G i u s e p p e   T a l l i n i

VARIETA' ALGEBRICHE PROIETTIVE

Appunti raccolti da R.Rota

Indice

1.- Generalità sulle varietà algebriche proiettive.

Sia $N(r,K)$ lo spazio proiettivo numerico di dimensione r su un campo K algebricamente chiuso. Consideriamo il gruppo proiettivo lineare $PGL(r+1, K)$ di dimensione $r+1$ su K, ossia il gruppo quoziente $GL(r+1, K) / (K - \{0\})$, i cui elementi sono le matrici quadrate non degeneri di ordine $r+1$ a coefficienti in K, considerate a meno di un fattore di proporzionalità non nullo di K. Allo spazio $N(r, K)$ è associato il gruppo Ω delle omografie o proiettività

$$\Omega = \{X'=AX \ , \ A \in PGL(r+1, K) = GL(r+1, K) / (K - \{0\})\},$$

i cui elementi sono le omografie o proiettività, che al punto X di $N(r,K)$ fanno corrispondere il punto $X'=AX$ di $N(r, K)$.

Si vede facilmente che il gruppo Ω è isomorfo al gruppo proiettivo lineare $PGL(r+1, K)$.

Ω determina in $N(r, K)$ la geometria proiettiva, cioè lo studio delle proprietà delle figure invarianti rispetto alle proiettività.

Definiamo varietà algebrica proiettiva di $N(r, K)$ il luogo dei punti di $N(r, K)$ le cui coordinate soddisfano un sistema di equazioni algebriche omogenee

$$\{f_i(x_0, x_1, \ldots, x_r)=0\}_{i\in\mathcal{J}}.$$

Nel seguito talvolta abbrevieremo in VAP il termine varietà algebrica proiettiva.

Con dimostrazioni analoghe a quelle già note nel caso affine (Cfr. G. Tallini, Strutture Geometriche, Liguori Ed. Napoli, 1982, n.4, pp.27-29; n.19, pp.88-89) si prova che:

(1.1) $\emptyset$ e $N(r, K)$ sono varietà algebriche proiettive;

(1.2) l'intersezione di varietà algebriche proiettive è una varietà algebrica proiettiva;

(1.3) l'unione di due varietà algebriche proiettive è una varietà algebrica proiettiva.

Le varietà algebriche proiettive costituiscono quindi i chiusi della topologia di Zariski di $N(r, K)$. Questa topologia è T_1-separata, come facilmente si prova (ogni punto di $N(r, K)$ è un chiuso , cioè una VAP) ed è compatta; inoltre è irriducibile, cioè l'intersezione di due qualsiansi aperti non vuoti è un aperto non vuoto, e quindi connessa. In modo analogo si trasportano al caso proiettivo tutte le nozioni già note nel caso affine.

Alla topologia di Zariski di $N(r, K)$ si può poi associare il <u>reticolo delle varietà algebriche proiettive</u> rispetto alla relazione di inclusione, reticolo che risulta distributivo.

Una VAP si dice <u>irriducibile</u> se è un sup-irriducibile del reticolo suddetto, cioè se è una VAP che non risulta unione di due VAP, una non contenuta nell'altra. Si può provare che ogni VAP è unione di un numero finito di VAP irriducibili e quindi lo studio delle VAP si riduce a quello delle VAP irriducibili.

La topologia di Zariski di una VAP è quella indotta dalla topologia di Zariski di $N(r, K)$ su V, cioè quella i cui chiusi sono le sottovarietà algebriche proiettive di V. Essa è T_1-separata, compatta; inoltre, se V è irriducibile, la topologia di V è irriducibile, onde V è connessa.

Data una VAP irriducibile V di $N(r, K)$, diversa da $\emptyset$ e da tutto $N(r, K)$, rimane determinato un intero d, con $0 \leq d \leq r-1$, tale che ogni sottospazio di $N(r, K)$ di dimensione $r-d$ ha intersezione non vuota con V ed esiste un sottospazio di dimensione $r-d-1$ ed intersezione vuota con V. L'intero d prende il nome di <u>dimensione di V</u>.

Se V è una ipersuperficie, cioè è rappresentata da una sola equazione algebrica, allora $d = r-1$. Si può provare viceversa che ogni VAP irriducibile di dimensione $r-1$ è una ipersuperficie. Se $d=1$, V prende il nome di curva algebrica.

Una VAP si dice pura, se tutte le sue componenti irriducibili hanno la stessa dimensione.

Sia V una VAP irriducibile di dimensione d; consideriamo gli spazi proiettivi di dimensione $(r-d)$ intersecanti V in un numero finito di punti. Diciamo ordine di V il massimo numero di punti in cui gli spazi sopra considerati intersecano V.

Considerate due VAP irriducibili V e W, diciamo trasformazione unirazionale tra V e W una applicazione continua, nelle topologie di Zariski indotte, di un fissato aperto D non vuoto di V in W, che conservi le funzioni razionali; D prende il nome di dominio della trasformazione. Chiameremo trasformazione birazionale tra V e W un omeomorfismo f, nelle topologie di Zariski indotte, tra un aperto D_V non vuoto di V e un aperto D_W non vuoto di W, tale che, sia f, sia f^{-1}, conservino le funzioni razionali. Gli aperti D_V e D_W si dicono rispettivamente <u>dominio</u> e <u>codominio</u> della trasformazione .

Una <u>VAP</u> irriducibile di sirà <u>birazionale</u> o <u>razionale</u> se è birazionalmente equivalente ad uno spazio proiettivo.

Se f è una trasformazione birazionale tra V e W, ogni sottovarietà razionale di V si muta evidentemente in una sottovarietà razionale di W; quindi, se V contiene delle rette, piani, . . . , sottospazi, essi si trasformano, mediante f in curve razionali, superfici razionali, . . . , varietà razionali.

2.- Curve algebriche razionali.

Cominciamo con il dare alcuni esempi di curve algebriche razionali.

Siano $N(2, K)$ un piano proiettivo su un campo algebricamente chiuso K, C una conica non degenere di $N(2, K)$, A un punto di C e r una retta non per A; sia A' l'intersezione di r con la retta tangente C in A. Fissato un punto P di C distinto da A, sia P' l'intersezione di r con la retta AP congiungente A con P. L'applicazione $f : C - \{A\} \longrightarrow r - \{A'\}$, che al punto P di $C - \{A\}$ fa corrispondere il suddetto punto $P' = f(P)$ di $r - \{A'\}$ è chiaramente una biiezione. E' evidente che le coordinate di P e quelle di P' sono legate da equazioni algebriche; inoltre la biiezione f conserva la topologia di Zariski (cioè è un omeomorfismo tra $C - \{A\}$ e $r - \{A'\}$) e le funzioni razionali. Una conica è quindi birazionalmente equivalente ad una retta, cioè:

(2.1) <u>una conica è una curva razionale.</u>

Ricordiamo che un punto P di una curva algebrica C di $N(2, K)$ si dice <u>s-plo</u> se ogni retta per esso ha in P almeno s intersezioni con la curva ed esiste qualche retta avente esattamente s intersezioni in P; le tangenti principali alla curva in P sono le sole rette aventi più di s intersezioni in P con la curva. Si prova che un punto P di C è s-plo se, e solo se, in P si annullano tutte le derivate fino a quelle di ordine $(s-1)$, se la caratteristica di K è maggiore dell'ordine n di C.

