Giuseppe Tallini

LEZIONI DI GEOMETRIA III

Spazi dei cerchi e delle sfere. Lo spazio delle coniche e la superficie di Veronese. Teoria delle coniche in un piano di Galois.

Anno Acc. 1977-78

CAPITOLO I

S P A Z I O   D E I   C E R C H I

Appunti redatti dalla sig.na Adele Basile

1.- SPAZI LINEARI SOPRA UN CORPO

Siano dati un insieme S e un corpo K. Sia $\bar{k} : S \longrightarrow N_{r,K}$ un'applicazione biettiva di S in $N_{r,K}$, dove $N_{r,K}$ è lo spazio numerico destro di dimensione r su K.

Mediante $\bar{k}$, S viene strutturato a spazio grafico, perchè la struttura grafica di $N_{r,K}$ mediante $\bar{k}^{-1}$ si trasporta in S. S diventa, così, uno spazio grafico e $\bar{k}$ risulta allora un isomorfismo. Esso viene detto coordinazione.

Oltre alla coordinazione $\bar{k}$, possiamo mettere in evidenza una famiglia di coordinazioni associate linearmente a $\bar{k}$, nel modo seguente: si consideri la matrice A quadrata di ordine r+1 invertibile definita a meno di un fattore di proporzionalità destro non nullo (cioè $A \in GL(r+1,K)$), sia quindi

$$\alpha : X \in N_{r,K} \longrightarrow X'=AX \in N_{r,K}$$

l'automorfismo di $N_{r,K}$ determinato da A. α è una biezione che muta spazi lineari in spazi lineari della stessa dimensione

$$\alpha : X \in N_{r,K} \longrightarrow X' \in N_{r,K} .$$

Al variare di A in GL(r+1), si ha un gruppo di automorfismi di questo spazio grafico. Per ogni tale automorfismo, resta determinata una coordinazione $k=\alpha \circ \bar{k}$ che a $P \in S$ associa $A\bar{k}(P)$,

$$P \in S \longrightarrow \bar{k}(P)=X \longrightarrow X'=AX=A\bar{k}(P) .$$

Si ottiene così un isomorfismo tra S e $N_{r,K}$ (ove S è strutturato a spazio grafico nel modo anzidetto). k(P) è una (r+1)-pla di numeri non tutti nulli definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo. Questi r+1 numeri sono detti <u>coordinate</u> di P nella coordinazione k.

Definiscesi <u>spazio lineare sul corpo K</u> una terna costituita dall'insieme S, dalla coordinazione $\bar{k}$, e dall'insieme C delle coordinazioni di equazioni $X'=AX$ ($\alpha \circ \bar{k}$; $\alpha : X'=AX$, $A \in GL(r+1,K)$). Le coordinazioni possibili sono solo quelle della famiglia $\{\alpha \circ \bar{k}\}$.

Fissata la coordinazione $k=\alpha \circ \bar{k}$, a ogni punto restano associate certe coordinate, resta così fissato un riferimento. Possiamo studiare lo spazio grafico S in relazione a tutte le coordinazioni dell'insieme $\{\alpha \circ \bar{k}\}$.

Fissata una coordinazione $k\in\{\alpha^{\circ}\bar{k}\}$ per ogni $A\in GL(r+1,K)$ si consideri l'automorfismo di S dato da

$$\omega : \; P\in S \longrightarrow P' = k^{-1}(Ak(P)\;)\in S$$

esso ha equazione $X'=AX$. Tale automorfismo prende il nome di omografia. Al variare di A in $GL(r+1,K)$ si ottiene così il gruppo delle omografie di S.

2.- S P A Z I O D E I C E R C H I

In questo numero cominceremo a trattare un esempio notevole di spazi lineari: lo spazio dei cerchi del piano. Al riguardo richiameremo brevemente nozioni fondamentali di geometria analitica che occorrono in seguito.

Un cerchio di centro (α, β) e raggio r in $\mathbb{R}^2$ ha equazione:

$$(2.1)\qquad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + (\alpha^2 + \beta^2 - r^2) = 0\;.$$

Conviene ampliare $\mathbb{R}^2$ con i punti complessi e i punti impropri, perciò consideriamo il piano reale complessificato e ampliato con i punti impropri, di coordinate omogenee (x,y,t).

