementi di Y sono indici di una successione crescente: se infatti $i_1 < i_2 < \ldots$ e gli archi sono blu, allora $a_{i_1} < a_{i_2} < \ldots$. Se le coppie di elementi di Y sono rosse, dati $i, j \in Y$ si ha $a_i > a_j$, e se $i_1 < i_2 < \ldots$ la sottosuccessione $\{a_i\}$, $i \in Y$, è decrescente. Se infine sono verdi si ha una sottosuccessione costante.

2. Dimostriamo ora il teorema di Bolzano–Weierstrass: *ogni successione limitata di numeri reali contiene una sottosuccessione convergente.* Per quanto appena visto sappiamo che la successione contiene una sottosuccessione monotona. Sia allora $\{a_i\}$ una successione limitata e monotona di numeri reali. Supponiamo che sia crescente; sia l l'estremo superiore dell'insieme degli a_i, e dimostriamo che questo l è il limite della successione. Infatti, dato $\varepsilon > 0$, esiste $n = n(\varepsilon)$ tale che $a_n > l - \varepsilon$, ed essendo la successione crescente, per ogni $m \geq n$ si ha $a_m > a_n$ e dunque $a_m > l - \varepsilon$. Ma poiché l è l'estremo superiore si ha anche $a_m < l + \varepsilon$. Dunque $|a_m - l| < \varepsilon$ per ogni $m \geq n$, e allora, per definizione, l è il limite della successione. Se la successione è decrescente si ha l'analogo considerando l'estremo inferiore; se è costante è banalmente convergente.

3 Poligoni convessi

Consideriamo infine alcune applicazioni di tipo geometrico del teorema di Ramsey che riguardano i poligoni convessi. Ricordiamo che un insieme di punti del piano si dice *convesso* se contenendo due punti contiene anche il segmento di retta che li congiunge. L'*involucro convesso* di un insieme di punti è il più piccolo insieme convesso che lo contiene (l'intersezione di tutti gli insiemi convessi che lo contengono). Un *poligono convesso* è l'involucro convesso di un insieme finito di punti.

Vediamo due proprietà preliminari dei poligoni convessi; ricordiamo che punti del piano si dicono essere in posizione *generica* se non ce ne sono mai tre su una stessa retta.

a) Dati 5 punti in posizione generica, 4 sono i vertici di un quadrilatero convesso.

Se l'involucro convesso è un quadrilatero non c'è niente da dimostrare; se è un pentagono, quattro vertici qualunque formano un quadrilatero convesso. Sia allora un triangolo, con vertici A, B e C, e siano D e E gli altri due punti. La retta DE incontra due lati del triangolo, e siano AB e AC, e il quadrilatero $BCDE$ è convesso.

b) Dati $n \geq 4$ punti del piano, se a 4 a 4 essi sono vertici di un quadrilatero convesso, allora gli n punti sono i vertici di un poligono convesso.

Altrimenti, uno dei punti, e sia A, appartiene all'involucro convesso dei rimanenti $n - 1$; l'involucro avrà come vertici alcuni di questi vertici. Allora

A si trova all'interno di uno dei triangoli formati da tre dei vertici, e siano B, C e D, o sul segmento BC. Ma allora $ABCD$ non sono i vertici di un quadrilatero convesso.

Teorema 8. *Sia $p \geq 4$ un intero positivo. Allora esiste $N = N(p)$ tale che tra N punti nel piano in posizione generica ve ne sono p che sono i vertici di un poligono convesso.*

Dim. Sia $N = R(p, 5; 4)$. Dati N punti nel piano, coloriamo un sottoinsieme con 4 punti di blu se i punti formano un quadrilatero convesso, di rosso altrimenti (cioè se uno dei punti è contenuto nell'involucro convesso degli altri tre). Per il teorema di Ramsey, o esistono p punti tali che ogni 4–sottoinsieme è blu, oppure 5 punti tali che i 4–sottoinsiemi di questi sono rossi. Per a) non vi sono insiemi di 5 punti colorati di rosso. Dunque il secondo caso è impossibile. Sussiste allora il primo caso, e per b) i p punti formano un poligono convesso. $\diamondsuit$

Esercizi

Principio dei cassetti

1. Dimostrare che in un grafo vi sono due vertici che hanno lo stesso grado.

2. Coloriamo i punti del piano con due colori. Dimostrare che esiste un rettangolo con i vertici dello stesso colore.

3. Supponiamo che a una cena i commensali siano seduti a un tavolo rotondo. Se i loro nomi sono scritti su dei segnaposto, e nessuno è seduto davanti al proprio nome, è possibile ruotare il tavolo in modo che almeno due persone siano sedute davanti al proprio nome? (Si suppone che i nomi siano tutti diversi.)