Sia M un <u>monoide</u> di $N(2, K)$, cioè una curva algebrica irriducibile di ordine n, avente un punto $(n-1)$-plo. Dimostriamo che:

(2.2) <u>un monoide è una curva razionale.</u>

Siano A il punto $(n-1)$-plo di M e r una retta di $N(2, K)$ non contenente A. Per A passano esattamente $(n-1)$ tangenti principali, distinte o coincidenti, ossia rette che hanno n intersezioni in A con M, le quali intersecano r in $n-1$ punti $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{(n-1)}$. Ogni altra retta del fascio di centro A interseca M in A con molteplicità $n-1$ e in un altro unico punto P diverso da A. Posto $P' = r \cap AP$, la applicazione $f : M - \{A\} \longrightarrow r - \{A'_1, A'_2, \ldots, A'_{(n-1)}\} = r'$, che al punto P fa corrispondere il punto P' è una biiezione, che risulta, come si vede facilmente, un omeomorfismo tra l'aperto $M - \{A\}$ e l'aperto r', nelle rispettive topologie di Zariski indotte. La biiezione f è poi chiaramente algebrica e conserva le funzioni razionali, cioè è una trasformazione birazionale, onde la (2.2).

Sia ora Q una quartica irriducibile di $N(2, K)$ avente tre punti doppi A', A'', A'''. Dimostriamo che:

(2.3) <u>Q è una curva razionale.</u>

Cominciamo intanto ad osservare che, fissato un punto A semplice di Q, i punti A', A'', A''' e A sono a tre a tre non allineati, per il teorema di Bezout e per l'irriducibilità di Q. Consideriamo il fascio F costituito dalle coniche passanti per i quattro punti A', A'', A''' e A; se $f(X)=0$ e $g(X)=0$ sono le equazioni di due elementi di F, l'equazione del fascio è $\lambda f(X) + \mu g(X) = 0$. Al variare in K dei parametri λ e μ si ottengono tutte le coniche di F. Notiamo che il fascio F, e più in generale ogni fascio di coniche, è birazionalmente equivalente ad una retta proiettiva r, perché la biiezione $\varphi : F \dashrightarrow r$, che alla conica $\lambda f(X) + \mu g(X) = 0$ di F fa corrispondere il punto di r di coordinate (λ, μ), è una trasformazione birazionale. Tra le coniche di F vi sono quelle tangenti la quartica Q nei punti A, A', A'', A''', cioè tangenti alle tangenti principali in A, A', A'', A''' di Q, ed esse costituiscono un insieme C di cardinalità finita e non superiore a sette. Una conica di $F - C$ allora, per il teorema di Bezout, interseca Q in A semplicemente, in A', A'', A''' dop-

piamente e quindi in un ulteriore unico punto $P \notin \{A, A', A'', A'''\}$.
L'applicazione $\psi : Q - \{A, A', A'', A'''\} \dashrightarrow F - C$, che trasforma il punto P di $Q - \{A, A', A'', A'''\}$ nella conica di $F - C$ passante per esso è un omeomorfismo tra l'aperto $Q - \{A, A', A'', A'''\}$ di Q e l'aperto $F - C$ di F , che conserva le funzioni razionali, perché la ψ si esprime algebricamente. Quindi ψ è una trasformazione birazionale tra Q e F , cioè, essendo F birazionalmente equivalente ad una retta, la Q è razionale, ossia la (2.3).

Sia $C(n)$ una curva algebrica di ordine n in $N(2, K)$. Essa si rappresenta con una equazione algebrica di grado n a coefficienti in K

$$(2.4) \qquad C(n) : \quad a_{00} + (a_{10}x + a_{11}y) + (a_{20}x^2 + a_{21}xy + a_{22}y^2) + \\ + \ldots + (a_{h0}x^h + a_{h1}x^{h-1}y + \ldots + a_{hh}y^h) + \\ + \ldots + (a_{n0}x^n + \ldots + a_{nn}y^n) = 0 .$$

Nella (2.4) compaiono linearmente $1 + 2 + \ldots + (n+1) = (n+1)(n+2)/2$ coefficienti omogenei. Si ha così che:

I.- Le curve algebriche di ordine n di $N(2, K)$ costituiscono un sistema lineare dipendente da $d_n = (n+1)(n+2)/2 - 1$ parametri.

Proviamo ora che:

II.- <u>Comunque si fissino $h \leq d_n$ punti distinti in $N(2, K)$, per essi passa un sistema lineare di $C(n)$ dipendente da $\delta \geq d_n - h$ parametri.</u>

<u>Dimostrazione.</u> Se si impone ad una curva algebrica di ordine n il passaggio per h punti fissati, si ottiene un sistema lineare di h equazioni nelle $d_n + 1$ incognite omogenee date dai coefficienti dell'equazione (2.4). Sia r il rango della matrice dei coefficienti di tale sistema; poiché $h \leq d_n$, sarà $r \leq h$. Come è noto, dalla teoria dei sistemi lineari, il sistema (2.4) ammette soluzioni dipendenti linearmente da esattamente $\delta = d_n - r \geq$ $\geq d_n - h$ parametri, onde l'asserto.

III.- <u>Una curva algebrica $C(n)$ di ordine n avente $(n-1)(n-2)/2 + 1$ punti doppi è sempre riducibile.</u>

<u>Dimostrazione.</u> Una curva algebrica $C(n-2)$ di ordine $(n-2)$ dipende linearmente da $d_{n-2} = n(n-1)/2 - 1$ parametri (cfr. prop. I). Cominciamo con l'imporre a $C(n-2)$ il passaggio per i punti doppi di $C(n)$ e per altri $n-3$ punti di $C(n)$. In questo modo si impongono $(n-1)(n-2)/2 +1 + (n-3) = (n-2)(n+1)/2$ condizioni lineari a $C(n-2)$, onde, per la prop. II, esiste un sistema lineare di $C(n-2)$ per tali punti dipendente da $d_{n-2} - (n-2)(n+1)/2 \geq 0$ parametri, e quindi esi-

ste almeno una $C(n-2)$ passante per i suddetti punti. La $C(n)$ ha in comune con la $C(n-2)$ considerata $(n-1)^2$ intersezioni: infatti $(n-1)^2 = 2\left[(n-1)(n-2)/2 + 1\right] + (n-3)$. Poiché, per il teorema di Bezout, una $C(n)$ interseca una $C(n-2)$ non componente di $C(n)$ in $n(n-2)$ punti, essendo $(n-1)^2 > n(n-2)$, la $C(n-2)$ considerata è necessariamente una componente della $C(n)$, onde l'asserto.