L'equazione del cerchio è dunque del tipo:

$$(2.2)\qquad a_0\,(x^2 + y^2) + a_1\,xt + a_2yt + a_3t^2 = 0.$$

Definiscesi <u>cerchio</u> ,nel piano che stiamo considerando,ogni curva di equazione (2.2) ,ossia ogni conica del piano passante per i punti ciclici del piano.Il centro è allora dato da:

(2.3) $\alpha = -\frac{a_1}{2a_o}$, $\beta = -\frac{a_2}{2a_o}$, ed è $a_o \neq 0$,

e il raggio da:

(2.4) $r=\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 - 4a_oa_3}{4a_o^2}}$,

relazioni che si ottengono uguagliando (2.1) con (2.2).

Se $a_o=0$ dalla (2.2) otteniamo:

(2.5) $t(a_1x + a_2y + a_3t) = 0$

il cerchio degenera quindi nella retta impropria e in una retta reale.E' da notare che si tratta sempre di un cerchio,perchè è una conica passante per i punti ciclici.I cerchi degeneri sono,inoltre,quelli di raggio nullo.A seconda del segno di $a_1^2 + a_2^2 - 4a_oa_3$, distinguiamo tre casi (cfr.(2.4)):

(2.6) $a_1^2 + a_2^2 - 4a_oa_3 > 0 \Longrightarrow$ <u>r è reale e positivo,perciò il cerchio sarà reale</u>.

(2.7) $a_1^2 + a_2^2 - 4a_oa_3 = 0 \Longrightarrow$ <u>r=0,perciò il cerchio ha raggio nullo e cioè degenera nelle due rette isotrope per il suo centro</u>.

(2.8) $a_1^2 + a_2^2 - 4a_o a_3 < 0 \Longrightarrow$ r è immaginario,il cerchio è privo di punti reali .

FASCI DI CERCHI

Si consideri l'equazione:

(2.9) $b_o(x^2 + y^2) + b_1 x + b_2 y + b_3 = 0$

facendo una combinazione lineare della (2.2) e della (2.9) con λ e μ definiti a meno di un fattore di proporzionalità non nullo,si ottiene un'equazione del tipo:

(2.10) $(\lambda a_o + \mu b_o)(x^2+y^2) + (\lambda a_1 + \mu b_1)x + (\lambda a_2 + \mu b_2)y + \lambda a_3 + \mu b_3 = 0$.

La (2.10) è l'equazione di una famiglia di cerchi che chiamiamo fascio di cerchi.I cerchi di equazioni (2.2) e (2.9) si incontrano in due punti che appartengono a tutti i cerchi del fascio e si dicono punti base del fascio ;al fascio appartiene pure il cerchio degenere spezzato nella retta per essi (asse radicale) e la retta impropria.I centri dei cerchi del fascio si trovano sulla retta asse del segmento congiungente i due punti base.Essa prende il nome di asse centrale (cfr.fig.1).

Imponendo che il cerchio (2.10) abbia raggio nullo si ottiene:

$$(\lambda a_1+\mu b_1)^2+(\lambda a_2+\mu b_2)^2-4(\lambda a_0+\mu b_0)(\lambda a_3+\mu b_3) = 0$$

da cui si riconosce che vi sono due cerchi di raggio nullo che, dal punto di vista reale,si riducono ognuno a un punto,il centro del cerchio,sull'asse centrale.

Dalla natura dei punti base,si hanno quattro tipi di fasci:

(I) i punti base (A,B) sono,reali e distinti $\Longrightarrow$ si ha un <u>fascio di cerchi secanti</u> poichè i cerchi sono tra loro tutti secanti in A e B e i due cerchi di raggio nullo hanno centri immaginari sull'asse centrale (fig.2);

(II)i punti base $(\bar{A},\bar{A})$ sono complessi e coniugati $\Longrightarrow$ si ha un <u>fascio di cerchi esterni</u> e i due cerchi di raggio nullo hanno centri reali e distinti sull'asse centrale (fig.3);

(III) i punti base (A,A) sono coincidenti $\Longrightarrow$ si ha un <u>fascio di cerchi tangenti</u> in A all'asse radicale e i due cerchi di raggio nullo coincidono col cerchio di raggio nullo di centro il punto A di tangenza (fig.4);

(IV) i punti base sono i punti ciclici $\Longrightarrow$ si ha un fascio di cerchi concentrici di centro O e i due cerchi di raggio nullo coincidono con quello di centro O (l'asse radicale è la retta impropria) (cfr.fig.5).