4. Dimostrare che scegliendo più della metà degli interi da 1 a n ve ne sono due la cui somma è $n + 1$.

5. Dimostrare che dati n interi positivi, ve ne sono alcuni (anche uno solo) la cui somma è divisibile per n.

6. Dimostrare che scegliendo comunque $n + 1$ interi tra 1 e $2n$:
i) ve ne sono due la cui somma è dispari;
ii) ve ne sono due relativamente primi;
iii) ve ne sono due tali che uno è multiplo dell'altro (*sugg. per iii*): ogni intero è della forma $2^k h$, con $k \geq 0$ e h dispari).

7. Dati cinque punti in un quadrato di lato 1 dimostrare che almeno due distano meno di $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. Dimostrare che in qualunque modo si scelgano cinque punti in un triangolo equilatero di lato 1 ve ne sono sempre due la cui distanza è minore o uguale a $1/2$.

9. Sia n dispari, e sia $a_1, a_2, \ldots, a_n$ una permutazione di $1, 2, \ldots, n$. Dimostrare che una delle differenze $i - a_i$ è un numero pari. Cosa si può dire se n è pari?

10. Dimostrare che:
i) dati comunque 5 interi ne esistono 3 la cui somma è divisibile per 3;
ii) dati comunque 17 interi ne esistono 5 la cui somma è divisibile per 5.
iii) dati comunque 37 interi ne esistono 7 la cui somma è divisibile per 7.
iv) in generale, se p è un numero primo, dati comunque $(p-1)^2 + 1$ interi ne esistono p la cui somma è divisibile per p.

11. Dimostrare che scegliendo 55 numeri distinti tra 1 e 100 (inclusi) c'è una coppia la cui differenza è uguale a 10 e un'altra la cui differenza è uguale a 12. Dimostrare che il risultato non è più vero se si richiede che la differenza sia uguale a 11. (*Sugg.*: nel primo caso considerare le 10 coppie sui primi 20 numeri: (1,11),(2,12),..., (10,20), le 10 sui secondi venti: (21,31),...,(30,40),..., le 10 sugli ultimi 20: (81,91),...,(90,100); nel secondo le 12 coppie: (1,13),(2,14),...,(12,24), e analogamente per i numeri da 25 a 48,..., da 73 a 96, lasciando da soli 97,98,99,100).

12. Dimostrare che scegliendo più della metà dei sottoinsiemi di un insieme con n elementi:
i) ve ne sono almeno due tali che uno è contenuto nell'altro. (*Sugg.*: fissato un elemento x dell'insieme considerare le coppie $\{A, A \cup \{x\}\}$, per ogni sottoinsieme A che non contiene x. Queste coppie sono in numero di 2^{n-1});
ii) se nessuno dei sottoinsiemi scelti è vuoto, ve ne sono almeno due tali che nessuno dei due è contenuto nell'altro. (*Sugg.*: considerare le coppie di sottoinsiemi costituite da un sottoinsieme e dal proprio complementare; queste coppie sono in numero di 2^{n-1}).

13. Dimostrare la seguente forma del principio dei cassetti (*principio di Fubini*): se ogni cassetto contiene in media p oggetti, allora c'è almeno un cassetto con almeno p oggetti e almeno un cassetto con al più p oggetti (*Sugg.*: se p è la media aritmetica di n interi, almeno uno degli interi è maggiore o uguale a p e almeno uno è minore o uguale a p).

Teoria di Ramsey

1. Quanto vale il numero di Ramsey $R(p_1, p_2, \ldots, p_r; 1)$?

2. Dimostrare che colorando K_6 e K_7 con due colori si ottengono, rispettivamente, almeno due e almeno tre triangoli monocromatici.

3. Dimostrare la seguente generalizzazione del risultato visto negli esempi: data una successione di numeri reali distinti $a_1, a_2, \ldots, a_{mn+1}$ esiste o una sottosuccessione crescente di lunghezza $m+1$ oppure una decrescente di lunghezza $n+1$.

4. Dimostrare che la (1) del Teor. 1 si può generalizzare a tre colori come segue:

$$R(p,q,r) \le R(p-1,q,r) + R(p,q-1,r) + R(p,q,r-1) - 1,$$

e a s colori:

$$\begin{aligned} R(p_1,p_2,\ldots,p_s) &\le R(p_1-1,p_2,\ldots,p_s) + R(p_1,p_2-1,\ldots,p_s) + \cdots \\ &+ R(p_1,p_2,\ldots,p_s-1) - s + 2. \end{aligned}$$

5. Dimostrare che $R(3,3,3) \le 17$ (si può dimostrare che vale il segno di uguaglianza). (*Sugg.*: applicare l'*es.* 15, oppure direttamente osservando che fissato un vertice v, vi sono almeno 6 archi incidenti a v di uno stesso colore).