Dalla precedente proposizione si ha subito che:

IV.- <u>Il massimo numero D_n di punti doppi di una curva algebrica di ordine n irriducibile è</u>

(2.5) $$\underline{D_n = (n-1)(n-2)/2 .}$$

Possiamo ora generalizzare la (2.3) e provare la seguente proposizione:

V.- <u>Una curva algebrica $C(n)$ irriducibile di ordine n, avente $(n-1)(n-2)/2$ punti doppi, è una curva razionale.</u>

<u>Dimostrazione.</u> Consideriamo le curve algebriche di ordine $n-2$ passanti semplicemente per i $(n-1)(n-2)/2$ punti doppi di $C(n)$ e per altri $(n-3)$ punti di $C(n)$. Si impongono in questo modo $h = (n-1)(n-2)/2 + (n-3)$ condizioni lineari, onde tali curve di ordine $n-2$ dipendono linearmente da $\delta \geq d_{n-2} - h \geq 1$ parametri. Esiste quindi almeno un fascio F di curve algebriche

di ordine $n-2$ passanti per i punti di $C(n)$ considerati; una $C(n-2)$ di F ha quindi già $n(n-2) - 1$ intersezioni in comune con $C(n)$. Per il teorema di Bezout allora esiste su $C(n)$ un altro unico punto in comune con $C(n-2)$. La determinazione delle coordinate di tale punto variabile si esegue in modo razionale, cioè le coordinate di tale punto risultano funzioni razionali del parametro del fascio; quindi $C(n)$ risulta razionale.

3.- Genere di una curva.

Sia $N(3, K)$ lo spazio proiettivo numerico tridimensionale su un campo K algebricamente chiuso. Si dice curva gobba di $N(3, K)$ di ordine n una varietà algebrica proiettiva irriducibile intersecata da ogni piano in n punti, contati con la dovuta molteplicità.

Siano $C(n)$ una curva gobba di ordine n e O un punto di $N(3, K)$ non su $C(n)$; proiettando $C(n)$ da O si ottiene un cono algebrico F che, come ora proveremo, è di ordine n. Quindi:

I.- La proiezione di $C(n)$ da $O \notin C(n)$ su un piano π non per O è una curva piana birazionalmente equivalente a $C(n)$ e ancora di ordine n.

Dimostrazione. Siano O un punto non appartenente a $C(n)$ e F il cono proiettante $C(n)$ da O. Fissata una retta r non per O, il piano α congiungente r e O interseca $C(n)$ in n punti, che, congiunti con O, determinano le n rette di α per O, appartenenti a F. Quindi r ha esattamente n punti in comune con F, le n intersezioni di F con siffatte rette, onde questo cono ha ordine n. La curva proiezione di $C(n)$ su un piano π non per O è quindi di ordine n.

Se invece $O \in C(n)$, si prova facilmente, con argomentazioni analoghe alle precedenti, che il cono F proiettante $C(n)$ da O è di ordine $n-1$. Quindi:

II.- Proiettando una $C(n)$ da un punto $O \in C(n)$ su un piano non per O si ottiene una curva di ordine $(n-1)$ birazionalmente equivalente alla $C(n)$.

Se $C(n)$ è una curva algebrica di $N(3, K)$, piana o gobba, si chiama campo di razionalità della $C(n)$ il sottocampo di K generato dai coefficienti dell'equazione della curva. Per esempio, il campo di razionalità della curva di equazioni $\{x_0^2 + x_1 x_2 = 0 \ ; \ x_3 = 0\}$ di $N(3, \mathbb{C})$ è il campo razionale $\mathbb{Q}$.

Max Nöther ha dimostrato che:

III.- Fissata in $N(3, K)$ una curva algebrica $\gamma(n)$ irriducibile piana di ordine n, esiste nello spazio $N(3, K)$ una curva $C(m)$ di ordine m priva di punti singolari, birazionalmente equivalente a $\gamma(n)$. Le curve $\gamma(n)$ e $C(m)$ hanno lo stesso campo di razionalità.

Data in $N(3, K)$ una curva $\gamma(n)$ piana, sia $C(m)$ la curva priva di singolarità di $N(3, K)$ birazionalmente equivalente alla $\gamma(n)$ (cfr. prop. III), avente lo stesso campo di razionalitàlità. Le tangenti, le rette s-secanti, $s \geqslant 3$, e le rette bisecanti, tali che le tangenti a $C(m)$ nei due punti d'incontro siano incidenti, costituiscono una varietà algebrica V propria di $N(3, K)$. Quindi il <u>punto generico</u> di $N(3, K)$, cioè un qualsiasi punto O dell'aperto di Zariski $N(3, K) - V$, è tale che per esso non passano né tangenti alla $C(m)$, né rette s-secanti, $s \geqslant 3$, né rette bisecanti $C(m)$, tali che le tangenti a $C(m)$ nei due punti d'incontro siano incidenti. Proiettando da O la $C(m)$ su un piano non per O, si ottiene allora una curva $\gamma(m)$ birazionalmente equivalente a $C(m)$ e quindi a $\gamma(n)$, e con lo stesso campo di razionalità dei coefficienti, i cui punti sono solo punti doppi a carattere nodale, cioè con tangenti distinte. Tali punti doppi provengono **dalle** rette bisecanti $C(m)$ non appartenenti a V. Ne segue che:

IV.- <u>Data comunque in $N(2, K)$ una curva irriducibile $\gamma(n)$, con singolarità comunque complesse, esiste in $N(2, K)$ una $\gamma(m)$ irriducibile birazionalmente equivalente a $\gamma(n)$ e con lo stesso campo di razionalità dei coefficienti, che possiede solo punti doppi a carattere nodale.</u>

Si osservi che una qualsiasi curva algebrica irriducibile di $N(r, K)$ ha sempre una trasformata birazionale nel piano, con lo stesso campo di razionalità; basta proiettare la curva da un S_{r-3}, in posizione generica rispetto alla curva, su un piano π sghembo con S_{r-3}. Quindi lo studio delle curve in $N(r, K)$ si riconduce a quello delle curve piane.