RETE DI CERCHI

Si considerino tre cerchi non appartenenti allo stesso fascio e se ne faccia una combinazione lineare con coefficienti omogenei λ, μ e ν .Si ottiene l'equazione di una famiglia di cerchi (dipendente linearmente da due parametri essenziali) che si chiama: rete di cerchi.

SPAZIO DEI CERCHI

Ciò premesso,si consideri la famiglia $\mathcal{C}$ di tutti i cerchi a coefficienti reali del piano e l'applicazione k che fa corrispondere al cerchio C di equazione (2.2) ,la quaterna omogenea (a_0,a_1,a_2,a_3) ,punto dello spazio numerico $N_{3,\mathbb{R}}$:

$$k \ : \ C \in \mathcal{C} \longrightarrow (a_0,a_1,a_2,a_3) \in N_{3,\mathbb{R}} .$$

L'applicazione k è manifestamente biettiva.Possiamo considerare perciò lo spazio lineare (cfr.n.1) a tre dimensioni su $\mathbb{R}$:

$$(\mathcal{C} \ ,k: \mathcal{C} \longrightarrow N_{3,\mathbb{R}}, \{fok\})$$

Esso prende il nome di <u>spazio dei cerchi</u>. Mediante la biezione k, $\mathcal{C}$ è strutturato a spazio grafico di dimensione tre. In esso le rette sono le controimmagini di rette di $N_{3,\mathbb{R}}$. In $N_{3,\mathbb{R}}$ le rette le otteniamo con una combinazione lineare di due punti, dunque in $\mathcal{C}$ una retta è una combinazione lineare di due cerchi, cioè un fascio di cerchi. Similmente un piano in $\mathcal{C}$ sarà costituito da una combinazione lineare di tre cerchi non formanti fascio, cioè da una rete di cerchi.

I cerchi di raggio nullo si rappresentano in $N_{3,\mathbb{R}}$ con i punti della quadrica $\mathcal{O}$, non su $a_0=0$, di equazione: (cfr:(2.7))

$$(2.9) \qquad \mathcal{O} : a_1^2+a_2^2-4a_0a_3= 0$$

perciò dal punto di vista reale tale quadrica $\mathcal{O}$ si identifica con i punti del piano $\mathbb{R}^2$. I cerchi degeneri in una retta del piano e nella retta impropria, si rappresentano in $N_{3,\mathbb{R}}$ con i punti del piano $a_0=0$. Considerando $N_{3,\mathbb{R}}$ come spazio affine, qualora si scelga $a_0=0$ come piano improprio, la quadrica $\mathcal{O}$ risulta tangente al pianoimproprio nel punto $A_\infty(0,0,0,1)$ [in quanto l'intersezione di $a_0=0$ e $\mathcal{O}$ che ha equazione (2.9) risulta costituita dalle rette complesse coniugate $a_0=0, a_1=\pm ia_2$], quindi $\mathcal{G}$ è un paraboloide ellittico con centro in A_∞ (polo del del piano improprio) (*).

I quattro tipi di fasci di cerchi si ritrovano nel modo seguente:

(1) Un fascio di cerchi secanti ha due cerchi di raggio nullo,con centri complessi coniugati.Esso mediante k si trasforma dunque in una retta che interseca la quadrica in due punti complessi coniugati,cioè in una retta esterna a $\mathcal{G}$.

(2) Un fascio di cerchi esterni ha due cerchi di raggio nullo,a centri reali e distinti.Dunque la retta corrispondente al fascio interseca la quadrica $\mathcal{G}$ in due punti reali e distinti, cioè è una retta secante .

(3) Un fascio di cerchi tangenti ha un solo cerchio di raggio nullo.Dunque la retta corrispondente incontra la quadrica $\mathcal{G}$ in un sol punto.cioè è una retta tangente alla quadrica .

(*) cfr.E.MARTINELLI - Il metodo delle coordinate (cap.6°)

(4) Un fascio di cerchi concentrici ha un solo cerchio di raggio nullo coincidente con il centro. La retta corrispondente passa per il centro della quadrica A_{∞}, cioè è un diametro, infatti non è restrittivo supporre che il fascio di cerchi concentrici abbia centro nell'origine; esso, allora, avrà equazione: $\lambda(x^2+y^2)+\mu=0$, la retta corrispondente è costituita dai punti di coordinate $(\lambda,0,0,\mu)$, cioè è la retta di equazioni $a_1=a_2=0$; tale retta passa per A_{∞}.