Sia dunque γ una qualsiasi curva irriducibile di $N(2, K)$ e si denoti con $[\gamma]$ la classe di tutte le curve birazionalmente equivalenti a γ. In $[\gamma]$ esiste una curva C, i cui punti singolari sono tutti a carattere nodale e siano δ il numero di tali punti e n l'ordine di C. Possiamo allora considerare l'intero

$$\underline{g = (n-1)(n-2)/2 - \delta .}$$

Si prova che tale numero non cambia al variare comunque della curva C in $[\gamma]$. Esso è un invariante birazionale della classe $[\gamma]$ quindi e prende il nome di <u>genere</u> della curva γ.

Dalla prop. IV del n. 2 si ha che:

V.- <u>E' sempre $g \geq 0$.</u>

Dalla prop. V del n. 2 segue che una curva C di genere $g = 0$, cioè tale che $\delta = (n-1)(n-2)/2$, risulta razionale. Si può provare anche il viceversa della precedente affermazione, onde:

VI.- Una curva $C(n)$ è razionale se, e solo se, essa ha genere $g = 0$.

Ne segue che le curve di genere $g = 0$ sono tutte birazionalmente equivalenti, perché tutte birazionalmente equivalenti ad una retta.

Si noti però che esistono curve di genere $g \geq 1$ che non sono birazionalmente equivalenti. Una curva di genere $g = 1$ si dice ellittica.

In base a quanto precede si ha che:

VII.- Sia $C(n)$ una curva irriducibile gobba di $N(3, K)$ priva di punti singolari e di genere g e sia O un punto generico di $N(3, K)$ (cioè appartenente a $N(3, K) - V$, cfr. pg.15); il numero delle secanti la $C(n)$ è fisso e dato da

$$\delta = (n-1)(n-2)/2 - g .$$

4.- Proiezione stereografica della quadrica.

Nello spazio proiettivo tridimensionale $N(3, K)$ su un campo algebricamente chiuso K siano Q una quadrica non singolare, π un piano, segante Q in una conica, e A un punto di Q non su π. Denotate con a_1 e a_2 le due generatrici della quadrica per A, siano $A_1 = \pi \cap a_1$, $A_2 = \pi \cap a_2$, $a = A_1A_2$; sia inoltre τ il piano congiungente le rette a_1 e a_2, cioè il piano tangente in A.

Fissato un punto P di Q non appartenente a τ, la retta AP non giace su τ, altrimenti $P \in \tau$, e interseca π in un punto P' non su a. L'applicazione $f.: Q - \tau \dashrightarrow \pi - a$ che al punto P di $Q - \tau$ fa corrispondere il punto $P' = f(P)$ di $\pi - a$, mediante la proiezione sopra descritta, è chiaramente una biiezione; è inoltre algebrica, in quanto ogni passaggio si esprime con equazioni algebriche, in modo invertibile. La f è quindi una biiezione tra i due aperti della topologia di Zariski $Q - \{a_1, a_2\}$ e $\pi - \{a\}$; poiché f con la sua inversa muta curve algebriche di Q in curve algebriche di π, cioè muta chiusi in chiusi, essa è un omeomorfismo nella topologia di Zariski tra i due aperti suddetti. Poiché tale trasformazione, esprimendosi razionalmente, conserva le funzioni razionali, la quadrica Q è birazionalmente equivalente al piano, cioè è razionale.

Vogliamo ora estendere la trasformazione f ai punti di $a_1 \cup a_2$. Cominciamo con l'osservare che, mediante la costruzione geometrica sopra considerata, ogni punto di a_1 viene trasformato in A_1, ogni punto di a_2 viene trasformato in A_2, mentre il punto A ha come corrispondente l'intera retta a di π. La corrispondenza $\bar{f} : Q \longrightarrow \pi$, che coincide con f per i punti di $Q - \{a_1, a_2\}$ e trasforma $a_1 \cup a_2$ come è stato appena detto, chiaramente non è una biiezione. Essa muta le rette di Q appoggiate ad a_1 nel fascio F_1 di rette di π con centro A_1, ponendo una biiezione tra esse, e analogamente le rette di Q appoggiate ad a_2 nel fascio F_2 di rette di π con centro A_2. Inoltre la controimmagine mediante $\bar{f}$ di ogni retta r di π, con $r \notin F_1 \cup F_2$, è la conica non degenere sezione di Q con il piano per r e A.

Viceversa, ogni conica di Q per A si proietta nella retta r di π, sezione del piano della conica con π.

Una conica C di Q non passante per A si proietta mediante $\bar{f}$ evidentemente in una conica C' di π per A_1 e A_2, dove i punti A_1 e A_2 sono le proiezioni rispettivamente di $C \cap a_1$ e $C \cap a_2$.

Viceversa, ogni conica C' di π per A_1 e A_2 proviene da una conica di Q non passante per A. Infatti, il cono quadrico che da A proietta la C' incontra Q in una quartica, che contiene le rette a_1 e a_2, onde tale quartica si spezza nelle rette a_1 e a_2 e in una residua conica C, evidentemente non per A, tale che $\bar{f}(C) = C'$.

La $\bar{f} : Q \longrightarrow \pi$ come si è detto non è biiettiva. Per eliminare questo inconveniente si procede nel modo seguente.

Sia C una curva tracciata sulla quadrica passante per un punto P_1 di a_1 e sia t_1 la tangente in P_1 a C. Se da A si proietta la C su π, si ottiene una curva C' per A_1, la cui tangente t_1' in A_1 risulta la proiezione di t_1, cioè risulta la retta intersezione di π con il piano tangente Q in P_1, il quale contiene a_1 e la retta s_2 di Q per P_1 del regolo a cui appartiene a_2. Ne segue che t_1' coincide con la proiezione da A di s_2. Ma allora a ogni punto P_1 di a_1 si può far corrispondere la retta proiezione da A della retta s_2 di Q per P_1, distinta da a_1.

Con considerazioni analoghe alle precedenti, alle rette per A del piano τ si possono far corrispondere i punti di in incontro di esse con la retta a'.

5.- Cubiche gobbe.

Sia $C(3)$ una cubica gobba nello spazio proiettivo $N(3, K)$. Cominciamo con il provare che:

I,- Ogni $C(3)$ è tracciata su una quadrica.

Dimostrazione. Fissiamo sette punti sulla cubica $C(3)$ e consideriamo una quadrica passante per tali sette punti, sicuramente esistente e dipendente linearmente da almeno de parametri. Per il teorema di Bezout, affermante che una quadrica e una $C(3)$ che non si appartengano hanno non più di sei punti in comune, ogni quadrica passante per i sette punti fissati contiene la $C(3)$, onde l'asserto.

Possiamo quindi studiare una cubica gobba $C(3)$ mediante la proiezione stereografica della quadrica Q su cui essa è tracciata. Con notazioni analoghe a quelle usate nel numero precedente, siano A un punto di Q non su $C(3)$ e τ il piano per le due generatrici a_1 e a_2 contenenti A. Poiché $C(3)$ è tracciata su Q, essa interseca il piano τ in tre punti giacenti su $a_1 \cup a_2$. I tre punti P_1, P_2, P_3 in oggetto non appartengono tutti ad una medesima generatrice, altrimenti il piano contenente tale generatrice ed un altro punto di $C(3)$ avrebbe quattro punti in comune con $C(3)$ e ciò è escluso. Pertanto si dispongono due sull'una e uno sull'altra generatrice. Sia per esempio $P_1, P_2 \in a_1$ e $P_3 \in a_2$. Mediante la proiezione stereografica di Q su un piano π non per A secante Q si ottiene una cubica di π avente un punto doppio in $A_1 = a_1 \cap \pi$ (i due rami della $C(3)$ passanti per P_1 e P_2, si proiettano in due rami per A_1, onde la cubica proiezione di $C(3)$ su π avrà in A_1 un punto doppio) e un punto semplice in $A_2 = a_2 \cap \pi$. Ogni retta di π passante per A_1 ha in comune con la cubica piana un solo ulteriore punto fuori di A_1. Ne segue che ogni retta del regolo di Q contenente a_2 incontra $C(3)$ in un sol punto. Analogamente ogni retta di π per A_2 ha in comune con la cubica piana due punti distinti da A_2 e quindi ogni retta del regolo contenente a_1 interseca $C(3)$ in due punti.

Viceversa, una cubica di π avente un punto doppio in A_1 e un punto semplice in A_2, proiettata da A, determina un cono cubico, il quale interseca Q in una sestica, che si spezza nella retta a_1 doppiamente, nella retta a_2 semplicemente e in una residua cubica $C(3)$.

Con analogo ragionamento si esamina il caso in cui due punti di $C(3) \cap \tau$ appartengano alla retta a_2 e il residuo alla retta a_1.

Poiché, per quanto precede, una $C(3)$ è equivalente ad una cubica piana avente un punto doppio ed essendo quest'ultima una curva razionale (cfr. n. 2), si ha che:

II.- <u>$C(3)$ è una curva razionale.</u>

Come è noto, le cubiche di un piano costituiscono un sistema lineare dipendente da nove parametri (cfr. prop. I, n. 2). Imponiamo a tale sistema di passare doppiamente per A_1 e semplicemente per A_2; imponiamo in questo modo quattro condizioni lineari, ottenendo un sistema lineare dipendente da cinque parametri. Pertanto le cubiche gobbe aventi una intersezione doppia con la retta a_1 e una intersezione semplice con la retta a_2 costituiscono un sistema lineare dipendente da cinque parametri.

Si ottiene un analogo sistema lineare dipendente da cinque parametri di cubiche gobbe, aventi intersezione semplice con a_1 e intersezione doppia con a_2, imponendo al sistema lineare di cubiche piane di passare semplicemente per A_1 e doppiamente per A_2.

Da quanto è stato fino ad ora detto si deduce quindi che su ogni quadrica giacciono due sistemi lineari disgiunti ∞^5 di cubiche gobbe. Quelle del primo sistema incontrano le rette del regolo a cui appartiene a_1 in due punti e quelle del regolo a cui appartiene a_2 in un punto. Analogamente scambiando i due regoli per quelle del secondo sistema.

Mediante la proiezione stereografica, imponendo il passaggio per A_1 e A_2 della curva proiezione, si prova facilmente che:

III.- Due $C(3)$ di uno stesso sistema si incontrano in quattro punti di $Q - \{a_1, a_2\}$, mentre due $C(3)$ di sistemi diversi si incontrano in $Q - \{a_1, a_2\}$ in cinque punti.

Proviamo ora che:

IV.- Per un punto P di $N(3, K)$ non su $C(3)$ passa una sola corda di $C(3)$.

Dimostrazione. Se si proietta $C(3)$ da P su un piano, si ottiene una cubica piana razionale e quindi avente un punto doppio D, onde esistono D_1 e D_2, punti di $C(3)$, allineati con P e D. Si ha così la corda D_1D_2 ed essa è unica, perché, se così non fosse, la cubica piana ottenuta per proiezione avrebbe più di un punto doppio e quindi sarebbe riducibile. Ma allora sarebbe riducibile $C(3)$, contro l'ipotesi.

Vogliamo ora provare che

V.- Le cubiche gobbe di $N(3, K)$ sono proiettivamente equivalenti.

Dimostrazione. Il sistema

$$(5.1) \qquad \begin{cases} x = u^3 \\ y = u^2 v \\ z = uv^2 \\ t = v^3 \end{cases}$$

rappresenta una cubica gobba, con u, v parametri omogenei e x, y, z, t coordinate correnti di punto in $N(3, K)$. Mostriamo che essa è unica, a meno di proiettività. Scriviamo a tale scopo l'equazione generale di una cubica gobba in forma parametrica razionale (perché $C(3)$ è razionale):

$$\left\{ \frac{x}{t} = \frac{P_1(u, v)}{Q_1(u, v)} \quad ; \quad \frac{y}{t} = \frac{P_2(u, v)}{Q_2(u, v)} \quad ; \quad \frac{z}{t} = \frac{P_3(u, v)}{Q_3(u, v)} \right\}$$

cioè

$$(5.2)\quad \begin{cases} x_1 = x = P_1(u, v)\cdot Q_2(u, v)\cdot Q_3(u, v) = f_1(u, v) \\ x_2 = y = P_2(u, v)\cdot Q_1(u, v)\cdot Q_3(u, v) = f_2(u, v) \\ x_3 = z = P_3(u, v)\cdot Q_1(u, v)\cdot Q_2(u, v) = f_3(u, v) \\ x_o = t = Q_1(u, v)\cdot Q_2(u, v)\cdot Q_3(u, v) = f_o(u, v) \end{cases}$$

Poiché la (5.2) deve rappresentare una cubica gobba, le $f_i(u, v)$, $i = 0, \dots, 3$, sono polinomi omogenei di terzo grado:

$$(5.3)\qquad x_i = f_i(u, v) = \sum_{j=o}^{3} a_{ij} u^{3-j} v^j \quad , \quad i = 0, \dots, 3 .$$

I coefficienti a_{ij} , $i,j = 0, \dots, 3$, che compaiono in (5.3), costituiscono una matrice A avente determinante non nullo, altrimenti una sua riga sarebbe combinazione lineare delle rimanenti e quindi la curva rappresentata in (5.3) sarebbe piana. Risolvendo il sistema (5.3) nelle incognite (u^3, u^2v, uv^2, v^3) si si ha:

$$(5.4)\qquad \begin{pmatrix} u^3 \\ u^2 v \\ uv^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = A' \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} ,$$

con A' matrice inversa di A. Mediante la proiettività di equazioni:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} = A' \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

la cubica (5.3) viene allora ad avere equazioni

$$(5.5) \qquad \begin{cases} u^3 = X = X_1 \\ u^2 v = Y = X_2 \\ uv^2 = Z = X_3 \\ v^3 = T = X_0 \end{cases} ,$$

cioè l'asserto.