Il paraboloide $\mathcal{G}$ ha punti esterni e interni: i punti esterni sono quelli per cui $a_1^2+a_2^2-4a_0a_3>0$, i punti interni sono quelli per cui $a_1^2+a_2^2-4a_0a_3<0$. I cerchi che hanno raggio reale, in $N_{3,\mathbb{R}}$, vanno perciò in punti esterni alla quadrica mentre i cerchi a raggio immaginario vanno in punti interni a $\mathcal{G}$, in forza delle relazioni (2.6) e (2.8).

Il corrispondente in $N_{3,\mathbb{R}}$ tramite k di una rete è un piano α, perciò una rete di cerchi ha infiniti cerchi di raggio nullo (controimmagini mediante k della conica sezione di $\mathcal{G}$ con il piano α).

Approfondiamo lo studio della rappresentazione dei cerchi di raggio nullo.A tal fine sia $\mathcal{P}_o$ il paraboloide $\mathcal{P}$ privato del suo centro A (0,0,0,1).Per ogni punto P di $\mathbb{R}^2$ sia $k^\circ(P)$ il trasformato mediante k del cerchio che ha centro in P e raggio nullo.L'applicazione k° così definita:

$$k^\circ \ : \ P \in R^2 \longrightarrow k^\circ(P) \in \mathcal{P}_o$$

è una biezione tra i punti di $\mathbb{R}^2$ e i punti propri di $\mathcal{P}$;essa identifica $\mathbb{R}^2$ con i punti al finito di $\mathcal{P}$.

Sia $C \in \mathcal{C}$,un cerchio di raggio reale.Tramite k,C viene trasformato in un punto k(C) proprio di $N_{3,\mathbb{R}}$ ed esterno alla quadrica $\mathcal{P}$ (essendo C di raggio reale).Fissato un punto P su C consideriamo la retta tangente a C in P e il fascio di cerchi tangenti alla retta in P.In $N_{3,\mathbb{R}}$,a tale fascio corrisponde una retta per k(C) ,tangente a $\mathcal{P}$ nel punto $k^\circ(P)$(cfr.fig. 6).
Al variare di P sul cerchio C,anche la tangente al paraboloide per k(C) varia,descrivendo il <u>cono circoscritto</u> alla quadrica per il punto k(C).I punti di tale cono in comune con $\mathcal{P}$,giacciono su di un piano:<u>il piano polare</u> di k(C) rispetto a $\mathcal{P}$ .La sezione di $\mathcal{P}$ col piano polare di k(C) è una conica,i cui punti sono i trasformati,mediante k°,dei punti di C.Poichè k(C) è

un punto proprio di $N_{3,\mathbb{R}}$, il suo piano polare non passa per A_∞, pertanto interseca $\mathcal{P}$ in un'ellisse. $k°$, quindi, muta circonferenze di $\mathbb{R}^2$ in ellissi di $\mathcal{P}_0$.

Sia ora C una retta (cerchio degenere). Allora k(C) è improprio (perchè $a_0=0$), il piano polare di k(C) rispetto a $\mathcal{P}$ passa dunque per A_∞; la conica sezione è quindi una parabola. Una retta di $\mathbb{R}^2$, con $k°$, si trasforma pertanto (ragionando in modo analogo a quanto precede), in una parabola del paraboloide $\mathcal{P}$.

Sia P un punto di $\mathbb{R}^2$. Tutti i cerchi per P costituiscono una rete (detta rete di cerchi omaloidica per P), ci proponiamo di prendere in esame il trasformato mediante k di tale rete. Tale trasformato è un piano di $N_{3,\mathbb{R}}$. Com'è situato tale piano rispetto al paraboloide $\mathcal{P}$? Per rispondere a questa domanda pensiamo prima di tutto a quanti cerchi di raggio nullo vi sono nella rete per P. E' evidente che esso è unico e coincide con quello di centro P. Corrispondentemente, in $N_{3,\mathbb{R}}$, il piano, trasformato della rete, sarà tangente alla quadrica $\mathcal{P}$ nel punto $k°(P)$. Un altro modo più espressivo per dimostrare quanto sopra è il seguente.
Si consideri in $\mathbb{R}^2$ un cerchio qualsiasi per P, la retta r tan-

gente al cerchio in P e il fascio di cerchi tangenti in P. Tale fascio viene trasformato in $N_{3,\mathbb{R}}$ in una retta t tangente a $\wp$ in $k°(P)$,retta che appartiene al piano corrispondente alla rete di cerchi per P.Al variare della retta r per P, la t varia descrivendo il piano tangente a $\wp$.