Aggiungiamo infine una osservazione sulle cubiche gobbe di $N(3, K)$, nel caso in cui K ha caratteristica $p \neq 0$. Il campo K contiene come suoi sottocampi Z_p e tutti gli ampliamenti algebrici $GF(q)$ di Z_p, con $q = p^h$ e $h > 1$; è quindi Z_p il campo di razionalità della cubica (5.1) (cfr. n. 3).

Si prova facilmente che, potendosi ridurre una cubica sempre nella forma (5.3) ovvero (5.5), una cubica gobba $C(3)$ ha esattamente $q+1$ punti in $GF(q)$, evidentemente a quattro a quattro non complanari, cioè è un <u>$(q+1)$-arco spaziale.</u>

Viceversa, B. Segre ha provato che:

VI.- <u>Se q è dispari, un $(q+1)$-arco spaziale A è sempre una cubica gobba.</u>

<u>Dimostrazione.</u> Sia P' un fissato punto di A; proiettando da P' i rimanenti q punti di A su un piano π non per P' si ottiene in π un q-arco piano $\bar{A}'$, cioè un insieme di q punti a tre a tre non allineati. B. Segre prova che ogni q-arco piano è contenuto in una conica; dunque $\bar{A}'$ è contenuto in una conica e quindi le rette che da P' proiettano A sono rette di un cono quadrico. Analogamente, proiettando da un punto P'' diverso da P', si ottiene un altro cono quadrico. Se ne deduce che A è intersezione di due coni quadrici, aventi la retta $p'p''$ in comune, e quindi A è una cubica gobba, onde l'asserto.

6.- Quartiche gobbe.

Si definisce quartica gobba $C(4)$ di uno spazio proiettivo $N(3, K)$ tridimensionale su un campo K algebricamente chiuso una varietà algebrica proiettiva irriducibile e intersecata da ogni piano in quattro punti, considerando ogni punto di intersezione con la dovuta molteplicità.

Cominciamo con l'osservare che:

I.- Una $C(4)$ non ammette rette quadrisecanti.

Dimostrazione. Sia per assurdo r una retta quadrisecante $C(4)$. Fissato un punto O di $C(4)$ non su r, il piano congiungente r e O interseca $C(4)$ in cinque punti, contro la ipotesi che $C(4)$ sia gobba.

Una $C(4)$ ammette quindi rette al più trisecanti; diciamo quartiche gobbe di prima specie le $C(4)$ che non ammettono trisecanti e quartiche gobbe di seconda specie le $C(4)$ che hanno almeno una trisecante. Esistono di fatto sia $C(4)$ di prima specie, sia $C(4)$ di seconda specie.

Un esempio di $C(4)$ di prima specie è dato dalla intersezione di due quadriche prive di rette generatrici in comune, la quale risulta una quartica priva di trisecanti, altrimenti tale trisecante sarebbe una generatrice comune alle due quadriche, e ciò è escluso . Se $f(X) = 0$ e $g(X) = 0$, con $X = (x, y, z, t)$, sono le equazioni delle due quadriche considerate, allora la quartica intersezione è la curva base del fascio di quadriche $\lambda f(X) + \mu g(X) = 0$, $\lambda, \mu \in K$.

Un esempio di $C(4)$ di seconda specie si costruisce nel modo seguente. Siano Q una quadrica non singolare di equazione $f(X) = 0$, $\underline{a}$ e $\underline{b}$ due rette di uno stesso regolo di Q, e quindi sghembe, e S una superficie cubica contenente $\underline{a}$ e $\underline{b}$. Poiché le superfici cubiche dipendono linearmente da 19 parametri, S dipende linearmente da 11 parametri, essendo 8 le condizioni lineari date dall'appartenenza di $\underline{a}$ e $\underline{b}$ ad essa. Se $g(X) = 0$ è l'equazione di S, si consideri

$$(6.1) \qquad \{ f(X) = 0 \quad ; \quad g(X) = 0 \}$$

Il sistema (6.1) rappresenta $S \cap Q$, cioè una curva di ordine sei, spezzata nelle rette $\underline{a}$ e $\underline{b}$ e in una residua quartica $C(4)$, che possiamo supporre irriducibile, data la genericità di S. Fissata una retta $\underline{c}$ del regolo di Q contenente $\underline{a}$ e $\underline{b}$, essa, appartenendo a Q, interseca S in tre punti, i quali quindi appartengono a $S \cap Q - \{\underline{a}, \underline{b}\}$, cioè a $C(4)$. Pertanto la retta $\underline{c}$ triseca C(4), onde quest'ultima è di seconda specie. Anzi, tutte e sole le trisecanti sono le rette $\underline{c}$ del regolo di Q a cui appartengono $\underline{a}$ e $\underline{b}$, con $\underline{c} \neq \underline{a}$, $\underline{c} \neq \underline{b}$.

Proviamo ora che:

II.- <u>Una C(4) è sempre tracciata su una quadrica.</u>

<u>Dimostrazione.</u> Fissati nove punti su C(4), per essi passa almeno una quadrica Q (cfr. prop. II, n.2). Per il teorema di Bezout, una quadrica interseca una quartica gobba non tracciata su di essa in otto punti, onde C(4), avendo nove punti in comune con Q, è tracciata su tale quadrica.

La precedente proposizione può essere precisata come segue:

III.- <u>E' unica la quadrica su cui è tracciata una C(4) di seconda specie.</u>

<u>Dimostrazione.</u> Se C(4), di seconda specie, fosse tracciata su due quadriche Q e Q' distinte, tale quartica sarebbe curva base per il fascio di quadriche contenente Q e Q' e non avrebbe quindi rette trisecanti, contro l'ipotesi che C(4) sia di seconda specie.

Dalla prop. II segue che lo studio di una quartica gobba C(4) può essere fatto mediante la proiezione della quadrica Q su cui è tracciata. Con le notazioni usate nel n. 4 , siano A un punto di Q , a_1 e a_2 le generatrici per A , τ il piano congiungente a_1 e a_2 , π un piano di $N(3, K)$ secante Q, con $A \notin \pi$, $A_1 = \pi \cap a_1$ e $A_2 = \pi \cap a_2$. Supponiamo $A \notin C(4)$.

Il piano τ interseca $C(4)$ in quattro punti, i quali appartengono ad $(a_1 \cup a_2)$, ma mai tutti ad una stessa generatrice, perché $C(4)$ non ammette quadrisecanti. Tre casi sono quindi possibili:

(i) due punti di $C(4) \cap \tau$ giacciono su a_1 e i rimanenti due punti su a_2 ;

(ii) tre punti giacciono su a_1 e il rimanente su a_2 ;

(iii) un punto giace su a_1 e tre su a_2 .

Proiettando $C(4)$ su π da A si ottiene, nel caso (i), una quartica di π avente in A_1 e A_2 un punto doppio. Viceversa, ogni quartica di π avente un punto doppio in A_1 e un punto doppio in A_2 determina, per proiezione da A , un cono quartico di vertice A , intersecante Q in una curva di ordine otto, spezzata nelle rette a_1 e a_2 , ciascuna contata due volte, e in una residua quartica $C(4)$.

Fissata una retta t' di π per A_1, essa interseca la quartica proiezione in 4 punti, di cui due coincidenti con A_1 ; la t' proviene da una retta t del regolo opposto ad a_1, la quale quindi incontra la $C(4)$ in due punti. Analogamente per le rette di π che passano per A_2 . Pertanto ogni retta della quadrica sega $C(4)$ solo in due punti, onde non ci sono rette trisecanti $C(4)$ (se ci fosse una trisecante, essa dovrebbe appartenere alla quadrica). Dunque la quartica gobba, nel caso (i), è di prima specie.

Le quartiche di π dipendono linearmente da 14 parametri essenziali (cfr. prop. II, n. 2); imponendo ad una quartica di π il passaggio per il punto A_1 doppio e il passaggio per il punto A_2 doppio, si impongono $6 = 3 + 3$ condizioni lineari, onde le quartiche di π aventi A_1 e A_2 come punti doppi costituiscono un sistema lineare ∞^8.

Per proiezione da A quindi anche le quartiche gobbe tracciate su Q di tipo (i) costituiscono un sistema lineare ∞^8.

Due $C(4)$ di tipo (i) si intersecano, fuori delle generatrici a_1 e a_2 , in otto punti, perché le due quartiche di π , proiezioni delle due $C(4)$ considerate, si intersecano, come si vede facilmente, in otto punti distinti sia da A_1, sia da A_2.

Una $C(4)$ di tipo (i) è razionale solo se lo è la quartica C' di π proiezione di $C(4)$ e quindi se, e solo se, la C' ha un ulteriore punto doppio (cfr. prop. IV, n. 2), ossia se la $C(4)$ ha un solo punto doppio. Se ne conclude quindi che $C(4)$ ha genere (cfr. n. 3) $g=0$, oppure $g=1$ se, rispettivamente, $C(4)$ ha, o meno, un solo punto doppio.

Studiamo ora le quartiche gobbe $C(4)$ nel caso (ii). Una $C(4)$ di questo tipo, avendo a_1 come retta trisecante, è di seconda specie. La quartica C', proiezione da A su π di $C(4)$, ha un punto triplo in A_1 e un punto semplice in A_2, onde, essendo un monoide, è razionale (cfr. n. 2). Viceversa, ogni quartica C' di π avente un punto triplo in A_1 e un punto semplice in A_2 determina, per proiezione da A, un cono quartico, che interseca Q in una curva di ordine otto, contenente la retta a_1 triplamente, la retta a_2 semplicemente e una residua quartica $C(4)$.

Ogni retta t' di π per A_1 incontra la C' proiezione di $C(4)$ in un ulteriore punto distinto da A_1; quindi, poiché

t' proviene per proiezione da una retta di Q appoggiata ad a_1, ogni retta del regolo di Q opposto ad a_1 incontra $C(4)$ in un solo punto. Ogni retta t'' di π per A_2 incontra C' in tre punti distinti da A_2; quindi ogni retta del regolo di Q opposto ad a_2 è trisecante $C(4)$. Si noti anche che ogni trisecante la $C(4)$ deve appartenere a Q, cioé deve coincidere con una generatrice di Q appartenente al regolo di a_1.

Se si impone ad una quartica di π il passaggio per il punto triplo A_1 e per il punto semplice A_2 si impongono sette condizioni lineari. Poiché le quartiche di π costituiscono un sistema lineare ∞^{14}, le quartiche di π aventi A_1 come punto triplo e A_2 come punto semplice costituiscono un sistema lineare ∞^7. Per proiezione da A allora anche le quartiche $C(4)$ gobbe aventi la generatrice a_1 come trisecante costituiscono un sistema lineare ∞^7.

Due $C(4)$ appartenenti a tale sistema si intersecano in sei punti non su $(a_1 \vee a_2)$. Infatti, le quartiche proiezione su π da A delle $C(4)$ considerate hanno 16 punti in comune, di cui 9 in A_1, uno in A_2 e sei ulteriori intersezioni non appartenenti alla retta A_1A_2.

Con considerazioni analoghe alle precedenti, si prova che le quartiche di tipo (iii), aventi a_2 come trisecante, costituiscono un altro sistema lineare ∞^7.

Una quartica di tipo (i) ed una quartica di tipo (ii) (ovvero di tipo (iii)) si intersecano, fuori di $(a_1 \cup a_2)$, in sei punti: basta valutare il numero di punti di intersezione fuori della retta A_1A_2 delle due quartiche proiezione su π.

Da quanto precede si ha che ogni quartica gobba o è di genere $g = 0$, nel qual caso può avere un solo punto doppio, o è di genere $g = 1$, cioè ellittica, nel qual caso non ha punti doppi.

7.- Curve algebriche tracciate su una quadrica.

Sia $C(n)$ una curva algebrica irriducibile di ordine n tracciata su una quadrica Q dello spazio proiettivo numerico $N(3, K)$ tridimensionale su un campo K algebricamente chiuso. Lo studio di $C(n)$, $n = 3$, $n = 4$, è stato già visto nei due precedenti numeri; possiamo quindi supporre $n \geq 5$ e usare per lo studio di $C(n)$ la proiezione stereografica di Q come è stato fatto precedentemente, adoperando le notazioni introdotte nel n. 4.

Cominciamo intanto ad osservare che non esistono rette n-secanti $C(n)$, come si prova con ragionamenti analoghi a quelli dei numeri precedenti.

Il piano τ incontra $C(n)$ in n punti, che, per quanto appena osservato, non giacciono tutti su una stessa generatrice per A; siano allora in numero di h i punti di $C(n) \cap \tau$ giacenti su a_1 e in numero di k i punti di $C(n) \cap \tau$ giacenti su a_2, con $1 \leq h \leq n-1$, $1 \leq k \leq n-1$ e $h + k = n$.

Per proiezione di $C(n)$ da A su π , supponendo $A \notin C(n)$, si ottiene una curva C' di ordine n di π avente in A_1 un punto h-plo e in A_2 un punto k-plo.