Viceversa,dato un piano tangente in un punto Q di $\wp$,esso proviene ,mediante k,dalla rete dei cerchi passanti per il punto $(k°)^{-1}(Q)$.Quindi alle reti omaloidiche di cerchi, corrispondono i piani tangenti a $\wp$ e viceversa(cfr.fig.7).

Si osservi che non tutte le reti sono omaloidiche,in quanto non tutti i piani di $N_{3,\mathbb{R}}$sono tangenti a $\wp$.

Data una rete non omaloidica di cerchi, il piano π corrispondente a essa non è tangente a $\wp$ e quindi o è secante o è esterno a $\wp$ .Se è secante tale piano π ha un polo esterno a $\wp$ che proverrà da un cerchio C di raggio reale di $\mathbb{R}^2$,il quale,mediante k,va nella conica sezione di π con $\wp$ .Perciò i cerchi di raggio nullo della rete,hanno come centri i punti di C (cfr.fig.8).Se π è esterno a $\wp$,allora il polo k(C) di

π rispetto a β è interno a β ,quindi C è totalmente immaginario,e d'altra parte anche $\pi \cap \beta$ è totalmente immaginaria. Allora i cerchi di raggio nullo della rete hanno centri immaginari,dovendo essere punti di C (ragionando analogamente al caso precedente).

Concludendo vi sono tre tipi di reti di cerchi,a seconda che i corrispondenti piani siano secanti,tangenti o esterni a β .

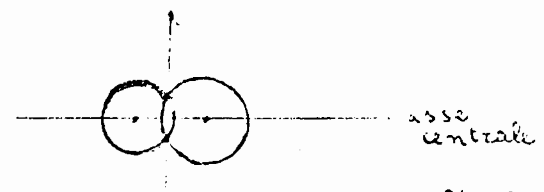

fig. 1

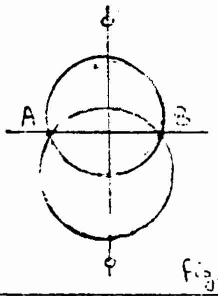

fig. 2

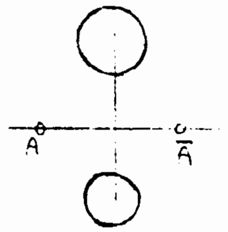

fig. 3

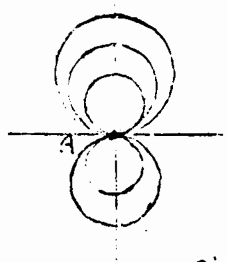

fig. 4

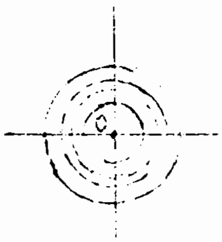

fig. 5

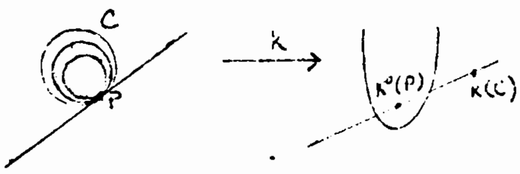

fig. 6

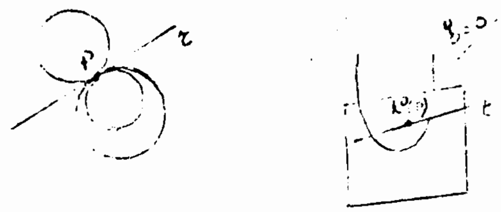

fig. 7

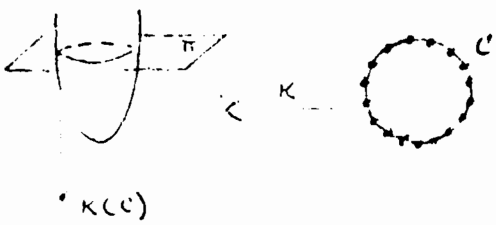

fig. 8

3.- ORTOGONALITA' TRA CERCHI

Osserviamo che una similitudine del piano muta rette in rette,circonferenze in circonferenze,fasci di cerchi in fasci di cerchi,reti in reti,cerchi di raggio nullo in cerchi di raggio nullo,cerchi spezzati in cerchi spezzati.Corrispondentemente allora una similitudine del piano si trasforma in $N_{3,\mathbb{R}}$ in una omografia,una trasformazione lineare che muta il piano improprio in sè,la quadrica $\mathcal{P}$ in sè,oltre a mutare rette in rette,e piani in piani,quindi una similitudine si muta in una affinità di $N_{3,\mathbb{R}}$ che muta la quadrica in sè.Viceversa una qualsiasi affinità di $N_{3,\mathbb{R}}$ che muta $\mathcal{P}$ in sè proviene nel modo anzidetto da una similitudine del piano.Ne segue che il gruppo delle similitudini del piano si muta nel gruppo delle affinità di $N_{3,\mathbb{R}}$ che mutano $\mathcal{P}$ in sè.

Due cerchi C e C' si dicono <u>ortogonali</u> se,detti T_1 e T_2 i loro punti di intersezione,le tangenti in T_1 a C e C' sono ortogonali,cioè la tangente in T_1 a C passa par il centro di C',così come la tangente in T_1 a C' passa per il centro di C. Ne segue che ciò accade anche per il punto T_2(per ragioni di simmetria).

Ci proponiamo di provare che:

I.- Se C e C' sono ortogonali allora $k(C)$ e $k(C')$ sono reciproci rispetto alla quadrica $\mathcal{Q}$, ossia $k(C')$ appartiene al piano polare di $k(C)$.

Dim. C e C' siano ortogonali. Con una similitudine possiamo fare in modo che C abbia centro in O (origine delle coordinate) e raggio uguale a 1, in modo che, se T è uno dei punti di intersezione di C e C', OT sia la direzione dell'asse x, e $\overline{OT} = 1$ (fig.1)

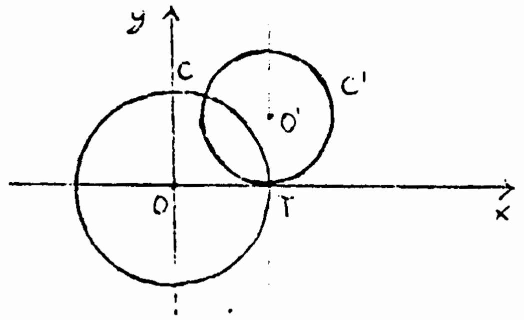

Fig. 1

C ha, allora, equazione:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{3.1}$$

C' ha allora centro in O' sulla perpendicolare all'asse x in T, perciò si ha $O'(1,r')$, ove r' è il raggio di C'. Pertanto l'equazione di C' è:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2yr' + 1 = 0 \tag{3.2}$$

Si ha quindi che $k(C)=(1,0,0,-1)$ (come si vede dai coefficienti della (3.1)) e per lo stesso motivo, dalla equazione (3.2) si ha $k(C')=(1,-2,-2r',1) \in N_{3,\mathbb{R}}$. Verifichiamo che i due punti $k(C)=(1,0,0,-1)$ e $k(C')=(1,-2,-2r',1)$ di $N_{3,\mathbb{R}}$, sono reciproci rispetto a $\mathcal{B}$, cioè che $k(C')$ appartiene alla polare di $k(C)$. Poichè $\mathcal{B}$ ha equazione (2.9), la polare di (b_0,b_1,b_2,b_3) rispetto a $\mathcal{B}$ sarà:

$$(3.3) \qquad a_1b_1 + a_2b_2 - 2a_3b_0 - 2a_0b_3 = 0 \quad .$$

Si verifica subito che la (3.3) è soddisfatta dai punti $k(C)$ e $k(C')$, si ha così l'asserto.

La (3.3) è dunque la <u>condizione di ortogonalità di due cerchi</u> .

II.- <u>Ogni rete di cerchi è l'insieme dei cerchi ortogonali a un cerchio dato</u>.