Viceversa, una curva C' di ordine n di π determina, per proiezione da A, un cono di ordine n, il quale interseca Q in una curva di ordine $2n$, contenente la retta a_1 contata h volte, la retta a_2 contata k volte, e una residua curva di ordine $n = 2n - (h + k)$.

Con considerazioni analoghe a quelle viste nei due numeri precedenti, tenuto conto che A_1 è un punto h-plo e A_2 è un punto k-plo delle curve di π, proiezione di $C(n)$ da A, si ha che le generatrici di Q del regolo a cui appartiene a_1 sono rette h-secanti $C(n)$ e le generatrici di Q del regolo a cui appartiene a_2 sono rette k-secanti $C(n)$.

In modo analogo a quanto fatto nei precedenti numeri si ha che, al variare di h e k, con $h+k = n$, si ottengono diversi sistemi lineari di $C(n)$. Tali sistemi sono tanti quante sono le possibili scelte di h e k, in modo che sia $1 \leq h \leq n-1$, $1 \leq k \leq n-1$ e $h+k = n$.

Notiamo esplicitamente che, se $n \geq 5$, esistono curve algebriche di ordine n non tracciate su una quadrica. Infatti, una quadrica Q e una curva algebrica C di ordine n si intersecano in $2n$ punti, oppure C è tracciata su Q, e risulta $2n > 9$, se $n \geq 5$; poiché una quadrica dipende linearmente da 9 parametri essenziali, ne segue che esistono curve di ordine n non tracciate su Q.

8.- Monoidi, razionalità dei monoidi e delle superfici cubiche di $N(3, K)$.

Data una superficie irriducibile $F(x, y, z, t) = 0$ di grado n di $N(3, K)$, si dice punto s-plo per la superficie un punto P di F tale che ogni retta di $N(3, K)$ per esso ha almeno s intersezioni con F in P ed esistono rette per P che hanno esattamente s intersezioni con F nel punto. In modo equivalente, se la caratteristica di K è maggiore di n, $P \in F$ si dice s-plo se in P si annullano tutte le derivate parziali fino a quelle di ordine $(s-1)$ ed esistono derivate parziali di ordine s non nulle in P.

Le rette aventi più di s intersezioni con F in un punto $P \in F$ s-plo costituiscono un cono algebrico di ordine s.

Siano A un punto $(n-1)$-plo di F e P, $A \neq P$, un punto dell'intersezione di F con il cono Γ tangente in A la superficie F. La retta AP ha in A almeno n intersezioni e in P una ulteriore intersezione, onde, avendo più di n intersezioni con F, per il teorema di Bezout giace interamente sulla superficie F. Su $F \cap \Gamma$ giacciono quindi $n(n-1)$ rette, che sono tutte le rette di F per A.

Se F è una superficie algebrica irriducibile di ordine n avente un punto A n-plo, fissato un punto P di F, la retta AP ha almeno $n+1$ intersezioni con F, onde quest'ultima superficie è un cono algebrico con vertice A.

Si definisce <u>monoide</u> una superficie algebrica irriducibile di ordine n avente un punto $(n-1)$-plo. Il punto $(n-1)$-plo si dice <u>vertice del monoide</u>.

Per quanto detto precedentemente, per il vertice di un monoide passano $n(n-1)$ rette appartenenti alla superficie, date dalla intersezione del cono Γ tangente il monoide nel vertice con la superficie. Proviamo ora che:

I.- <u>Ogni monoide è razionale.</u>

<u>Dimostrazione.</u> Siano F un monoide di vertice A e Γ il cono tangente F in A. Il cono Γ interseca un piano π non per A in una curva γ di ordine $(n-1)$ (cfr. prop. II, n. 3). Inoltre, dette $a_1, a_2, \ldots, a_{n(n-1)}$ le $n(n-1)$ rette per A di $F \cap \Gamma$, siano $A_1, A_2, \ldots, A_{n(n-1)}$ gli $n(n-1)$ punti di π, distinti o coincidenti, tali che

$A_i = a_i \cap \pi$, $i = 1, 2, \ldots, n(n-1)$.

Consideriamo la seguente applicazione

$p : F - (F \cap \Gamma) \longrightarrow \pi - \gamma$, che al punto P di $F - (F \cap \Gamma)$ fa corrispondere il punto $P' = AP \cap \pi$ di

$\pi - \gamma$. La p è chiaramente una trasformazione birazionale, onde l'asserto.

Studiamo ora le superfici cubiche; si può provare che:

II.- <u>Ogni superficie cubica $F(x, y, z, t) = 0$ contiene 27 rette.</u>

<u>Cenno dimostrativo.</u> Una retta di $N(3, K)$ dipende da 4 parametri essenziali. Se si interseca tale retta con la superficie $F(x, y, z, t) = 0$, cioè se si eliminano x e y tra $F(x, y, z, t) = 0$ e le due equazioni della retta, si ottiene una equazione omogenea in z e t di terzo grado a coefficienti polinomi omogenei di grado tre nei parametri che determinano la retta. Se la retta appartiene alla superficie, si debbono annullare i coefficienti della suddetta equazione omogenea di terzo grado in z e t . Si ottiene così un sistema di 4 equazioni, ciascuna di terzo grado, nei 4 parametri essenziali che definiscono la retta. Tale sistema ammette allora $81 = 3^4$ soluzioni, ma si può provare che ciascuna soluzione è da contarsi tre volte. Quindi esistono 27 rette, in generale distinte.

Si può provare che la superficie generale del terzo ordine ammette almeno due rette sghembe.

Inoltre, fissata una retta r giacente su F, esattamente 10 rette tra le 27 considerate sopra incidono r e 16 rette sono sghembe con r.

Proviamo ora che:

IV.- <u>Ogni superficie cubica (non cono) F è razionale.</u>

<u>Dimostrazione.</u> Se F ha un punto doppio, essa è un monoide e quindi dalla prop. II si ha l'asserto.

Se F non ha punti doppi, essa contiene almeno due rette sgembe r e s. Fissato un piano π non contenente né r, né s per ogni $P \in F - \{r \cup s\}$, la retta per P che si appoggia alle rette r e s interseca π in un punto P'.

Viceversa, se $P' \in \pi - \{r \cap \pi, s \cap \pi\}$, la retta per P' appoggiantesi alle rette r e s interseca F in tre punti, di cui uno giace su r, uno giace su s e il rimanente su $F - \{r \cup s\}$.

La corrispondenza sopra descritta tra $F - \{r \cup s\}$ e $\pi - \{r \cap \pi, s \cap \pi\}$, che al punto P fa corrispondere il punto P', è chiaramente una trasformazione birazionale e prende il nome di <u>proiezione sghemba.</u> Ne esgue l'asserto.