<u>Dim.</u> Una rete di cerchi si trasforma mediante k in un piano α di $N_{3,\mathbb{R}}$. Il polo P di tale piano α è reciproco a tutti i punti di esso. Per la proposizione I ne segue che il cerchio $k^{-1}(P)$ è ortogonale a tutti i cerchi della rete di partenza.

Le proprietà grafiche di $N_{3,\mathbb{R}}$ si interpretano come proprietà sui cerchi del piano, come ora dimostreremo con qualche esempio:

esempio 1 .- Dati due punti P_1 e P_2 del piano $\mathbb{R}^2$ e un cerchio C,o tutti i cerchi per P_1 e P_2 sono ortogonali a C,ovvero è unico il cerchio per P_1 e P_2 ortogonale a C .

dim.I cerchi ortogonali a C costituiscono in $N_{3,\mathbb{R}}$ un piano (polare di k(C).I cerchi passanti per P_1 e P_2 costituiscono un fascio e quindi si rappresentano in una retta di $N_{3,\mathbb{R}}$ .Sono possibili due casi: o la retta appartiene al piano e allora tutti i cerchi del fascio sono ortogonali al cerchio C,ovvero la retta non appartiene al piano e allora lo incontra in un solo punto cioè esiste uno e un sol cerchio del fascio ortogonale a C.

esempio 2 .- Dato un cerchio Ω ,e due coppie di punti (P_1,P_2) (Q_1,Q_2) su Ω ,siano α e β due qualsiasi cerchi per P_1,P_2;ed α' e β' due qualsiasi cerchi per Q_1 e Q_2.Allora i quattro punti dati da $\alpha \cap \alpha'$ e $\beta \cap \beta'$ appartengono a uno stesso cerchio.

dim.Siano $O=k(\Omega)$,$A=K(\alpha)$,$B=k(\beta)$,$A'=k(\alpha')$ e$B'=k(\beta')$.Le rette AB ed A'B' di $N_{3,R}$ si intersecano in O in quanto il cerchio Ω appartiente sia al fascio determinato da α , β che a quello determinato da α' , β' (in quanto Ω passa per (P_1,P_2) e (Q_1,Q_2)

punti base dei fasci determinati da α , β e α', β'). Quindi esse giacciono su uno stesso piano π onde le rette AA' e BB' giacciono su π',quindi AA' e BB' si incontrano in un punto C.Ne segue che i fasci determinati da α, α' e β , β' hanno in comune il cerchio k^{-1}(C),cioè che i quattro punti $\{\alpha \cap \alpha'\} \cup \{\beta \cap \beta'\}$ appartengono al cerchio k^{-1}(C). Si ha così l'asserto.

Procedendo in modo analogo il lettore provi che:

esempio 3.- Due fasci di cerchi che abbiano un cerchio in comune,appartengono ad una determinata rete di cerchi;

esempio 4.-Due reti di cerchi distinte,hanno un fascio di cerchi in comune;

esempio 5.- Una rete e un fascio di cerchi che non si appartengono,hanno un solo punto in comune;

esempio 6.- Un fascio di cerchi e un cerchio non appartenente al fascio,individuano una sola rete contenente entrambi;

esempio 7.- Dati due cerchi distinti esiste uno ed un sol fascio di cerchi ortogonali sia all'uno che all'altro;

esempio 8.- Dati tre cerchi non formanti fascio, esiste uno ed un sol cerchio ortogonale a tutti e tre;

esempio 9.- Dati tre cerchi α, β, γ non formanti fascio e tre cerchi α', β', γ' non formanti fascio, tali che i tre fasci individuati da α e α', β e β', γ e γ', abbiano un cerchio in comune, allora i fasci individuati da α, β e α', β' hanno uncerchio C_1 in comune, così quelli individuati da β, γ e β', γ' hanno un cerchio C_2 in comune e γ, α e γ', α' hanno un cerchio C_3 in comune. Inoltre i tre cerchi C_1, C_2, C_3 appartengono ad uno stesso fascio(teorema di Desargues da interpretare in $N_{3,\mathbb{R}}$).

Il lettore è invitato a svolgere il seguente:

esercizio. Sia C il cerchio con centro nell'origine O e raggio unitario. Determinare il cerchio tangente nel punto A(2,0) alla retta x=2 e ortogonale al cerchio C.-